TP MATHEMATIQUES SUITES BTSGO 2008-2009

Exercice 1

L'unité d'intensité du son utilisée dans l'exercice est le décibel (symbole dB). Une source sonore émet un son d'intensité 100 décibels ($u_0 = 100$). On appelle u_n (où l'entier *n* est supérieur ou égal à 1) l'intensité du son mesurée après la traversée de *n* plaques d'isolation phonique, sachant que chaque plaque d'isolation absorbe 10 % de l'intensité du son qui lui parvient (par exemple $u_1 = u_0 - \frac{10}{100}u_0$).

1. Calculer u_1 , u_2 , u_3 .
2. Déterminer la relation entre u_{n+1} et u_n puis exprimer u_n en fonction de u_0 et de *n*.
3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)
4. Déterminer à partir de quelle valeur de *n* l'intensité du son devient inférieure à 1 dB.

Exercice 2

En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 23 % de son intensité lumineuse.
Soit I_0 l'intensité d'un rayon à son entrée dans la plaque de verre et I_1 son intensité à sa sortie.

1. Exprimer I_1 en fonction de I_0 .
2. On superpose *n* plaques de verre identiques; on note I_n l'intensité du rayon à la sortie de la nième plaque.

a. Exprimer I_n en fonction de I_{n-1} . Quelle est la nature de la suite (I_n)?

b. Préciser le premier terme et la raison: en déduire l'expression de I_n en fonction de I_0. Préciser, en le justifiant, le sens de variation de la suite (I_n) .

3. Quelle est l'intensité initiale I_0 d'un rayon lumineux dont l'intensité après avoir traversé 4 plaques est égale à 15 ?
4. Calculer le nombre minimum de plaques qu'un rayon doit avoir traversé pour que son intensité sortante soit inférieure ou égale au quart de son intensité entrante.

Exercice 3

Au niveau de la mer (altitude 0), la pression atmosphérique est 1 013 hectopascal. Dans cet exercice, on admet que la pression atmosphérique diminue de 1,25% à chaque élévation de 100 m. Pour tout entier naturel *n*, on note P_n la pression, exprimée en hectopascal, à l'altitude 100n, exprimée en mètres.
Soit (P_n) la suite numérique des valeurs prises par cette pression atmosphérique. On a alors $P_0 = 1013$.

1. Calculer les pressions P_1 et P_2, arrondies à l'unité, aux altitudes 100 et 200.
2. a. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n. En déduire la nature de la suite (P_n). Préciser sa raison et son premier terme.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel *n*, $P_n = 1013 \times 0,9875^n$.
3. Calculer la pression atmosphérique, arrondie à l'unité, à l'altitude 3 200.
4. Calculer à partir de quelle altitude, à 100 m près, la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hectopascal.

Exercice 4 Le but de l'exercice est l'étude de la désintégration d'un corps radioactif : le carbone 14.

1. Soit N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant *t* = 0, N_1 le nombre d'atomes de carbone 14 un siècle après, N_k le nombre d'atomes de carbone 14 après *k* siècles (*k* entier). On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps : environ 1,24 % par siècle.

a) Donner l'expression de N_1 en fonction de N_0, puis de N_{k-1} en fonction de N_k .

b) En déduire la nature de la suite (N_k) et l'expression de N_k en fonction de N_0 et *k*.

c) Donner, en le justifiant, le sens de variation de la suite (N_k).

2. Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants ; à la mort de ceux-ci, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 40 % de celle d'un fragment d'os actuel de même masse, pris comme témoin.
   Calculer l'âge de ces fragments. On arrondira le résultat au siècle près.

Exercice 5 : Soit $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 2n - 1$

1-a) Montrer que $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison r.

b) Calculer en fonction de n, la somme : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + ...u_n$

2. Soit $(v_n)_{n\in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = e^{u_n}$

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique pour laquelle on précisera le premier terme v_0 et la raison b.

b) Calculer $P_n = v_0 \times v_1 \times .... \times v_n$ en fonction de *n*

Exercice 6

1. Soit (E) l'équation différentielle : $y'+2y = 0$,où y est une fonction numérique définie et dérivable sur R
 a. Résoudre l'équation (E).
 b. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.
2. a. Calculer la valeur moyenne de f sur [0; 10] .
 b. Déterminer, en fonction de n, la valeur moyenne de f sur l'intervalle [n ; n+ 1].
3. Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \dfrac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}$, pour tout n entier positif ou nul.
 a. Calculer la valeur exacte de u_0 $u_1$et u_2.
 b. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 c. Déterminer la valeur exacte de la somme S= $U_0 + U_1 + ...+ U_9$.

