THEME : SERIES DE FOURIER TP MATHEMATIQUES

Exercice 1. bts-2005

1. Soit la fonction numérique g définie sur $\left[0\,;\pi\right]$ par $g(t)=(1+\cos 2t)\sin^2 t$.

(a) Montrer que $g'(t)=4\sin t\cos^3 t$.

(b) En déduire les variations de g sur $\left[0\,;\pi\right]$

2. Soit la fonction numérique f définie sur R, paire, périodique de période 1 telle que :

$\begin{cases} f(t)=1/2-\tau & si\ 0\le t\le \tau \\ f(t)=-\tau & si\ \tau\le t\le 1/2 \end{cases}$ où τ est un nombre réel tel que $0<\tau<2$

(a) Uniquement dans cette question, on prendra $\tau=\dfrac{1}{6}$.

Représenter la fonction f sur l'intervalle [-1; 1] dans un repère orthonormal.

(b) On admet que la fonction f satisfait aux conditions de Dirichlet.

Soit S le développement en série de Fourier associé à la fonction f .

Montrer que : $S(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\sin(2n\pi\tau)\cos(2\pi nt)$

3. On décide de ne conserver que les harmoniques de rang inférieur ou égal à 2.

Soit la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(t)=\dfrac{1}{\pi}\sin(2\pi\tau)\cos(2\pi t)+\dfrac{1}{2\pi}\sin(4\pi\tau)\cos(4\pi t)$

On désigne par E_h^2 le carré de la valeur efficace de h sur une période.

(a) A l'aide de la formule de Parseval, déterminer E_h^2.

(b) Montrer que $E_h^2=\dfrac{1}{2\pi^2}g(2\pi\tau)$.

4. Déterminer la valeur de τ rendant E_h^2 maximal.

Exercice 2-bts-2003

A. Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales : $I_n=\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nx)dx$ et $J_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}x\cos(nx)dx$.

1°) Montrer que $I_n=\dfrac{-1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

2°) A l'aide d'une intégration par parties , montrer que $J_n=\dfrac{\pi}{2n}\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)+\dfrac{1}{n^2}\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)-\dfrac{1}{n^2}$

3°) Déterminer I_1 ; I_2 *et* I_3, puis J_1 ; J_2 *et* J_3

B. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2π telle que $\begin{cases} f(t)=\dfrac{2E}{\pi}t & si\ 0\le t\le \dfrac{\pi}{2} \\ f(t)=E & si\ \dfrac{\pi}{2}\le t\le \pi \end{cases}$

où E est un nombre réel donné, strictement positif.

1°) Tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\pi\,;3\pi\right]$.

(on prendra E = 2 uniquement pour construire la courbe représentant f).

2°) Soit a_0 et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, a_n et b_n les coefficients de Fourier associés f .

a) Calculer a_0 .

b) Pour tout $n\ge 1$, donner la valeur de b_n .

c) En utilisant la partie A, vérifier que pour tout $n\ge 1$, $a_n=\dfrac{2E}{\pi^2}\left(2J_n+\pi I_n\right)$.

Partie C

1°) Déterminer les coefficients a_1, a_2 , a_3 .

2°) Calculer F^2, carré de la valeur efficace de la fonction f sur une période.

On rappelle que dans le cas où f est paire, périodique de période T, on a: $F^2 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt$

3°) On sait par ailleurs que la formule de Bessel-Parseval donne : $F^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$

Soit P le nombre défini par $P = a_0^2 + \frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$.

Calculer P , puis donner la valeur décimale au millième du $\frac{P}{F^2}$.

Ce dernier résultat très proche de 1 justifie que dans la pratique , on peut négliger les harmonique d'ordre supérieur à 3.

<u>Exercice 3 -Toutes spécialités</u> <u>2006</u>. Les parties A et B sont indépendantes.

<u>Partie A</u>

Soient α et β deux nombres réels.

Soit f une fonction périodique de période 1, définie sur l'intervalle [0; 1[par $f(t) = \alpha t + \beta$.

On appelle a_0, a_n et b_n les coefficients de Fourier associés à la fonction f.

1. Montrer que $a_0 = \frac{\alpha}{2} + \beta$.

2. Montrer que $b_n = \frac{-\alpha}{n\pi}$ pour tout nombre entier naturel n non nul.

   On admet que $a_n = 0$ pour tout entier naturel n non nul.

