

Sujets

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) + 2\sin(x)$.

On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° Vérifier que l'on peut réduire l'ensemble d'étude de f à l'intervalle $[0; 2\pi]$.

2° Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x)$ est du signe de : $f'(x) = 4\cos(x)\left(\frac{1}{2} - \sin(x)\right)$

Etudier les variations de f sur $[0; 2\pi]$ et dresser son tableau de variation.

Donner les valeurs exactes des extrema, et préciser en justifiant s'il s'agit de minima ou de maxima.

3° Démontrer que la courbe C admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie.

4° Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.

Etudier la position de C par rapport à T sur $[0; \pi/6]$

5° On a tracé ci-contre, dans un repère orthonormal, la courbe C sur $[0; 2\pi]$.

(l'unité graphique n'est pas précisée).

En utilisant les questions précédentes compléter le tracé sur $[-\pi; 2\pi]$ et tracer la droite T .

Exercice 2

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\sin(x) + 3$.

1) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a exactement 2 solutions sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

On notera α et β ces solutions ($\alpha < \beta$).

2) Donner en le justifiant, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de chacune de ces solutions.

3) En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2(x) - 3\sin(x)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra pour unité 1cm sur l'axe des ordonnées et on représentera π par 3 cm sur l'axe des abscisses).

1) Pourquoi f est-elle continue et dérivable sur $\mathbb{R}$?

2) Montrer que f est périodique.

3) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ et dresser son tableau de variations sur cet intervalle.

4) Déterminer les abscisses des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses sur $[0; 2\pi]$.

Tracer C sur $[0; 2\pi]$, puis sur $[-\pi; 0]$.


sa soutra !
Docs à portée de main

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos(x)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.a. Pourquoi f est-elle continue et dérivable sur $\mathbb{R}$?

b. Montrer que f est périodique de période 2π .

c. Démontrer que la courbe C admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

2.a. Déterminer la fonction dérivée de f

b. Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = \sin x(-2\cos x + 1)$

c. Etudier le signe de $f'(x)$ pour tout réel x dans l'intervalle $[0; \pi]$

3) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0; \pi]$ et dresser son tableau de variations sur cet intervalle.

4) Tracer la courbe représentant f sur $[-\pi; \pi]$.

Correction

Exercice 1

Ex I

1° f est périodique de période 2π

2° $f'(x) = -2 \sin 2x + 2 \cos x$

$= -4 \sin x \cos x + 2 \cos x$

$= 4 \cos x \left(-\sin x + \frac{1}{2}\right)$

-3 minimum, $\frac{3}{2}$ maximum,

1 minimum local

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos x	+	+	0 -	+	0 -	
$\frac{1}{2} - \sin x$	+	0 -	-	0 +	+	
f'(x)	+	0 -	0 +	0 -	0 +	
f	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	-3	1

3° $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(\pi + 2x) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos 2x + 2 \cos x$

$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(\pi - 2x) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos 2x + 2 \cos x$

4° $f(0) = 1$ et $f'(x) = 2$.

Equation de la tangente : $y = 2x + 1$

$g(x) = f(x) - (2x + 1) = \cos 2x + 2 \sin x - 2x - 1$.

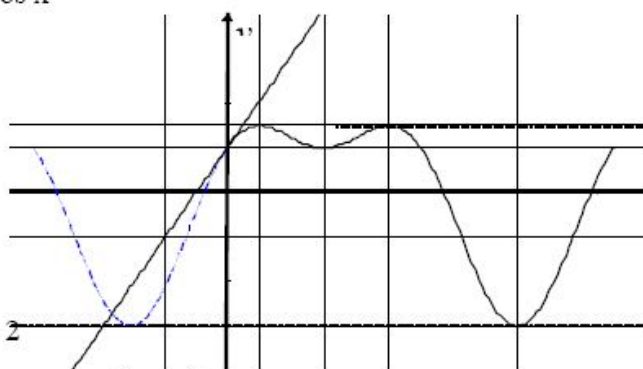
$g'(x) = -2 \sin 2x + 2 \cos x - 2$.

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ donc $0 \leq \sin 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $0 \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$.

