Problème bts 2002

On considère le système différentiel (S) suivant : $(S)\begin{cases} x'(t)+2y(t)=-2\sin t & (E_1) \\ 2x(t)-y'(t)=-2\cos t & (E_2) \end{cases}$, où les fonctions x et y sont nulles si $t<0$ et vérifient $x(0)=-1$ et $y(0)=0$.

I- On se propose de résoudre le système différentiel (S) suivant, puis d'en déterminer une solution particulière. Les fonctions *x* et *y* sont des fonctions de la variable réelle *t*, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. En dérivant l'équation (E_1) et en utilisant l'équation(E_2) ,montrer que la fonction *x* vérifie, pour tout *t* dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $x''(t)+4x(t)=-6\cos t \quad (E)$

2. a. Déterminer les constantes réelles *a et b* pour que la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t)=a\cos t+b\sin t$ soit une solution particulière de l'équation (E) .
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) : $x''(t)+4x(t)=0 \quad (E_0)$
   c. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E). En déduire les solutions $x(t)$ et $y(t)$ du système (S).

3. Déterminer la solution particulière du système (S) vérifiant les conditions initiales $x(0)=-1$ et $y(0)=0$.

II-
1. Ecrire le système vérifié par les transformées de Laplace $X(p)$ et $Y(p)$ des fonctions x et y.
2. Montrer que pour tout réel p, $\dfrac{6p}{(p^2+1)(p^2+4)}=\dfrac{2p}{p^2+1}-\dfrac{2p}{p^2+4}$
3. Utiliser le résultat de la question précédente pour déterminer $X(p)$, en déduire $x(t)$, l'original de $X(p)$.
4. Déterminer $Y(p)$ puis la fonction y original de $Y(p)$.

III- Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère la courbe ($\mathcal{C}$) définie par la représentation graphique : $\begin{cases} f(t)=\cos(2t)-2\cos t \\ g(t)=\sin(2t)-2\sin t \end{cases}$. $t\in\mathbb{R}$

On limitera l'étude à l'intervalle $\left[-\pi;\pi\right]$.

1°. Etudier la parité de chacune des fonctions *f* et *g* .En déduire un axe de symétrie de la courbe ($\mathcal{C}$) .

2°.a. Montrer que $f'(t)=-4\sin\left(t/2\right)\cos\left(3t/2\right)$.Etablir le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $\left[0;\pi\right]$

b. On admettra que $g'(t)=-4\sin\left(t/2\right)\sin\left(3t/2\right)$. Déterminer le signe de $g'(t)$.

c. En déduire les variations de *f* et *g* sur l'intervalle $\left[0;\pi\right]$.

d. Dresser le tableau des variations jointes des fonctions *f* et *g*.

3°. On admet que la tangente à la courbe ($\mathcal{C}$) au point A de paramètre $t_A=0$ à pour vecteur directeur $\vec{i}$.
Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe ($\mathcal{C}$) aux point B , C et D de paramètres respectifs $t_B=\dfrac{\pi}{3}$; $t_C=\dfrac{2\pi}{3}$ et $t_D=\pi$. Tracer le tangentes aux points A , B , C et D puis la courbe ($\mathcal{C}$) .

Problème 2002

I

1. $(S)\begin{cases} x'(t)+2y(t)=-2\sin t & (E_1) \\ 2x(t)-y'(t)=-2\cos t & (E_2) \end{cases}$ On dérive dans (E_1) $x''(t)+2y'(t)=-2\cos t$;

de (E_2) $y'(t)=2x(t)+2\cos t$ et on reporte dans (E_1) on obtient :

$x''(t)+4x(t)+4\cos t=-2\cos t \quad \Leftrightarrow x''(t)+4x(t)=-6\cos t \quad (E)$

2. La solution générale de (E) avec second membre nul est $x_0(t)=A\cos(2t)+B\sin(2t)$.

On recherche une solution particulière de (E) avec second membre sous la forme

$x_1(t)=a\cos t+b\sin t$

$x'_1(t)=-a\sin t+b\cos t$ et $x''_1(t)=-a\cos t-b\sin t$; on reporte dans (E) :

$-a\cos t-b\sin t+4a\cos t+4b\sin t=3a\cos t+3b\sin t=-6\cos t$; on identifie les coefficients :

$3a=-6 \quad et \quad 3b=0$. La solution particulière est donc $x_1(t)=-2\cos t$

La solution générale de (E) est $x(t)=A\cos(2t)+B\sin(2t)-2\cos t$.