3. On se propose de déterminer les nombres réels α et β pour que le développement S en série de Fourier de la fonction f soit défini pour tout nombre réel t par $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\left(2\pi nt\right)$.

(a) Déterminer les nombres réels α et β tels que $a_0 = 0$ et $b_n = \frac{1}{n}$.

En déduire l'expression de la fonction f .

(b) Représenter la fonction f sur l'intervalle [-2 ; 2] dans un repère orthogonal.

<u>Partie B</u>

On veut résoudre l'équation différentielle : $s''(t) + s(t) = f(t)$

On admet que l'on obtient une bonne approximation de la fonction s en remplaçant f(t) par les premiers termes du développement en série de Fourier de la fonction f obtenus dans la partie A, c'est-à-dire par :

$f(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi t)$

Soit (E) l'équation différentielle ; $s''(t) + s(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi t)$

1. Vérifier que la fonction s_1 définie pour tout nombre réel t par : $s_1(t) = \frac{1}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)$ est solution de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E).

Corrigé

Exercice 1-2005 -bts

1. Soit la fonction numérique g définie sur $\left[0\,;\pi\right]$ par $g(t)=(1+\cos 2t)\sin^2 t$.

(a) Calculons $g'(t)$:
$$g'(t)=-2\sin t\cos t\sin^2 t+(1+\cos^2 t)2\sin t\cos t=2\sin t\cos t(-\sin^2 t+1+\cos^2 t)$$
$$=2\sin t\cos t(\cos^2 t+\cos^2 t)=4\sin t\cos^3 t$$

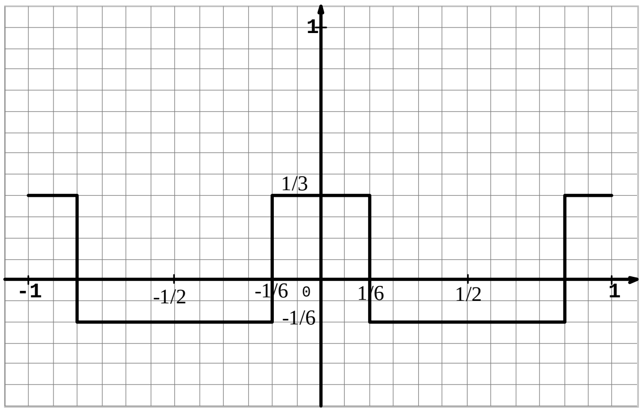
(b) Sur $\left[0\,;\pi\right]$, la fonction sinus est positive, par conséquent $g'(t)$ est du signe de $\cos t$.

Si $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$: $g'(t)>0$ donc g est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Si $t\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$: $g'(t<0$ donc g est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

2. (a) Dans cette question, on a : $f(t)=\frac{1}{3}$ sur $\left[0;\frac{1}{6}\right[$ et $f(t)=-\frac{1}{6}$ sur $\left[\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right]$

Avec la parité de la fonction f, on peut tracer la courbe sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ en utilisant la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. De plus, la fonction f est périodique de période 1, donc on obtient la représentation ci-contre :



(b) Calculons les coefficients de Fourier de la fonction f :

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)dt=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}f(t)dt$$
$$=2\left[\int_0^{\tau}\left(\frac{1}{2}-\tau\right)dt+\int_{\tau}^{1/2}\left(-\tau\right)dt\right]$$
$$=2\left[\left(\frac{1}{2}-\tau\right).\tau+(-\tau).\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\right]=0$$

Pour $n\geq 1$, on a : $a_n=\frac{2}{T}\int_a^{a+T}f(t)\cos ntdt=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos 2n\pi t\,dt=\frac{4}{T}\int_0^{\pi}f(t)\cos 2n\pi tdt$

$$a_n=4\left[\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\cos 2n\pi tdt+\int_0^{\pi}\left(-\tau\right)\cos 2n\pi tdt\right]=4\left[\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\left[\frac{\sin 2n\pi t}{2n\pi}\right]_0^{\tau}+(-\tau)\left[\frac{\sin 2n\pi t}{2n\pi}\right]_{\tau}^{1/2}\right]$$

$$a_n=4\left[\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\left[\frac{\sin 2n\pi t}{2n\pi}\right]_0^{\tau}+(-\tau)\left[\frac{\sin 2n\pi t}{2n\pi}\right]_{\tau}^{1/2}\right]=\frac{2}{n\pi}\left[\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\sin 2n\pi\tau-\tau\sin n\pi+\sin(2n\pi\tau)\right]$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\sin 2n\pi\tau+\sin(2n\pi\tau)\right]=\frac{1}{n\pi}\sin 2n\pi\tau$$

