TP MATHEMATIQUES TRANSFORMEE DE FOURIER

Exercice 1 9 points-

On considère la fonction numérique paire, 2π-périodique, définie sur l'intervalle $[0;\pi]$ par :

$$\begin{cases} f(t)=\cos t \quad si \ \ 0\le t\le \pi/2 \\ f(t)=0 \qquad si \ \ \pi/2\le t\le \pi \end{cases}$$

On a tracé en pointillé sur le document-réponse la courbe représentative de la fonction cosinus sur l'intervalle $[-\pi;3\pi]$

1. Représenter. sur le document réponse à rendre avec la copie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi;3\pi]$.
2. On admet que la fonction f satisfait aux conditions d'application du théorème de Dirichlet et, par conséquent qu'elle est décomposable en série de Fourier.
   On note : $S(t)=a_0+\sum_{n\ge 1}\left[a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\right]$ la série de Fourier associée à la fonction f .

a. Donner la valeur de b_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

b. Calculer a_0.

c. Calculer a_1.

d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $a_n=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\left[(n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{n-1}+\frac{\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{n+1}\right)$

3. On note $S_1(t)$ la série de Fourier associée à la fonction f . tronquée au rang 1.
   On a donc : $S_1(t)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos t$
   À partir de la courbe représentative de la fonction cosinus tracer sur le document réponse la courbe représentant la fonction S_1 sur l'intervalle $[-\pi;3\pi]$. On laissera figurer les tracés intermédiaires.

Exercice 2 : 10 points-

On désigne par α un nombre réel positif tel que $0<\alpha<\pi/2$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2π, telle que :

$$\begin{cases} f(t)=1 \quad si \ 0\le t\le \alpha \\ f(t)=0 \quad si \ \ \alpha<t<\pi-\alpha \\ f(t)=-1 \quad si \ \ \pi-\alpha\le t\le \pi \end{cases}$$

1. Dans cette question, le nombre réel α vaut $\pi/3$.
   Dans un repère orthogonal, représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$
2. On appelle S la série de Fourier associée à la fonction f.
   On note $S(t)=a_0+\sum_{n\ge 1}\left[a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\right]$
   Le but de cette question est de calculer les coefficients de la série de Fourier S pour une valeur t quelconque du nombre réel α tel que $0<\alpha<\pi/2$

a. Calculer a_0, valeur moyenne de la fonction f sur une période.

b. Déterminer b_n, n désignant un nombre entier naturel strictement positif.

c. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a : $a_n=\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\sin(n\alpha)$

3. Déterminer la valeur α_0 de α pour laquelle on $a_3=0$.
4. Pour toute la suite de l'exercice, on se place dans le cas où $\alpha=\frac{\pi}{3}$

Rappels :
Si h désigne une fonction périodique de période T , le carré de la valeur efficace H de la fonction h sur une période est : $H^2 = \frac{1}{T}\int_r^{r+T}[h(t)]^2 dt$. r désignant un nombre réel quelconque. Si les coefficients de Fourier de la fonction h sont a_0, a_n et b_n alors : $H^2 = \frac{1}{T}\int_r^{r+T}[h(t)]^2 dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$ formule de Parseval .

a. Calculer F^2, carré de la valeur efficace de la fonction f sur une période.
b. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g par : $g(t) = a_0 + a_1\cos t + b_1 \sin t + a_2\cos(2t) + b_2\sin(2t)$

Montrer que $g(t) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\cos(t)$ pour tout nombre réel t .

c. Calculer G^2,carré de la valeur efficace de la fonction g sur une période.
d. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du quotient $\frac{G^2}{F^2}$

Ce dernier résultat montre que la fonction g constitue une assez bonne approximation de la fonction f .