On a donc $-2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times 0 - 2 \leq g'(x) \leq -2 \times 0 + 2 \times \frac{1}{2} - 2$

c'est-à-dire $-\sqrt{3} - 2 \leq g'(x) \leq -1 < 0$. g est donc décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ on a : $g(x) \leq 0$ ($g(0) = 0$) donc $\mathcal{C}_f$ est au dessous de $\mathcal{T}$



Exercice 2

partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\sin(x) + 3$.

1) Etude des variations de g.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car sin est dérivable sur $\mathbb{R}$; et $g'(x) = 4 \cos(x)$.

$g'(x) \geq 0$ sur $[0; 2\pi] \Leftrightarrow \cos x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \pi/2$ ou $3\pi/2 \leq x \leq 2\pi$

x	0	$\pi/2$	$3\pi/2$	2π
$g'(x)$	+	0	-	+
$g(x)$	3	7	-1	7

Fomesoutra.com
ça s'entraîne !
Docs à portée de main

L'équation $g(x) = 0$ a exactement 2 solutions sur l'intervalle $[0; 2\pi]$

- Sur $[0; 2\pi]$, d'après le tableau de variation $g(x) \geq 3$, donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de racine.
- Sur $[\pi/2; 3\pi/2]$, g est continue et strictement décroissante et 0 est entre $g(\pi/2)$ et $g(3\pi/2)$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[\pi/2; 3\pi/2]$ une unique solution: on la note α .
- Sur $[3\pi/2; 2\pi]$, g est continue et strictement croissante et 0 est entre $g(3\pi/2)$ et $g(2\pi)$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[3\pi/2; 2\pi]$ une unique solution: on la note β .
- Conclusion: sur $[0; 2\pi]$ l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions: α et β .

2. Encadrement d'amplitude 10^{-2} de chacune des solutions α et β .

- D'après la calculatrice, $g(3,98) \approx 0,0257$ et $g(3,98) \approx -9 \times 10^{-4}$ alors $g(3,98) \geq g(\alpha) \geq g(3,99)$; Or g est décroissante strictement sur $[\pi/2; 3\pi/2]$, alors $3,98 \leq \alpha \leq 3,99$.
- D'après la calculatrice, $g(5,43) \approx -0,0135$ et $g(5,44) \approx 0,0129$ alors $g(5,43) \leq g(\beta) \leq g(5,44)$; or g est croissante strictement sur $[3\pi/2; 2\pi]$ alors $5,43 \leq \beta \leq 5,44$.

Signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

Il résulte de 1) et 2) que

x	0	$\pi/2$	α	$3\pi/2$	β	2π
$g(x)$	+	+	0	-	0	+

Partie B :

1. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $\cos$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction linéaire $x \mapsto x^2$ aussi, alors par composition $x \mapsto 2\cos(2x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. D'autre part $\sin$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors (comme somme) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction f est périodique.

Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont périodiques et de période 2π , alors il en est de même de la fonction f .

En effet, pour tout réel x : $f(x+2\pi) = 2\cos^2(x+2\pi) - 3\sin(x+2\pi) = 2\cos^2(x) - 3\sin(x) = f(x)$

Conclusion: f est périodique de période 2π .

3) Variations de f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$

D'après 1), f est dérivable, de plus $(u^2)' = 2u'u$ alors $f'(x) = -4\sin x \cos x - 3\cos x = -\cos x(4\sin x + 3)$

Par définition de α : $4\sin \alpha + 3 = 0$, donc $\sin \alpha = -\frac{3}{4}$.

$$f(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 3\sin(\alpha) = 2(1 - \sin^2 \alpha) - 3\sin \alpha = 2\left(1 - \frac{9}{16}\right) + 3 \times \frac{3}{4} = \frac{7}{8} + \frac{9}{4} = \frac{25}{8}$$

$$\text{de même, } \sin \beta = -\frac{3}{4} \text{ et } f(\beta) = 2\cos^2(\beta) - 3\sin(\beta) = 2(1 - \sin^2 \beta) - 3\sin \beta = 2\left(1 - \frac{9}{16}\right) + 3 \times \frac{3}{4} = \frac{7}{8} + \frac{9}{4} = \frac{25}{8}$$

x	0	$\pi/2$	α	$3\pi/2$	β	2π	
$g(x)$	+	0	+	0	-	0	+
$-\cos x$	-	0	+	+	0	-	-
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	-
$f(x)$	2		$\frac{25}{8}$		$\frac{25}{8}$		2

Fomesoutra.com
ça s'entraîne !
Docs à portée de main

4) Abscisses des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses sur $[0; 2\pi]$.

