TP MATHEMATIQUES SERIES NUMERIQUES

Exercice n°1

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $\begin{cases} u_1 = 1/3 \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} u_n \end{cases}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_n}{n}$

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
2) Exprimer v_n en fonction de n.
3) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4) Soit la série $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. Calculer S_n en fonction de n et montrer que la suite S_n est convergente.

Exercice 2 : On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \dfrac{a^n}{n^\alpha}$ où a une constante réelle quelconque.

Etudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 3 : Soit n un entier naturel, $n \geq 2$, on considère la série de terme général $u_n = \dfrac{4}{n^2-1}$

1) Montrer que cette série est convergente.
2) Déterminer les réels a et b tels que : $\dfrac{4}{n^2-1} = \dfrac{a}{n-1} + \dfrac{b}{n+1}$
3) En déduire que : $\sum_{k=2}^{n} u_k = 3 - \dfrac{4n+2}{n(n+1)}$
4) En déduire la somme S de la série (u_n).

Exercice 4 Soit n un entier naturel, $n \geq 2$, on considère la série de terme général $u_n = \dfrac{2}{n^2-1}$

1) Montrer que cette série est convergente.
2) Déterminer les réels a et b tels que : $\dfrac{2}{n^2-1} = \dfrac{a}{n-1} + \dfrac{b}{n+1}$
3) En déduire que : $\sum_{k=2}^{n} u_k = \dfrac{3}{2} - \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$. En déduire la somme S de la série (u_n).

Exercice 5 Soit la suite (u_n)définie par : $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

1. Déterminer les réels a et b tels que : $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$
2. On pose $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n-1} + u_n$. Calculer S_n et la limite S de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6 Soit (u_n) la suite définie sur N^* par $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + ... + \dfrac{1}{2n}$.

1. Montrer que pour tout n de N^*, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$.
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

Exercice 7

1. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n$;

2. Etudier la convergence de la série $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p}$

3. Etudier la convergence des séries de terme général : a) $u_n = \frac{3}{n^2+1}$

4. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(2n+1\right)^2}$ de terme général $u_n = \frac{1}{\left(2n+1\right)^2}$.

5. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

6. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}$ de terme général $u_n = \frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}$.

7. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

8. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n+n}$ de terme général $u_n = \frac{n^2}{2^n+n}$.

Exercice 8

7. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ de terme général $u_n = \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$

8. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$ de terme général $u_n = \frac{\arctan n}{n^2}$.

4. Etudier la convergence de la série de terme général : $u_n = \frac{n+1}{n!}$; $v_n = \frac{1}{n!}$

Corrigé

Exercice n°1

1) Pour tout entier $n \in N^*, v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{3n}u_n}{n+1} = \frac{1}{3}\frac{u_n}{n} = \frac{1}{3}v_n$

2) (v_n) est donc une suite géométrique de raison $1/3$ et de premier terme $v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{3}$

3) Pour tout $n \in N^*$, $v_n = \frac{1}{3}v_{n-1} = v_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Puisque pour tout $n \in N^*$, $v_n = \frac{u_n}{n}$, on aura $u_n = nv_n = n\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Exercice 2

$u_n = \frac{a^n}{n^\alpha}$ .posons $v_n = \ln u_n$, $v_n = \ln\left(\frac{a^n}{n^\alpha}\right) = \ln a^n - \ln n^\alpha = n\ln a - \alpha \ln n = n\left(\ln a - \alpha\frac{\ln n}{n}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right) = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln a - \alpha\frac{\ln n}{n}\right) = \ln a$

Donc : 2 cas :

Si $a > 1$, $\ln a > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n} = +\infty$

Si $a < 1$, $\ln a < 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n} = 0$.

On conclut que lorsque n tend vers l'infini , le comportement de $u_n = \frac{a^n}{n^\alpha}$ est celui de a^n pour $a \neq 1$.

Exercice 3

$n=2 \quad \frac{2}{2-1}-\frac{2}{3}=2-\frac{2}{3}$

$n=3 \quad \frac{2}{3-1}-\frac{2}{3+1}=1-\frac{1}{2}$

$n=4 \quad \frac{2}{4-1}-\frac{2}{4+1}=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}$

$n=5 \quad \frac{2}{5-1}-\frac{2}{5+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$n=6 \quad \frac{2}{6-1}-\frac{2}{6+1}=\frac{2}{5}-\frac{2}{7}$

$n=7 \quad \frac{2}{7-1}-\frac{2}{7+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$n=8 \quad \frac{2}{8-1}-\frac{2}{8+1}=\frac{2}{7}-\frac{2}{9}$

....