EXERCICE 7 : Pour former une pièce métallique à partir d'un profilé de 2 centimètres d'épaisseur, on utilise un marteau pilon. Le marteau pilon frappe toutes les 6 secondes, et à chaque coup, l'épaisseur de métal diminue de 2%. On note $\left(u_n\right)$ (n entier naturel) l'épaisseur en millimètres de la pièce après n frappes de marteau pilon. On a donc $u_0 = 20$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats arrondis au centième de millimètre.
2. Démontrer que la suite (un) est géométrique, et préciser sa raison.
3. Déterminer u_n en fonction de l'entier n.
4. Quelle est l'épaisseur, arrondie au centième de millimètre, de la pièce après 10 frappes ?
5. On considère que la pièce est terminée dès que son épaisseur est inférieure à 14 millimètres. Quel est le temps minimal pour que la pièce soit terminée ?

Exercice 8 : Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = e^{-2x}$

1. (a) Calculer la valeur moyenne de f sur $[0;10]$.
 (b) Déterminer, en fonction de n, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[n;n+1]$.
2. Soit $\left(u_n\right)$,la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right)e^{-2n}$ pour tout n entier positif ou nul.
 (a) Calculer la valeur exacte de u_0, u_1 et u_2.
 (b) Démontrer que la suite $\left(u_n\right)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 (c) Déterminer la valeur exacte de la somme $S = u_0 + u_1 + ... + u_9$.

Exercice 9

Partie A En 1990, le chiffre d'affaires d'une entreprise A s'élevait à 230 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 15 000 euros.

1. Calculer le chiffre d'affaires u_1 en 1991.
2. Soit u_n un le chiffre d'affaires de l'année 1990+n.
 Quelle est la nature de la suite $\left(u_n\right)$? Préciser le premier tenue u_0 et la raison a de cette suite.
3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise A.

Partie B

En 1990, le chiffre d'affaires dune entreprise B s'élevait à 1 150 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 7,4 %.

1. Calculer le chiffre d'affaires v_1 en 1991.
2. Soit v_n le chiffre d'affaires de l'année 1990+n. Justifier que (v_n) est une suite géometrique de raison 1,074.
3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise B.

Partie C

1. Que constate-t-on en 2006 pour les entreprises A et B?
2. En 2006, le chef de l'entreprise B affirme qu'à ce rythme son entreprise aura dans 15 ans, un chiffre d'affaires pratiquement double de celui de l'entreprise A. A-t-il raison? Justifier.

Exercice 10

Soit $\left(u_n\right)_{n\in N}$ la suite définie par $U_n = f(n) = 4e^{-n/2}$

1.Démontrer que $\left(u_n\right)_{n\in N}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

2. Soit n un nombre entier naturel. On pose : $S_n = 4\left(u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n\right)$ et $T_n = 4\left(u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + u_{n+1}\right)$. Exprimer S_n et T_n en fonction de n.

3. Déterminer les limites S et T de S_n et T_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 1

1. $u_1 = u_0 - \frac{10}{100}u_0 = u_0 \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_0 = 0{,}9u_0$. Le son perd 10 % de son intensité , cela se traduit

par $u_1 = u_0 - \frac{10}{100}u_0 = u_0 \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_0 = 0{,}9u_0$. $u_2 = u_1 - \frac{10}{100}u_1 = u_1 \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_1 = 0{,}9 \times 0{,}9u_0 = (0{,}9)^2 u_0$.

$u_3 = u_2 - \frac{10}{100}u_2 = u_2 \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_2 = (0{,}9)^3 u_0$

2. En raisonnant comme à la première question , sachant qu'il faut traverser une plaque pour passer de l'intensité u_n à u_{n+1} : $u_{n+1} = u_n - \frac{10}{100}u_n = u_n \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_n = 0{,}9u_n$; $u_{n+1} = 0{,}9u_n$.