<u>Exercice 3 : 8 points</u>

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, et telle que : $\begin{cases}\varphi(t) = t & si\ 0 \le t < \pi \\ \varphi(t) = 0 & si\ \pi \le t < 2\pi\end{cases}$

On note $S(t)$ le développement de Fourier associé à la fonction φ, les coefficients de Fourier associés à la fonction φ sont notés a_0, a_n et b_n où n est un nombre entier naturel non nul.

1. Représenter graphiquement la fonction φ sur l'intervalle $[-2\pi ; 4\pi]$.
   a. Calculer a_0, la valeur moyenne de la fonction φ sur une période.
   b. On rappelle que pour une fonction f , périodique de période T le carré de la valeur efficace sur une période est donné par : $\mu_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2 dt$

   Montrer que μ_{eff}^2 le carré de la valeur efficace de la fonction sur une période est égal à $\frac{\pi^2}{6}$

2. Montrer que pour tout nombre entier $n > 1$, on a : $a_n = \frac{1}{\pi n^2}\left[\cos(n\pi) - 1\right]$.

   On admet que, pour tout nombre entier $n > 1$, on a : $b_n = -\frac{\cos(n\pi)}{n}$.

3. On considère la fonction S_3 définie sur $\mathbb{R}$ par : $S_3(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{3}\left[a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\right]$ où les nombres a_0, a_n et b_n sont les coefficients de Fourier associes à la fonction φ définie précédemment.

a. Recopier et compléter le tableau avec les valeurs exactes des coefficients demandés.

a_0	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
					$-\frac{2}{9\pi}$	$\frac{1}{3}$

b. Calculer la valeur exacte de $S_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ puis donner la valeur approchée de $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) - S_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ arrondie à 10^{-2} .

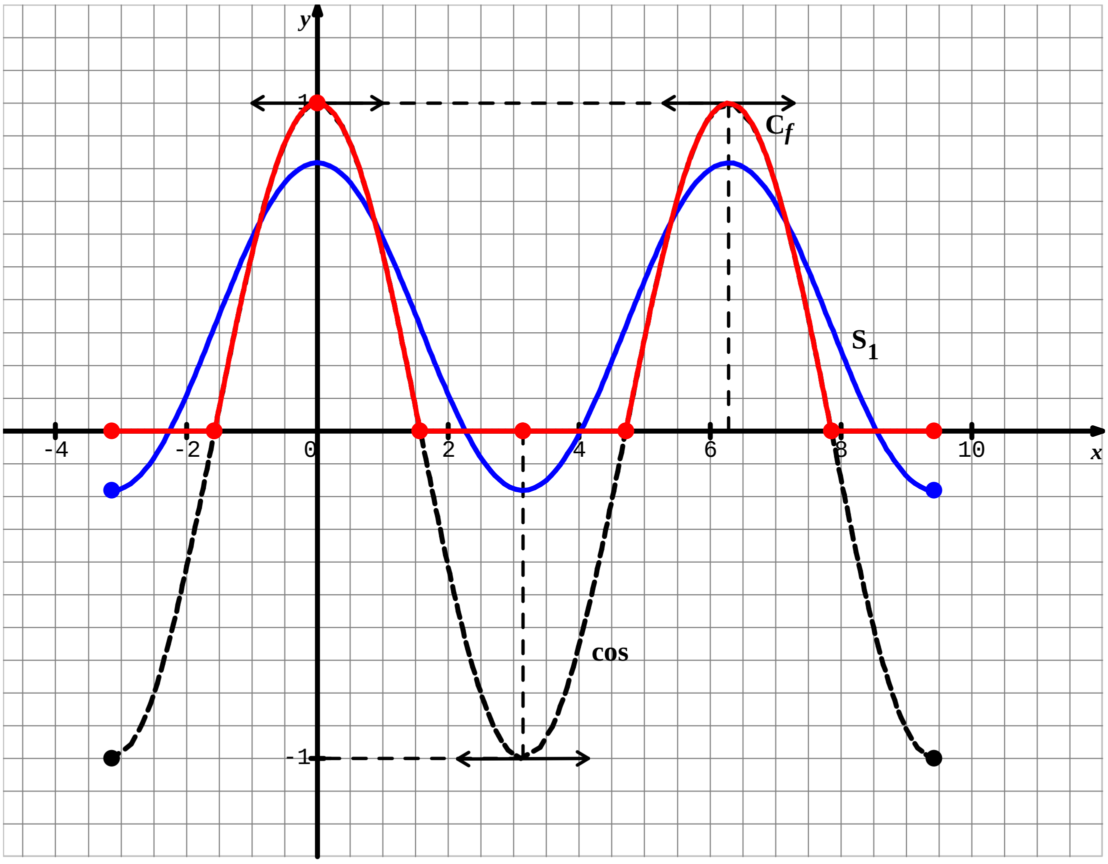
4. On rappelle que la formule de Parseval permettant de calculer le carré de la valeur efficace μ_3^2 de la fonction S_3 est : $\mu_3^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\left(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2\right)$.