On cherche $x'(t)=-2A\sin 2t+2B\cos 2t+2\sin t$, on reporte dans $x'(t)+2y(t)=-2\sin t \quad (E_1)$ et on a

$2y(t)=-2\sin t-x'(t)=-2\sin t+2A\sin 2t-2B\cos 2t-2\sin t$. $y(t)=A\sin 2t-B\cos 2t-2\sin t$.

3. solution particulière de (S) vérifiant les conditions initiales $x(0)=-1$ et $y(0)=0$.

$x(t)=A\cos(2t)+B\sin(2t)-2\cos t$ on pose $t=0$,on obtient : $x(0)=A\cos(0)+B\sin(0)-2\cos 0$

$x(0)=-1 \Rightarrow A-2=-1 \Rightarrow A=1$;

$y(t)=A\sin 2t-B\cos 2t-2\sin t$ on pose $t=0$,on obtient : $y(0)=A\sin 0-B\cos 0-2\sin 0$

$y(0)=0 \Rightarrow -2B=0$ donc $B=0$. D'où :

La solution du système est $\begin{cases} x(t)=\cos 2t-2\cos t \\ y(t)=\sin 2t-2\sin t \end{cases}$

II- $\begin{cases} x'(t)+2y(t)=-2\sin t \\ 2x(t)-y'(t)=-2\cos t \end{cases}$, $\mathcal{L}\left(\sin(t)\mathcal{U}(t)\right)=\dfrac{1}{p^2+1}$ et $\mathcal{L}\left(\cos t\,\mathcal{U}(t)\right)=\dfrac{p}{p^2+1}$;

$\mathcal{L}(x'(t))=pX(p)-x(0^+)$ $\mathcal{L}(y'(t))=pY(p)-y(0^+)$.

En appliquant la transformation de Laplace aux deux équations

différentielle. On obtient : $\begin{cases} pX(p)-x(0^+)+2Y(p)=-2\times\dfrac{1}{p^2+1} \\ 2X(p)-pY(p)-y(0^+)=-2\times\dfrac{p}{p^2+1} \end{cases}$, $x(0)=-1$ et $y(0)=0$.

Donc on obtient : $\begin{cases} pX(p)+2Y(p)=\dfrac{-2}{p^2+1}-1 \\ 2X(p)-pY(p)=\dfrac{-2p}{p^2+1} \end{cases}$.

2. Pour tout réel p, $\dfrac{2p}{p^2+1}-\dfrac{2p}{p^2+4}=\dfrac{2p(p^2+4-p^2-1)}{(p^2+1)(p^2+4)}=\dfrac{6p}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

3. Dans le système trouvé dans la question 1, on élimine $Y(p)$ en additionnant membre à membre

La première équation multipliée par p et la seconde multipliée par 2.

$\begin{cases} p^2X(p)+2pY(p)=\dfrac{-2p}{p^2+1}-p & \}\times p \\ 4X(p)-2pY(p)=\dfrac{-4p}{p^2+1} & \}\times 2 \end{cases}$, on obtient : $(p^2+4)X(p)=\dfrac{-2p}{p^2+1}-p+\dfrac{-4p}{p^2+1}=-p-\dfrac{6p}{p^2+1}$

et enfin $X(p) = -\dfrac{p}{(p^2+4)} - \dfrac{6p}{(p^2+1)(p^2+4)} = -\dfrac{p}{(p^2+4)} - \left(2\times\dfrac{p}{p^2+1} - 2\times\dfrac{p}{p^2+4}\right)$;

$$X(p) = -\frac{p}{(p^2+4)} - 2\times\frac{p}{p^2+1} + 2\times\frac{p}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+4} - 2\times\frac{p}{p^2+1}$$

On applique la formule $\mathcal{L}\left(\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)\right) = \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$ du formulaire avec $\omega = 1$et $\omega = 2$

Donc $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{p}{p^2+\omega^2}\right) = \cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$, de $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{p}{p^2+4} - 2\times\dfrac{p}{p^2+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{p}{p^2+4}\right) - 2\times\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{p}{p^2+1}\right)$

On obtient : $x(t) = \cos(2t)\mathcal{U}(t) - 2\cos t\,\mathcal{U}(t) = (\cos(2t) - 2\cos t)\mathcal{U}(t)$.

$$\begin{cases} pX(p) + 2Y(p) = \dfrac{-2}{p^2+1} - 1 & \times\{2 \\ 2X(p) - pY(p) = \dfrac{-2p}{p^2+1} & \times\{p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2pX(p) + 4Y(p) = \dfrac{-4}{p^2+1} - 2 \\ 2pX(p) - p^2Y(p) = \dfrac{-2p^2}{p^2+1} \end{cases}$$; par soustraction , on obtient :

$(p^2+4)Y(p) = \dfrac{-4}{p^2+1} - 2 + \dfrac{2p^2}{p^2+1} = -2 + \dfrac{2p^2-4}{p^2+1}$ et enfin : $Y(p) = -\dfrac{2}{p^2+4} + \dfrac{2p^2-4}{(p^2+4)(p^2+1)}$.