La relation trouvée à la question précédente définit une suite géométrique .

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ .son premier terme est u_0. Le cours donne la formule générale $u_{n+1} = qu_n = q^{n+1}u_0$., donc on a : $u_n = q^n u_0 = (0{,}9)^n u_0$ pour tout entier naturel n.

3. c. Déterminons le signe de la différence $u_{n+1} - u_n = 0{,}9u_n - u_n = -0{,}1u_n$

Tous les termes u_n, $n \in N$, sont positifs donc la différence est négative : $u_{n+1} - u_n \le 0$, pour tout $n \in N$

La suite (u_n) est donc décroissante .

Remarque : Tous les termes u_n, $n \in N$, sont positifs on peut donc étudier le quotient :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{0{,}9u_n}{u_n} = 0{,}9 < 1$ pour n > 0. La suite (u_n) est donc décroissante.

L'intensité du son devient inférieure à 1 dB quand $u_n = (0{,}9)^n u_0 < 1 \Rightarrow (0{,}9)^n < \frac{1}{100} = 0{,}01$

$\Rightarrow \ln(0{,}9)^n < \ln(0{,}01) \Rightarrow n\ln(0{,}9) < \ln(0{,}01) \Rightarrow n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}9)}$ puisque $\ln(0{,}9) < 0$; $n \approx 43{,}709$ soit $n = 44$.

Exercice 2 :

Le rayon lumineux perd 23 % de son intensité , cela se traduit par : $I_1 = I_0 - \frac{23}{100}I_0 = I_0 \times (1 - \frac{23}{100}) = \frac{77}{100}I_0$

2.a En raisonnant comme à la première question , sachant qu'il faut traverser une plaque pour passer de l'intensité I_{n-1} à I_n : $I_n = I_{n-1} - \frac{23}{100}I_{n-1} = I_{n-1} \times (1 - \frac{23}{100}) = \frac{77}{100}I_{n-1}$; $I_n = 0{,}77I_{n-1}$.

b. La relation trouvée à la question précédente définit une suite géométrique .

La suite (I_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}77$ .son premier terme est I_0.

Le cours donne la formule générale $I_n = qI_{n-1} = q^n I_0$.

c. Déterminons le signe de la différence $I_n - I_{n-1}$: $I_n - I_{n-1} = 0{,}77I_{n-1} - I_{n-1} = -0{,}23I_{n-1}$.

Tous les termes I_n, $n \in N$, sont positifs donc la différence est négative : $I_n - I_{n-1} \le 0$, pour tout $n \in N$

La suite (I_n) est donc décroissante .

Remarque : Tous les termes I_n, $n \in N$, sont positifs on peut donc étudier le quotient :

$\frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{0{,}77I_{n-1}}{I_{n-1}} = 0{,}77 < 1$ pour n > 0. La suite (I_n) est donc décroissante.

3. l'intensité obtenue après la traversée de 4 plaques est égale à 15 d'où $I_4 = 15 \Leftrightarrow (0{,}77)^4 I_0 = 15$

$I_4 = 15 \Leftrightarrow I_0 = \frac{15}{(0{,}77)^4} \approx 42{,}67$.

4. l'intensité sortante étant inférieure ou égale au quart de son intensité rentrante , cela se traduit par l'inéquation $I_n \le \frac{1}{4}I_0$, ou n est l'inconnue à déterminer .Cette inéquation peut s'écrire :

$(0{,}77)^n I_0 \le 0{,}25I_0$, après simplification par I_0, on obtient : $(0{,}77)^n \le 0{,}25$; $\ln(0{,}77)^n \le \ln(0{,}25)$

$n\ln\left(0,77\right)\leq\ln(0,25)$; $\ln(0,77)<0$ d'où : $n\geq\dfrac{\ln(0,25)}{\ln\left(0,77\right)}\approx 5,3$ et $n\in N$, donc $n=6$ .Il faudra au minimum 6 plaques pour que l'intensité sortante soit inférieure ou égale au quart de l'intensité rentrante .