3.a. Calculer la valeur exacte de μ_3^2.

b. Calculer la valeur approchée de $\frac{\mu_3^2}{\mu_{eff}^2}$ arrondie à 10^{-2}.

Corrigé

Exercice 1



La fonction f est paire donc les coefficients $b_n = 0$ sont tous nuls .

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt = \frac{1}{\pi}[\sin t]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos t\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\cos t)^2\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{\pi}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

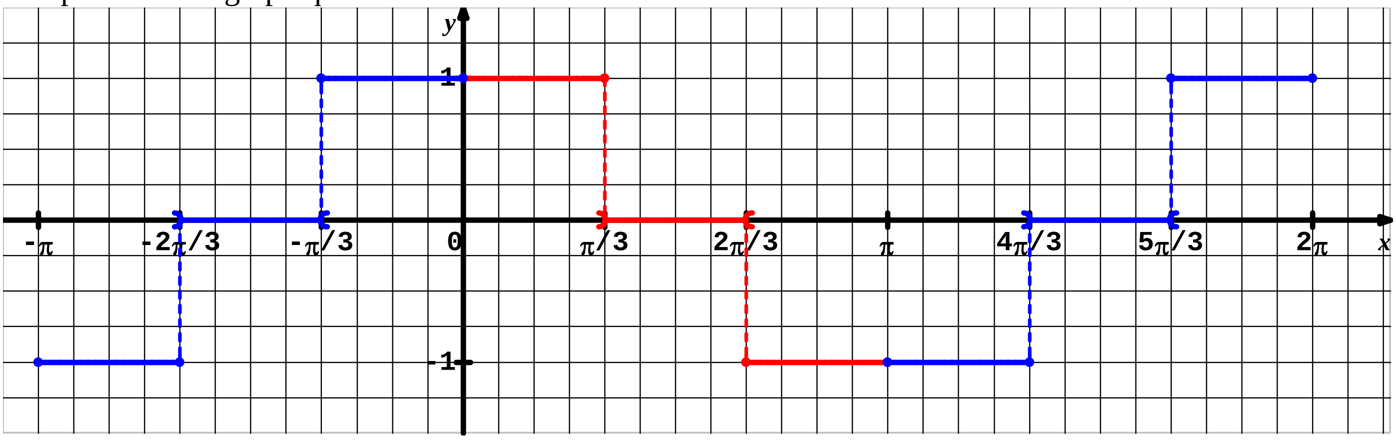
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\cos t\cos(nt)\,dt\right) = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\cos t\cos(nt)\,dt\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\cos((n+1)t) + \cos((n-1)t)\,dt\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)t}{n+1}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n-1)t}{n-1}\right]_0^{\pi/2}$$

Donc $a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\left[(n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{n-1} + \frac{\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{n+1}\right)$

Exercice 2

1. représentation graphique



$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha}1\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}0\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\pi-\alpha}^{\pi}-1\,dt=\frac{1}{\pi}[t]_0^{\alpha}-\frac{1}{\pi}[t]_{\pi-\alpha}^{\pi}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}(\alpha-\pi+\pi-\alpha)=0$$

La fonction f est paire donc les coefficients $b_n=0$ sont tous nuls .