On transforme l'écriture de $Y(p)$, pour faire apparaître les dénominateurs :

$$\begin{aligned} 2\frac{p^2-2}{(p^2+4)(p^2+1)} &= 2\frac{2p^2+2-p^2-4}{(p^2+4)(p^2+1)} = 2\frac{2(p^2+1)-(p^2+4)}{(p^2+4)(p^2+1)} \\ &= 2\frac{2(p^2+1)}{(p^2+4)(p^2+1)} - 2\frac{(p^2+4)}{(p^2+4)(p^2+1)} \\ &= \frac{4}{p^2+4} - \frac{2}{(p^2+1)} = \frac{4}{p^2+4} - \frac{2}{p^2+1} \end{aligned},$$

On obtient donc $Y(p) = -\dfrac{2}{p^2+4} + \dfrac{4}{p^2+4} - \dfrac{2}{p^2+1} = \dfrac{2}{p^2+4} - \dfrac{2}{p^2+1}$.

On applique la formule $\mathcal{L}\left(\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)\right) = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$ du formulaire avec $\omega = 1$et $\omega = 2$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2}{p^2+4} - \dfrac{2}{p^2+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2}{p^2+4}\right) - 2\times\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p^2+1}\right)$. de $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\right) = \sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$,

on obtient : $y(t) = \sin(2t)\mathcal{U}(t) - 2\sin t\,\mathcal{U}(t) = (\sin(2t) - 2\sin t)\mathcal{U}(t)$.

II

1. $\begin{cases} f(-t) = \cos(-2t) - 2\cos(-t) = \cos(2t) - 2\cos(t) = f(t) \\ g(-t) = \sin(-2t) - 2\sin(-t) = -\sin(2t) + 2\sin t = -g(t) \end{cases}$,

on constate que les points les point M (t) et M$(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses pour tout $t \in [-\pi;\pi]$ .la courbe ($\mathcal{C}$) admet l'axes des abscisses pour axe de symétrie .

on pourra donc étudier les fonctions f et g sur l'intervalle $[0;\pi]$ et compléter le graphique par symétrie .

2. f est dérivable sur $[0;\pi]$ et sa dérivée est définie par :

$f'(t) = -2(\sin(2t) - \sin t) = -4\sin t\cos t + 2\sin t = 2\sin t(1 - 2\cos t)$;

b. sur $[0;\pi]$, $\sin t \geq 0$ donc $f'(t)$ est du singe de $1 - 2\cos t$ .dans l'intervalle $[0;\pi]$, la fonction cosinus est décroissante $1 - 2\cos t \geq 0 \Leftrightarrow \cos t \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos t \leq \cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{3} \leq t \leq \pi$

sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ $f'(t)\le 0$; f décroît et sur $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$, et sur $f'(t)\ge 0$ f croît .

second méthode :

Rappels : $\sin p-\sin q=2\left(\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\right)$. $\sin(2t)-\sin t=2\sin\left(\frac{2t-t}{2}\right)\cos\left(\frac{2t+t}{2}\right)=2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}\right)$

$$f'(t)=-2(\sin(2t)-\sin t)=-2\times 2\sin\left(\frac{2t-t}{2}\right)\cos\left(\frac{2t+t}{2}\right)=-4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}\right)$$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow -4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}\right)=0\Leftrightarrow \sin\left(\frac{t}{2}\right)=0 \quad ou \quad \cos\left(\frac{3t}{2}\right)=0$$

$\sin\left(\frac{t}{2}\right)=0 \quad\Leftrightarrow \sin\left(\frac{t}{2}\right)=\sin 0 \quad\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{t}{2}=0+2k\pi\\ \frac{t}{2}=\pi+2k\pi\end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases}t=0+4k\pi\\ t=2\pi+4k\pi\end{cases}$, or $t\in[0;\pi]$, donc $t=0$

$\cos\left(\frac{3t}{2}\right)=0 \quad\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3t}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{3t}{2}=\left(\frac{\pi}{2}\right)+2k\pi\\ \frac{3t}{2}=-\left(\frac{\pi}{2}\right)+2k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=\frac{\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3}\\ t=-\frac{\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3}\end{cases}$, or $t\in[0;\pi]$,

donc $t=\pi$ et $t=\frac{\pi}{3}$ $(k=0 \quad et \quad k=1)$.