Pour $n\geq 1$, on a $b_n=0$ car la fonction f est paire .On obtient donc $S(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2\pi nt)$

$$S(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\sin(2n\pi\tau)\cos(2\pi nt).$$

3. Ecrivons la formule de Parseval : $E^2=a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$ .On sait que $a_0=0$; calculons a_1 et a_2 :

$a_1=\frac{1}{\pi}\sin(2\pi\tau)$ et $a_2=\frac{1}{\pi}\sin(4\pi\tau)$. On a donc :

$$E_h^{\,2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi^2}\sin^2(2\pi\tau)+\frac{1}{4\pi^2}\sin^2(4\pi\tau)\right]=\frac{1}{2\pi^2}\left[\sin^2(2\pi\tau)+\frac{1}{4}\sin^2(4\pi\tau)\right]$$, de plus, on sait que : $\sin(2u)=2\sin u\cos u$.

Donc on peut écrire : $\sin^2(4\pi\tau)=4\sin^2\left(2n\pi\tau\right)\cos^2\left(2n\pi\tau\right)$.

$$E_h^{\,2}=\frac{1}{2\pi^2}\left[\sin^2(2\pi\tau)+\frac{1}{4}\sin^2(4\pi\tau)\right]=\frac{1}{2\pi^2}\left[\sin^2(2\pi\tau)+\sin^2(2\pi\tau)\cos^2(2\pi t)\right]=\frac{1}{2\pi^2}\left[\sin^2(2\pi\tau)\left(1+\cos^2(2\pi t)\right)\right].$$

$$E_h^{\,2}=\frac{1}{2\pi^2}\left[\sin^2(2\pi\tau)\left(1+\cos^2(2\pi t)\right)\right]=\frac{1}{2\pi^2}g(2\pi\tau).$$

4. D'après la question 1 . b) , l'expression $g(t)$ est maximum pour $\frac{\pi}{2}$.

Par conséquent $E_h^{\,2}$ est maximum pour : $2\pi\tau=\frac{\pi}{2}$, d'où $\tau=\frac{1}{4}$.

Exercice-2 –bts-2003

1.Calculons I_n : $I_n=\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nx)dx=\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_{\pi/2}^{\pi}=\frac{1}{n}\sin\pi-\frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$.

On obtient : $I_1=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$; $I_2=-\frac{1}{2}\sin\pi=0$ et $I_3=-\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}=\frac{1}{3}$.

On intègre par parties, en posant : $u(x)=x$ $u'(x)=1$; $v'(x)=\cos nx$ $v(x)=\frac{1}{n}\sin(nx)$ avec $n\in N$

Donc : $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos nx\,dx=\left[\frac{x}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi/2}-\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nx\,dx=\left[\frac{x}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi/2}+\left[\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi/2}$

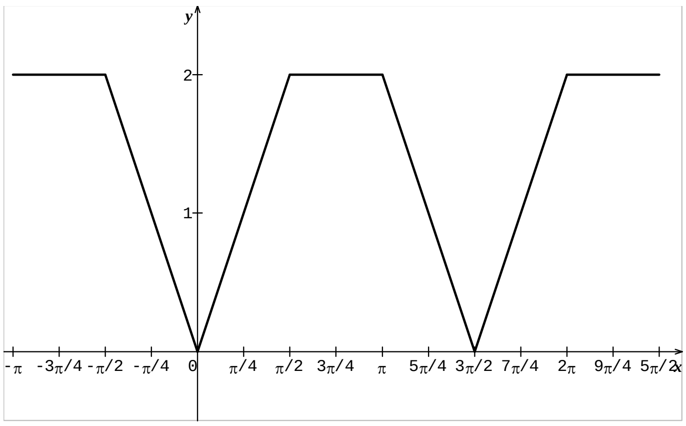
$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos nx\,dx=\frac{\pi}{2n}\sin(\frac{n\pi}{2})-0+\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\cos 0=\frac{\pi}{2n}\sin(\frac{n\pi}{2})+\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}$$