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt\right)$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt\right)=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\alpha}\cos(nt)\,dt\right)+\frac{2}{\pi}\left(\int_{\pi-\alpha}^{\pi}(-1)\cos(nt)\,dt\right)=\frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\alpha}-\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{\pi-\alpha}^{\pi}\right)$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(n\alpha)}{n}+\frac{\sin n(\pi-\alpha))}{n}\right)=\frac{2}{n\pi}\left(\sin(n\alpha)+(\sin n\pi\cos n\alpha-\cos(n\pi)\sin(n\alpha)\right)=\frac{2}{n\pi}\left(\sin(n\alpha)-(-1)^n\sin(n\alpha)\right)$$

$$a_n=\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\sin(n\alpha)\ ;\ a_3=\frac{2}{3\pi}[1+1]\sin(3\alpha)=\frac{4}{3\pi}\sin(3\alpha)=0$$

$$\sin(3\alpha)=0\Leftrightarrow\begin{cases}3\alpha=0+2k\pi\\3\alpha=\pi+2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0+\dfrac{2k\pi}{3}\\\alpha=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2k\pi}{3}\end{cases},\text{ or }0<\alpha<\pi/2\text{ , donc }\alpha=\alpha_0=\frac{\pi}{3}.$$

$$F^2=\frac{1}{T}\int_0^T[f(t)]^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(t))^2\,dt=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}f(t)^2\,dt=\frac{1}{\pi}\left([t]_0^{\pi/3}+[t]_{2\pi/3}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}+\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

$$g(t)=a_0+a_1\cos t+b_1\sin t+a_2\cos(2t)+b_2\sin(2t)\quad a_0=a_2=b_1=b_2=0$$

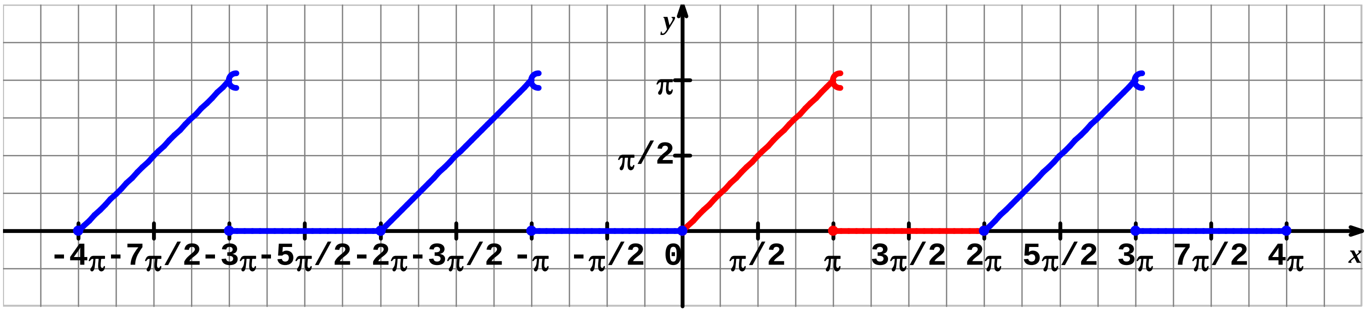
$$a_1=\frac{2}{\pi}[1+1]\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{2\pi}=\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\ ;\ a_2=\frac{2}{2\pi}[1-1]\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=0\text{ , donc on obtient }g(t)=\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\cos(t).$$

$$G^2=\frac{1}{T}\int_0^T[g(t)]^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\cos t\right)^2dt=\frac{12}{2\pi^3}\int_0^{2\pi}\cos(t)^2\,dt=\frac{6}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt=\frac{6}{\pi^3}\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin(2t)\right)_0^{2\pi}=\frac{6}{\pi^3}\times\frac{2\pi}{2}=\frac{6}{\pi^2}$$

$$\frac{G^2}{F^2}=\frac{6/\pi^2}{2/3}=\frac{6}{\pi^2}\times\frac{3}{2}=\frac{9}{\pi^2}\approx 0{,}91189$$

Exercice 3

La représentation graphique de f a été obtenue en représentant la fonction $t\mapsto t$ sur l'intervalle $[0,2\pi]$ et en dupliquant le segment obtenu par translations de vecteurs $\pm 2\pi\vec{i}$.



