

Exercice 3

1°. Résoudre, sur $[0; +\infty[$, l'équation différentielle (E_0) : $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0$

L'équation (E_0) a pour équation caractéristique de la forme $r^2 + 2r + 5 = 0$ qui a pour solutions

Dont le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16$ et $\sqrt{\Delta} = j\sqrt{16} = 4j$

$$r_1 = \frac{-2 - 4j}{2} = -1 - 2j \text{ et } r_2 = \bar{r}_1 = \frac{-2 + 4j}{2} = -1 + 2j.$$

Donc d'après le théorème du cours l'équation (E_0) a pour solution de la forme :

$$y_H(t) = e^{-t} (A \cos(2t) + B \sin(2t)).$$

2°. Déterminer le réel a tel que la fonction h sur $[0; +\infty[$ par $h(t) = a e^{-t} \sin(3t)$ soit solution, sur $[0; +\infty[$

de l'équation différentielle (E) : $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = e^{-t} \sin(3t)$.

$$h(t) = a e^{-t} \sin(3t) ; h'(t) = -a e^{-t} \sin(3t) + 3a e^{-t} \cos(3t) = a e^{-t} (3 \cos(3t) - \sin(3t)).$$

$$h''(t) = -a e^{-t} (3 \cos(3t) - \sin(3t)) + a e^{-t} (-9 \sin(3t) - 3 \cos(3t)) = a e^{-t} (-3 \cos(3t) + \sin(3t) - 9 \sin(3t) - 3 \cos(3t))$$

$$h''(t) = a e^{-t} (-6 \cos(3t) - 8 \sin(3t)).$$

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = a e^{-t} (-6 \cos(3t) - 8 \sin(3t)) + 2a e^{-t} (3 \cos(3t) - \sin(3t)) + 5a e^{-t} \sin(3t) = e^{-t} \sin(3t)$$

$$a e^{-t} (-6 \cos(3t) + 6 \cos(3t) - 8 \sin(3t) - 2 \sin(3t) + 5 \sin(3t)) = e^{-t} \sin(3t)$$

$-5a e^{-t} \sin(3t) = e^{-t} \sin(3t) \Leftrightarrow a = \frac{-1}{5}$, donc l'équation différentielle (E) admet une solution particulière

$$\text{égale à } h(t) = \frac{-1}{5} e^{-t} \sin(3t).$$

3°. Donner la solution générale de l'équation différentielle (E) . $f(t) = y_H(t) + h(t)$

$$f(t) = e^{-t} \left(A \cos(2t) + B \sin(2t) \right) - \frac{1}{5} e^{-t} \sin(3t)$$

4°. Dédurre des questions précédentes la fonction cherchée vérifiant les conditions initiale

$$f(t) = e^{-t} \left(A \cos(2t) + B \sin(2t) \right) - \frac{1}{5} e^{-t} \sin(3t) \text{ avec : } f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 1$$

$$f(0) = e^{-0} \left(A \cos(0) + B \sin(0) \right) - \frac{1}{5} e^{-0} \sin(0) = A = 0$$

$$f'(t) = -e^{-t} \left(A \cos(2t) + B \sin(2t) - \frac{1}{5} \sin(3t) \right) + e^{-t} \left(-2A \sin(2t) + 2B \cos(2t) - \frac{3}{5} \cos(3t) \right)$$

$$f'(0) = -e^0 \left(A \cos(0) + B \sin(0) - \frac{1}{5} \sin(0) \right) + e^0 \left(-2A \sin(0) + 2B \cos(0) - \frac{3}{5} \cos(0) \right) = 1$$

$$-A + 2B - \frac{3}{5} = 1 \Leftrightarrow 2B = 1 + \frac{3}{5} + A = \frac{8}{5} \Leftrightarrow B = \frac{4}{5}.$$

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{5} \left(4 \sin(2t) - \sin(3t) \right)$$