

Exercice 2 BTS -98 : 10 points

On se propose de résoudre le système différentiel (S) suivant, puis d'en déterminer une solution

$$\text{particulière. (S)} \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t) - 2y(t) & (E_1) \\ \frac{dy(t)}{dt} = x(t) - y(t) - 1 & (E_2) \end{cases}$$

Les fonctions x et y sont des fonctions de la variable réelle t , deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

1°. Montrer en utilisant les équations (E_1) et (E_2) que la fonction x vérifie, pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$\text{l'équation différentielle : } x''(t) + x(t) = 2 \quad (E)$$

2°. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) . En déduire les solutions du système (S).

3°. Déterminer la solution particulière du système (S) vérifiant les conditions initiales

$$x(0) = 1 \text{ et } y(0) = 0.$$

4°. On considère maintenant la courbe définie par le système d'équations paramétriques suivant :

$$\begin{cases} x(t) = 2 + \sin t - \cos t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$$

a. Montrer que l'étude de ces fonctions peut se limiter à $[0; 2\pi]$

b. Etudier les variations de x et y sur cet intervalle et regrouper cette étude sous forme d'un tableau

unique. (on pourra vérifier que $x'(t) = \sqrt{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$)

c. On précisera les points de la courbe où les tangentes sont parallèles aux axes du repère.

d. Construire la courbe C dans un repère orthonormal (unité graphique : 5 cm).