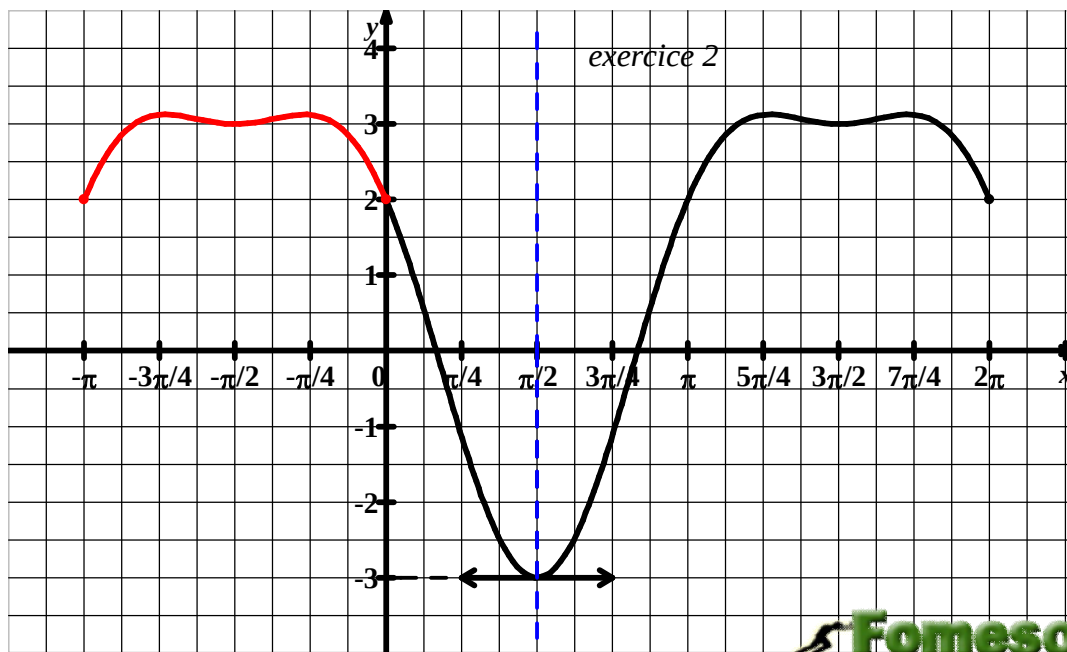
$$\text{Sur } [0; 2\pi]: f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\sin x = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) - 3\sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$(2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -2 < -1 \text{ (absurde car } \sin x \in [-1; 1]) \text{ ou}$$