2. La série de Fourier associée à f est : $a_0 + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$ avec :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt.\,dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt.\,dt\,.$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\times\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\mu_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [\varphi(t)]^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\times\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt\right) = 0 - \frac{1}{n\pi}\left[-\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}\left[\cos(n\pi) - 1\right]$$

Une intégration par partie donne $u(t) = t$ et $u'(t) = 1$; $v'(t) = \cos nt$ et $v(t) = \frac{1}{n}\sin(t)$.

$\cos n\pi = (-1)^n$.

si n est pair $\cos 2n\pi = (-1)^{2n} = 1$ et $a_n = \frac{1}{n^2\pi}\left[\cos(n\pi) - 1\right] = \frac{1}{n^2\pi}\left[1 - 1\right] = 0$ donc $a_{2n} = 0$;

si est impair $\cos\left[(2n+1)\pi\right] = -1$ et $a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2\pi}\left[-1-1\right] = \frac{-2}{(2n+1)^2\pi}$, donc $a_{2n+1} = \frac{-2}{(2n+1)^2\pi}$

$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt$. Une intégration par partie donne

$u(t) = t$ et $u'(t) = 1$; $v'(t) = \sin nt$ et $v(t) = -\frac{1}{n}\cos nt$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-t\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt)dt = \frac{(-\pi\cos n\pi)}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi}\left[\sin nt\right]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{-\cos(n\pi)}{n} + 0$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Si n est pair $\cos n\pi = 1$ et $b_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n} = \frac{-1}{2n}$;

Si n est impair $\cos(n\pi) = -1$,donc $b_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{n} = \frac{1}{2n+1}$.

$$S_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}\left[a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\right] = \frac{\pi}{4} + a_1\cos t + a_2\cos(2t) + a_3\cos(3t) + b_1\sin(t) + b_2\sin(2t) + b_3\sin(3t)$$

a_0	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{2}{\pi}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9\pi}$	$\frac{1}{3}$

$$S_3\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+a_1\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+a_2\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right)+a_3\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+b_1\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+b_2\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)+b_3\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$S_3\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{2}{9\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