Exercice 3

1. $P_0=1013$. P_1 est la pression atmosphérique à la hauteur 100 m. P_1 a diminué de 1,25% par rapport à P_0 .
$P_1=P_0-\dfrac{1,25}{100}P_0=1013\times(1-\dfrac{1,25}{100})=1000$. De même $P_2=P_1-\dfrac{1,25}{100}P_1=1000(1-\dfrac{1,25}{100})=988$

2. a) La pression P_{n+1} diminue de 1,25% par rapport à P_n donc $P_{n+1}=P_n-\dfrac{1,25}{100}P_n=P_n(1-\dfrac{1,25}{100})=0,9875P_n$
b) On en déduit que (P_n) est un suite géométrique de raison q = 0,9875 et de premier terme $P_0=1013$.
c) On en déduit que $P_n=P_0q^n$; $P_n=1013\times 0,9875^n$.

3. $3200=100\times 32$ donc la pression atmosphérique à l'altitude 3200 m est donné par $P_{32}=1013\times 0,9875^{32}$
$P_{32}=677$ La pression est de 677 hectopascal.

4. $P_n\leq 600$; $1013\times 0,9875^n\leq 600$; $0,9875^n\leq\dfrac{600}{1013}$; $\ln(0,9875^n)\leq\ln\left(\dfrac{600}{1013}\right)$;
$n\ln(0,9875)\leq\ln\left(\dfrac{600}{1013}\right)$; $n\geq\ln\left(\dfrac{600}{1013}\right)/\ln(0,9875)$ car $\ln(0,9875)\leq 0$. $n\geq 41,6$ soit à partir de $n=42$. A partir de $42\times 100=4200m$, la pression atmosphérique devient inférieur à 600 hectopascal

Exercice 5

a) le nombre d'atomes de carbone 14 diminue de 1,24 % par siècle donc
$N_1=N_0-\dfrac{1,24}{100}\times N_0=\left(\dfrac{100}{100}-\dfrac{1,24}{100}\right)N_0=\dfrac{98,76}{100}N_0$. $N_1=0,9876N_0$.
$N_{k+1}=N_k-\dfrac{1,24}{100}\times N_k=\left(\dfrac{100}{100}-\dfrac{1,24}{100}\right)N_k=\dfrac{98,76}{100}N_k$ ce qui donne $N_{k+1}=0,9876N_k$.

b) On reconnaît dans la formule précédente , la formule $u_{n+1}=bu_n$, pour tout entier k , formule de récurrence qui définit une suite géométrique de raison le réel b .
(N_k) est la suite géométrique de raison $b=0,9876$ et de premier terme N_0. Il en résulte le terme général de la suite $N_k=N_0\times b^k$ d'où $N_k=\left(0,9876\right)^n N_0$.

c) Deux modèles permettent de déterminer le sens de variation de la suite (N_k) :
la première méthode consiste le signe de la différence $N_{k+1}-N_k$: $N_{k+1}-N_k=0,9876N_k-N_k=-0,0124N_k$
Tous les termes N_k étant positifs , quel que soit l'entier k , la différence est négative , la suite (N_k) est décroissante .
la deuxième méthode est possible dans le cas où tous les termes N_k et alors on étudie le rapport
$\dfrac{N_{k+1}}{N_k}=0,9876<1$ et on obtient : $N_{k+1}<N_k$ et par conséquent : la suite (N_k) est décroissante .

2. La teneur en carbone 14 étant de 40 % de celle actuelle , on peut écrire : $N_{k+1}=0,4N_k$ ce qui traduit par l'équation : $\left(0,9876\right)^k N_0=0,4N_0\Leftrightarrow\left(0,9876\right)^k=0,4\Leftrightarrow\ln\left(0,9876\right)^k=\ln 0,4\Leftrightarrow k\ln\left(0,9876\right)=\ln 0,4$
$k=\left(\ln(0,4)\right)/\ln\left(0,9876\right)\approx 73,435$. Les fragments ont un peu plus de 73 siècles.
On utilise la calculatrice pour calculer $\left(0,9876\right)^{73}<0,4$ et $\left(0,9876\right)^{74}>0,4$