$t\in[0;\pi]\Rightarrow \frac{t}{2}\in[0;\pi/2]$, donc $\sin\left(\frac{t}{2}\right)>0$ pour $t\in[0;\pi]$.

$t\in[0;\pi/3]\Rightarrow \frac{3t}{2}\in[0;\pi/2]$, donc $\cos\left(\frac{3t}{2}\right)>0$ pour $t\in[0;\pi/3]$.

$t\in[\pi/3;\pi]\Rightarrow \frac{3t}{2}\in[\pi/2;3\pi/2]$, donc $\cos\left(\frac{3t}{2}\right)<0$ pour $t\in[\pi/3;\pi]$.

t	0		$\pi/3$		π
$\sin\left(\frac{t}{2}\right)$	0	$+$	$1/2$	$+$	0
$\cos\left(\frac{3t}{2}\right)$	1	$+$	0	$-$	0
-4		$-$		$-$	
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(t)$	-1	$\searrow$	$-3/2$	$\nearrow$	3

3. g est dérivable sur $[0;\pi]$ et sa dérivée vérifie : $g'(t)=2\cos 2t-2\cos t$, on applique la formule

$\cos 2t=2\cos^2 t-1$. $g'(t)=2(2\cos^2 t-1)-2\cos t=2(2\cos^2 t-2\cos t-1)$

La dérivée s'annule si $\cos t=1$,On peut factoriser $g'(t)$ par $\cos t-1$ $g'(t)=2(\cos t-1)(2\cos t+1)$

b. Sachant que $-1\le\cos t\le 1$, on déduit $\cos t-1\le 0$, donc $g'(t)$ est du signe contraire de $2\cos t+1$.

$g'(t)\ge 0\Leftrightarrow 2\cos t+1\le 0\Leftrightarrow \cos t\le\frac{1}{2}$.Dans l'intervalle $[0;\pi]$ la fonction cosinus est décroissante ,

l'inéquation se traduit par $t\ge\frac{2\pi}{3}$.Donc sur $[0;\pi]$: si $t\in\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$, $g'(t)\ge 0$; g croît et si $t\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$,

$g'(t)\le 0$, g décroît.

2ème méthode :

$\cos p-\cos q=-2\left(\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\right)$. $2\cos 2t-2\cos t=2(\cos 2t-\cos t)$

$\cos 2t-\cos t=-2\left(\sin\left(\frac{2t-t}{2}\right)\sin\left(\frac{2t+t}{2}\right)\right)=-2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{3t}{2}\right)$ et enfin $g'(t)=-4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{3t}{2}\right)$

$t \in [0;\pi] \Rightarrow \frac{t}{2} \in [0;\pi/2]$, donc $\sin\left(\frac{t}{2}\right) > 0$ pour $t \in [0;\pi]$.

$t \in [0;2\pi/3] \Rightarrow \frac{3t}{2} \in [0;\pi]$, donc $\sin\left(\frac{3t}{2}\right) > 0$ pour $t \in [0;2\pi/3]$.

$t \in [2\pi/3;\pi] \Rightarrow \frac{3t}{2} \in [\pi;3\pi/2]$, donc $\sin\left(\frac{3t}{2}\right) < 0$ pour $t \in [2\pi/3;\pi]$.

4.tableau de variation :

t	0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	$2\sqrt{3}$	$+$	0
$f(t)$	-1	↘	$-3/2$	↗	$1/2$	↗	3
$g'(t)$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$	4
$g(t)$	0	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$\frac{-3\sqrt{3}}{2}$	↗	0
Points	A		B		C		D

5. Aux points B et D correspondants respectivement à $t_B = \frac{\pi}{3}$; et $t_D = \pi$:

si $t = \pi/3$,alors $f'(\pi/3) = 0$ et $g'(\pi/3) = -4\sin(\pi/6)\sin(\pi/2) = -2 \neq 0$

si $t = \pi$,alors $f'(\pi) = 0$ et $g'(\pi) = -4\sin(\pi/2)\sin(3\pi/2) = 4 \neq 0$

la dérivée de *f* s'annule mais pas la dérivée de g , en chacun de ces points la tangente admet pour vecteur directeur colinéaire au vecteur $\vec{j}$.