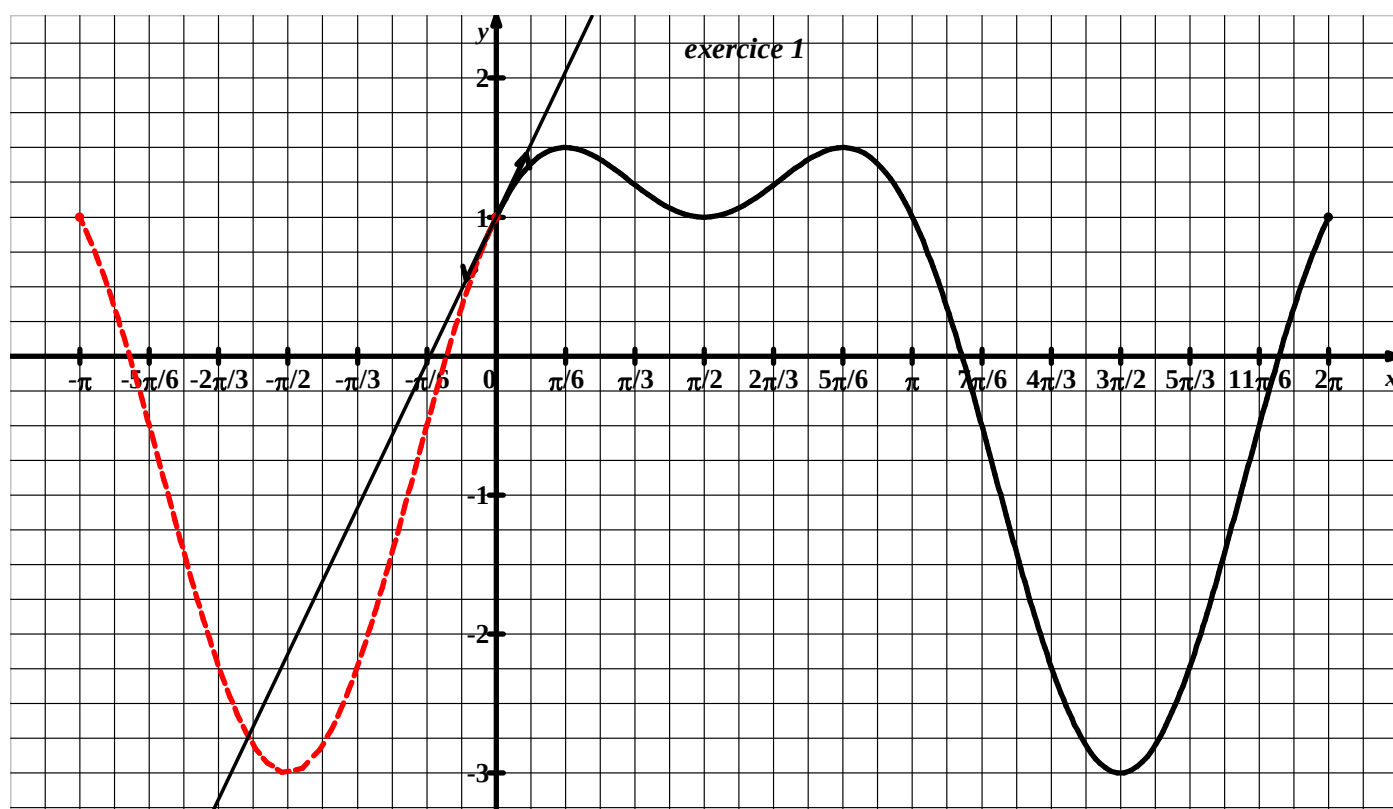
$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Conclusion: C coupe (Ox) en deux points, d'abscisses respectives $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.



Exercise 1

Fomesoutra.com
ça soutra !
 Docs à portée de main



Exercice 3

1. a. La fonction $\cos$ est périodique et de période 2π , alors il en est de même de la fonction f .

$$\text{En effet, pour tout réel } x: f(x+2\pi) = \frac{1}{2}\cos(2x+4\pi) - \cos(x+2\pi) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos(x) = f(x)$$

Conclusion: f est périodique de période 2π .

b. pour démontrer que la courbe C admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie, il faut démontrer que la fonction f est paire. $\mathbb{R}$ est centré en zéro et pour tout réel x ,

$$f(-x) = \frac{1}{2}\cos(-2x) - \cos(-x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos(x) = f(x), \text{ puisque la fonction cosinus est paire.}$$

Ce qui démontre que f est paire.

2.a. f est continue et dérivable en tant que somme des fonctions trigonométriques et pour tout réel x ,

$$f'(x) = -\sin(2x) + \sin(x) = -2\cos x \sin x + \sin x = \sin x(-2\cos x + 1).$$

d. pour tout réel $x \in]0; \pi[$, $\sin x > 0$. De plus $\sin 0 = \sin \pi = 0$

$$\text{pour tout réel } x \in [0; \pi], -2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{et } -2\cos x + 1 > 0 \Leftrightarrow \cos x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{\pi}{3}, \text{ puisque la fonction cosinus est décroissante sur } [0; \pi].$$

Le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; \pi]$ est donc :

x	0	$\pi/3$	π
$\sin x$	0	+	+
$-2\cos x + 1$	-1	-	+
$f'(x)$	0	-	+

3. a. on déduit de la question précédente que f est strictement décroissante sur $[0; \pi/3]$ et strictement croissante sur $[\pi/3; \pi]$.

x	0	$\pi/3$	π
$f'(x)$	0	-	+
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$

Fomesoutra.com
ça s'entraîne !
Docs à portée de main

On la complète sur $[-\pi; \pi]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (vert / noir).

Puis on la complète sur $\mathbb{R}$ par translations successives de vecteur $\pm 2\vec{i}$