D'où : $J_n=\frac{\pi}{2n}\sin(\frac{n\pi}{2})+\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}$. On obtient : $J_1=\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2})+\cos\frac{\pi}{2}-1=\frac{\pi}{2}-1$

$J_2=\frac{\pi}{4}\sin(\pi)+\frac{1}{4}\cos\pi-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$; $J_3=\frac{\pi}{6}\sin(\frac{3\pi}{2})+\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{9}=-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{9}$.

Partie B

1.représentation graphique de la fonction f .



2.a. Calculons a_0 :

$a_0=\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\,dt$, car f est paire et 2π -périodique ; donc :

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{2E}{\pi}t\,dt+\int_0^{\pi/2}Edt\right].$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2E}{\pi}\frac{t^2}{2}+Et\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2E}{\pi}\frac{\pi^2}{8}+E\frac{\pi}{2}\right]=\frac{1}{\pi}\left(\frac{3E\pi}{4}\right)=\frac{3E}{4}$$

b. la fonction f est paire donc pour tout entier $n\geq 1$, on a $b_n=0$.

c. Calculons a_n, pour $n\geq 1$: $a_n=\frac{2}{T}\int_a^{a+T}f(t)\cos ntdt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos ntdt$.

Car $t\mapsto f(t)\cos nt$ est paire ; donc $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{2E}{\pi}t\cos ntdt+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}E\cos ntdt=\frac{4E}{\pi^2}J_n+\frac{2E}{\pi}I_n$

et $a_n=\frac{2E}{\pi^2}\left(2J_n+\pi I_n\right)$.Calculons $a_{4p}=\frac{2E}{\pi^2}\left(2J_{4p}+\pi I_{4p}\right)=0$, puisque $I_{4p}=-\frac{1}{4p}\sin\frac{4p\pi}{2}=-\frac{1}{4p}\sin 2p\pi=0$

et $J_{4p}=\frac{\pi}{8p}\sin(2p\pi)+\frac{1}{16p^2}\cos 2p\pi-\frac{1}{16p^2}=0+\frac{1}{16p^2}-\frac{1}{16p^2}=0$.

Partie C

1. calculons a_1, a_2, a_3 : $a_1=\frac{2E}{\pi^2}\left(2J_1+\pi I_1\right)=\frac{2E}{\pi^2}\left(2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\pi\right)=-\frac{4E}{\pi^2}$

$$a_2=\frac{2E}{\pi^2}\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi\times 0\right)=\frac{-2E}{\pi^2}\quad \text{et}\quad a_3=\frac{2E}{\pi^2}\left(2J_3+\pi I_3\right)=\frac{2E}{\pi^2}\left(2\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{9}\right)+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2E}{\pi^2}\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{2}{9}+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{4E}{9\pi^2}.$$

Calculons F^2 :

$$F^2=V^2eff=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}f(t)^2dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}f(t)^2dt=\frac{1}{\pi}\left[\frac{4E^2}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}t^2dt+\int_0^{\pi/2}E^2dt\right]=\frac{4E^2}{\pi^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi/2}+\frac{1}{\pi}\left[E^2t\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{4E^2\pi^3}{24\pi^3}+\frac{1}{\pi}E^2\frac{\pi}{2}=\frac{E^2}{6}+\frac{E^2}{2}=\frac{2E^2}{3}$$

3.Calculons P : $P=a_0^2+\frac{1}{2}\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)=\left(\frac{9E^2}{16}\right)+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{16E^2}{\pi^4}\right)+\left(\frac{4E^2}{\pi^4}\right)+\left(\frac{16E^2}{81\pi^4}\right)\right]=\frac{9E^2}{16}+\frac{818E^2}{81\pi^4}$.

Calculons $\frac{P}{F^2}$: $\frac{P}{F^2}=\left(\frac{9E^2}{16}+\frac{818E^2}{81\pi^4}\right)\times\frac{3}{2E^2}=\frac{37}{32}+\frac{409}{27\pi^4}\approx 0{,}999$.