En B et D la tangente à (C)est parallèle à l'axe des ordonnées.

si $t = 2\pi/3$,alors $f'(2\pi/3) = -4\sin(\pi/3)\cos(\pi) = 2\sqrt{3} \neq 0$ et $g'(2\pi/3) = 0$ .Au point C correspondant à $t_C = \frac{2\pi}{3}$,

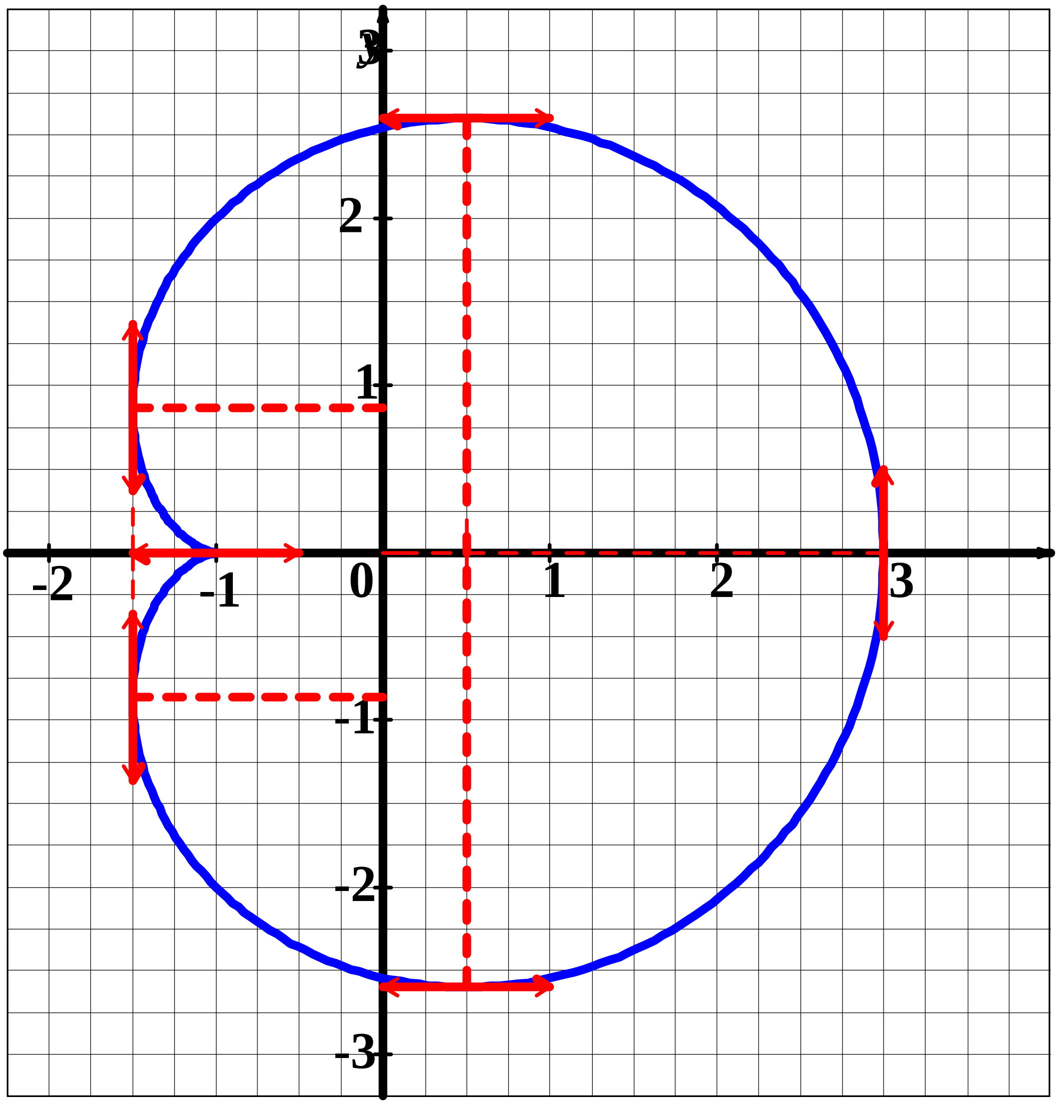
la dérivée de g s'annule mais pas celle de *f*.

la tangente en C à la courbe (C)admet pour vecteur directeur colinéaire à $\vec{i}$.

En C la tangente à (C)est parallèle à l'axe des abscisses.

6. l'étude précédente permet de tracer l'arc de courbe correspondant à l'intervalle $\left[0;\pi\right]$.la symétrie par rapport à l'axe des abscisses permettra de tracer la courbe (C)en entier .

on a admis , dans le texte , que la tangente en A est confondue avec l'axe de abscisses.


y
2
1
-1
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3