Exercice n°6

1. a) $u_0=2\times 0-1=-1$. $u_{n+1}-u_n=2(n+1)-1-(2n-1)=2n+2-1-2n+1=2$. Pour tout $n\in N$ on a donc $u_{n+1}=u_n+2$, de plus $u_0=-1$ donc la suite $\left(u_n\right)_{n\in N}$ est arithmétique de raison $r=2$ et de premier terme $u_0=-1$.
b) $S_n=\dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}=\dfrac{(n+1)(-1+2n-1)}{2}=(n+1)(n-1)=n^2-1$

2. a) $v_0=e^{u_0}=e^{-1}$. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{e^{u_{n+1}}}{e^{u_n}}=e^{u_{n+1}-u_n}=e^2$.

Pour tout entier naturel n on a donc $\frac{v_{n+1}}{v_n}=e^2$ de plus $v_0=e^{-1}$. donc la suite $(v_n)_{n\in N}$ est géométrique de raison $q=e^2$ et de premier terme $v_0=e^{-1}$

b) $P_n=v_0\times v_1\times.........\times v_n=e^{u_0}\times e^{u_1}\times...........\times e^{u_n}=e^{u_0+u_1+u_2+........+u_n}=e^{S_n}$. $P_n=e^{n^2-1}$

Exercice 7

1. $(E): y'+2y=0$

1.a. $y=ke^{-2x}$ est la solution générale de E.

1.b. La solution *f* de (E) est telle que $f(0)=1$.On a donc $1=ke^0=k$ soit $k=1$.

D'où *f* est définie par $f(x)=e^{-2x}$.

2.a. La valeur moyenne de *f* sur [0; 10] est : $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$; $\mu=\frac{1}{10-0}\int_0^{10} e^{-2x}dx$

$\mu=\frac{1}{10}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{10}$; $\mu=\frac{1}{20}\left[1-e^{-20}\right]$

2.b $\mu=\frac{1}{n+1-n}\int_n^{n+1}e^{-2x}dx$; $\mu=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_n^{n+1}$ $\mu=\frac{-1}{2}\left[e^{-2(n+1)}-e^{n}\right]$; $\mu=\frac{1}{2}\left[e^{-2n}-e^{-2n}e^{-2}\right]$

$\mu=\frac{1}{2}e^{-2n}\left(1-e^{-2}\right)$

3. $u_n=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}$,

3.a. $u_0=\frac{1}{2}(1-e^{-2})$; $u_1=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2}$; $u_2=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-4}$

3.b. Pour montrer que (Un) est une suite géométrique il suffit de montrer qu'il existe un réel non nul que tel que $u_{n+1}=q\times u_n$.

$u_n=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}$; $u_{n+1}=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2(n+1)}$; $u_{n+1}=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}\times e^{-2}$; $u_{n+1}=u_n\times e^{-2}$.

Donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0=\frac{1}{2}(1-e^{-2})$ et de raison e^{-2}

3.c $u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+...........u_{n-1}+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ .On a donc

$u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+...........u_{n-1}+u_n=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right)\times\frac{1-e^{-2(n+1)}}{1-e^{-2}}$.

$u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+...........+u_{n-1}+u_n=\frac{1}{2}\times\left(1-e^{-2(n+1)}\right)$.

Exercice 8

On note u_n (*n* entier naturel) l'épaisseur en millimètres de la pièce après *n* frappes de marteau pilon. On a donc u_0 = 20.

1) Quand une valeur diminue de 2 % , elle est multipliée par 0,98 .

$u_1 = u_0 - 0{,}02\, u_0 = 0{,}98\, u_0 = 0{,}98 \times 20 = 19{,}60$ mm ; $u_2 = 0{,}98\, u_1 = 0{,}98 \times 19{,}60 = 19{,}21$ mm

$u_3 = 0{,}98\, u_2 = 0{,}98 \times 19{,}21 = 18{,}83$ mm

2) Chaque terme de cette suite est obtenu en multipliant le terme précédent par 0,98, il s'agit donc bien d'une suite géométrique de raison q = 0,98.