Exercice 3-BTS-2006

1. $a_0=\frac{1}{T}\int_0^T\left(\alpha t+\beta\right)dt=\left[\alpha\frac{t^2}{2}+\beta t\right]_0^1=\frac{\alpha}{2}+\beta$ avec $T=1$.

2. La pulsation est $\omega=2\pi$ $b_n=\frac{2}{T}\int_0^T\left(\alpha t+\beta\right)\sin(2\pi nt)dt=2\int_0^1\left(\alpha t+\beta\right)\sin(2\pi nt)dt$ avec $T=1$.

On intègre par parties en posant : $u(t)=\alpha t+\beta$, alors $u'(t)=\alpha$; $v'(t)=\sin(2\pi nt)$, alors $v(t)=-\frac{1}{2\pi n}\cos(2\pi nt)$

$$b_n=2\int_0^1\left(\alpha t+\beta\right)\sin(2\pi nt)dt=2\left(-\left[\frac{\left(\alpha t+\beta\right)\cos(2\pi nt)}{2\pi n}\right]_0^1+\frac{\alpha}{2\pi n}\int_0^1\cos(2\pi nt)dt\right)$$

D'où

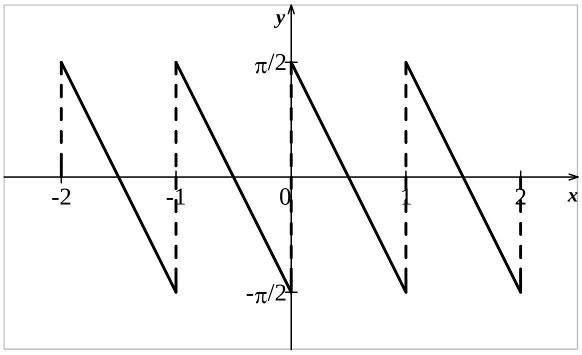
$$b_n=2\left(\frac{-1}{2\pi n}\left[\left(\alpha+\beta\right)-\beta\right]+\frac{\alpha}{2\pi n}\left[\frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n}\right]_0^1\right)$$

et $b_n=2\left(\frac{-\alpha}{2\pi n}+0\right)=\frac{-\alpha}{\pi n}$.

3.a. On veut que $a_0=0$ et $b_n=\frac{1}{n}$, donc d'après 3. on a : $\begin{cases}\frac{\alpha}{2}+\beta=0\\ \frac{-\alpha}{n\pi}=\frac{1}{n}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\pi\\ \beta=\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

L'expression de f est alors $f(t)=-\pi t+\frac{\pi}{2}$.

b. on construit alors la courbe représentative de f sur $[-2;2]$.



Partie B

1.a on a : $s_1(t)=\frac{1}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t)+\frac{1}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)$;

$$s'_1(t)=\frac{2\pi}{1-4\pi^2}\cos(2\pi t)+\frac{4\pi}{2(1-16\pi^2)}\cos(4\pi t)$$

$$s''_1(t)=-\frac{4\pi^2}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t)-\frac{16\pi^2}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)\ .$$

$$s_1''(t)+s_1(t)=-\frac{4\pi^2}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t)-\frac{16\pi^2}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)+\frac{1}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t)+\frac{1}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)$$

$$=\frac{1-4\pi^2}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t)+\frac{1-16\pi^2}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)=\sin(2\pi t)+\frac{1}{2}\sin(4\pi t).$$

Par conséquent s_1 est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Il faut chercher la solution générale de l'équation différentielle homogène associée à (E) : $s''(t)+s(t)=0$.

L'équation caractéristique associée est $r^2+1=0$, dont le discriminant est égal à -1 . cette équation possède deux racine complexes conjuguées qui sont j et $-j$.

La solution générale de l'équation homogène est alors : $s_0(t)=\lambda\sin t+\mu\cos t$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\mu\in\mathbb{R}$.

La solution générale de (E) est donnée par la somme entre une solution particulière de l'équation complète et la solution générale de l'équation homogène associée , d'où :

$$s(t)=s_0(t)+s_1(t)$$

$$s_0(t)=\lambda\sin t+\mu\cos t \qquad s(t)=\lambda\sin t+\mu\cos t+\frac{1}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t)+\frac{1}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t).$$