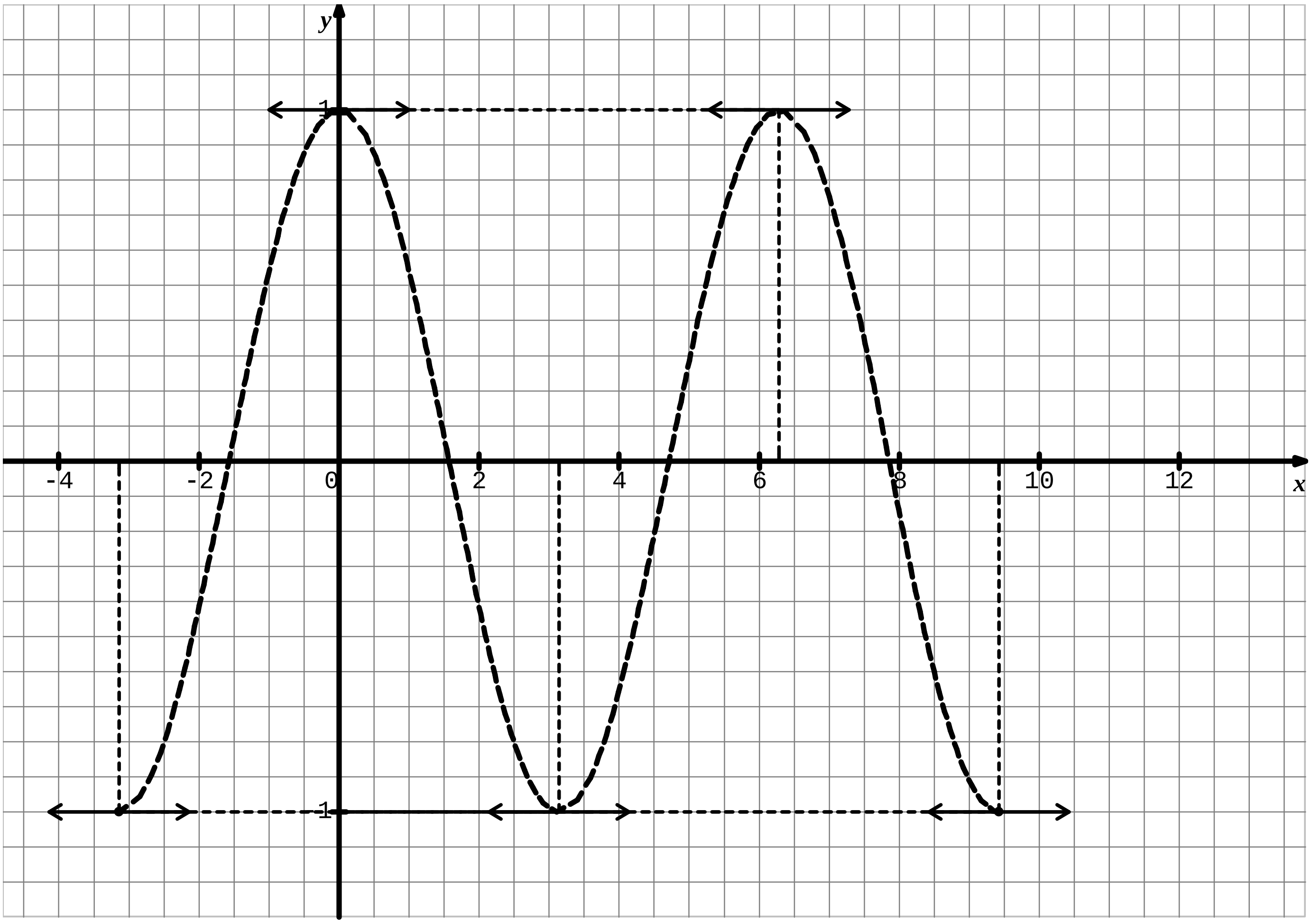
$$S_3\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[-\frac{2}{\pi}+\frac{2}{9\pi}+1+\frac{1}{3}\right]-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[-\frac{16}{9\pi}+\frac{3+1}{3}\right]-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[-\frac{16}{9\pi}+\frac{4}{3}\right]-\frac{1}{2}$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)-S_3\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[-\frac{16}{9\pi}+\frac{4}{3}\right]-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[\frac{16}{9\pi}-\frac{4}{3}\right]\approx -0,043\,.$$

$$\mu_3^2=a_0^2+\frac{1}{2}\left(a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+a_3^2+b_3^2\right)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi^2}+1+\frac{1}{4}+\frac{4}{81\pi^2}+\frac{1}{9}\right)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}\left(\frac{49}{36}+\frac{328}{81\pi^2}\right)$$

$$\mu_{eff}^2=\frac{\pi^2}{6}\,.\ \frac{\mu_3^2}{\mu_{eff}^2}=\frac{\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}\left(\frac{49}{36}+\frac{328}{81\pi^2}\right)}{\frac{\pi^2}{6}}=\left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}\left(\frac{49}{36}+\frac{328}{81\pi^2}\right)\right)\times\frac{6}{\pi^2}\approx 0,91344\,.$$

Annexe exercice 1


y
1
-1
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
x