3) $u_n = u_0\, q^n = 20 \times (0{,}98)^n$

4) Epaisseur, arrondie au centième de millimètre, de la pièce après 10 frappes :

$u_{10} = u_0\, q10 = 20 \times (0{,}98)^{10} = 16{,}34$ mm

5) On cherche n tel que $u_n \leq 14$

$20\times 0{,}98^n\leq 14\Leftrightarrow 0{,}98^n\leq 0{,}7\Leftrightarrow \ln\left(0{,}98\right)^n\leq \ln 0{,}7\Leftrightarrow n\ln\left(0{,}98\right)\leq \ln 0{,}7\Leftrightarrow n\geq\frac{\ln 0{,}7}{\ln(0{,}98)}\approx 17{,}6$

(on a divisé par $\ln(0{,}98)<0$)

donc $n \geq 18$, il faut 18 frappes de marteau pilon pour que l'épaisseur en millimètres de la pièce soit inférieure à 14 mm ce qui donne comme le temps minimal pour que la pièce soit terminée :
$18 \times 6 = 108$ s = 1 minutes et 48 secondes.

Exercice 9

Partie A

1. $u_0 = 230\ 000$. $u_1 = u_0 + 15\ 000 = 245\ 000$ €. Le chiffre d'affaires u_1 en 1991 était de 245 000 €

2. Soit u_n le chiffre d'affaires de l'année 1990 + n. u_{n+1} est le chiffre d'affaires de l'année 1990 + n + 1, on a : $u_{n+1} = u_n + 15000$.
Donc la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $a = 15000$ et de premier terme $u_0 = 230\ 000$

3. 2006 correspond au 16ème rang donc
$u_{16} = u_0 + 16a = 230\ 000 + 16 \times 15000 = 230\ 000 + 240\ 000 = 470\ 000$ €
le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise A est donc de 470 000 €

Partie B

En 1990, le chiffre d'affaires dune entreprise B s'élevait à 150 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 7,4 %.

1. $v_0 = 150\ 000$ $v_1 = v_0 \times 1{,}074 = 161100$ €. Le chiffre d'affaires v_1 en 1991 était de 161100 €

2. Soit v_n le chiffre d'affaires de l'année 1990 + n. v_{n+1} est le chiffre d'affaires de l'année 1990 + n + 1, on a : $v_{n+1} = v_n \times 1{,}074$. Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $b = 1{,}074$ et de premier terme $v_0 = 150\ 000$

3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise B. $v_{16} = v_0 \times b^{16} = 150\ 000 \times 1{,}074^{16} = 470\ 067$ €

Partie C

1. On constate que les chiffres d'affaire des deux entreprises A et B en 2006 sont sensiblement les même malgré le chiffre d'affaire plus conséquent de l'entreprise A en 1990.

2. $u_{31} = u_0 + 31a = 230\ 000 + 31 \times 15000 = 695\ 000$ € . $2\,u_{31} = 1390\ 000$ €
$v_{31} = v_0 \times b^{31} = 150\ 000 \times 1{,}074^{31} = 1371\ 589$ € on est pas loin du double en effet.

Exercice 10

1. $u_0 = f(0) = 4e^0 = 4$. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{f(n+1)}{f(n)} = \dfrac{4e^{-1/2(n+1)}}{4e^{-n/2}} = e^{-1/2(n+1-n)} = e^{-1/2}$

Pour tout entier naturel n on a donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1/2}$ et $u_0 = 4$

donc la suite $(u_n)_{n\in N}$ est géométrique de raison $q = e^{-1/2}$ et de premier terme $u_0 = 4$

2. ses deux sommes ont chacune n + 1 termes $u_1 = 4e^{-1/2}$.

$$S_n = 4u_0 \times \frac{1-\left(e^{-1/2}\right)^{n+1}}{1-e^{-1/2}} = 16 \times \frac{1-\left(e^{-1/2}\right)^{n+1}}{1-e^{-1/2}}. \quad T_n = 4u_1 \times \frac{1-\left(e^{-1/2}\right)^{n+1}}{1-e^{-1/2}} = 16e^{-1/2} \times \frac{1-\left(e^{-1/2}\right)^{n+1}}{1-e^{-1/2}}$$

3. $0 < e^{-1/2} < e^0 = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(e^{-1/2}\right)^{n+1} = 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{16}{1-e^{-1/2}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \dfrac{16e^{-1/2}}{1-e^{-1/2}}$