$n=p-3 \quad \frac{2}{p-3-1}-\frac{2}{p-3+1}=\frac{2}{p-4}-\frac{2}{p-2}$

$n=p-2 \quad \frac{2}{p-2-1}-\frac{2}{p-2+1}=\frac{2}{p-3}-\frac{2}{p-1}$

$n=p-1 \quad \frac{2}{p-1-1}-\frac{2}{p-1+1}=\frac{2}{p-2}-\frac{2}{p}$

$n=p \quad \frac{2}{p-1}-\frac{2}{p+1}=\frac{2}{p-1}-\frac{2}{p+1}$

$\frac{4}{n^2-1}=\frac{a}{n-1}+\frac{b}{n+1}=\frac{a(n+1)+b(n-1)}{n^2-1}=\frac{(a+b)n+(a-b)}{n^2-1}$, d'où

$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=4 \end{cases}$ et $a=2$; $b=-2$

$\frac{4}{n^2-1}=\frac{2}{n-1}-\frac{2}{n+1}$

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = 2+1-\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n}=3-\left(\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n}\right)=3-\frac{4n+2}{n(n+1)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(3-\frac{4n+2}{n(n+1)}\right)=3-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n+2}{n(n+1)}\right)=$$

$$3-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n}{n^2}\right)=3-4\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \quad ; \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

Donc la série converge vers $S=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=2}^{n} u_k\right)=3$

Exercice 4

$n=2 \quad \frac{1}{2-1}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}$

$n=3 \quad \frac{1}{3-1}-\frac{1}{3+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

$n=4 \quad \frac{1}{4-1}-\frac{1}{4+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$

$n=5 \quad \frac{1}{5-1}-\frac{1}{5+1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$

$n=6 \quad \frac{1}{6-1}-\frac{1}{6+1}=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$

$n=7 \quad \frac{1}{7-1}-\frac{1}{7+1}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}$

$n=8 \quad \frac{1}{8-1}-\frac{1}{8+1}=\frac{1}{7}-\frac{1}{9}$

....

$n=p-3 \quad \frac{1}{p-3-1}-\frac{1}{p-3+1}=\frac{1}{p-4}-\frac{1}{p-2}$

$n=p-2 \quad \frac{1}{p-2-1}-\frac{1}{p-2+1}=\frac{1}{p-3}-\frac{1}{p-1}$

$n=p-1 \quad \frac{1}{p-1-1}-\frac{1}{p-1+1}=\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p}$

$n=p \quad \frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}$

$$\frac{2}{n^2-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{2}-\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{2n+1}{n(n+1)}\right)=\frac{3}{2}-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{n(n+1)}\right)=$$

$$\frac{3}{2}-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{n^2}\right)=\frac{3}{2}-2\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \quad ; \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

Donc la série converge vers $S=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=2}^{n} u_k\right)=\frac{3}{2}$

Exercice 5

$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. on a : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n}$ et $\frac{1}{n^2+n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ est donc convergente en vertu du théorème de Riemann. Il est immédiat de vérifier que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

On obtient successivement : $S_1 = u_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$S_2 = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et de même en observant les groupements de termes qui s'annulent , on obtient :

$S_2 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots\dots u_{n-1} + u_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

Par définition de la somme d'une série , on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Exercice 6

$u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$.

1. $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n}$ d'où

$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$.

2. La suite (u_n) est décroissante puisque $-3n-2<0$.
3. La suite est positive puisque somme de termes positifs ; elle est décroissante et minorée, elle converge bien.

Exercice 7

1. la série $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + \dots\dots\dots + 2^n$ diverge car $\sum_{n=0}^{p} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + \dots\dots\dots + 2^p = \frac{1-2^{p+1}}{1-2} = 2^{p+1} - 1$

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} 2^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = \lim_{p\to+\infty} (2^{p+1} - 1) = +\infty$.

2. la série $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p}$ est la somme des termes consécutifs de la suite géométrique de 1[er] terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$

et on a : $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\dots\dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 2\left(1-(1/2)^{n+1}\right)$, la série converge puisque :

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} = \lim_{n\to+\infty} 2\left(1-(1/2)^{n+1}\right) = 2$; $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ ($q = \frac{1}{2} < 1$)

La série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge , on écrit : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p} = 2$.

3 .On considère la série de terme général $\frac{1}{n^2+1}$; on a : $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ pour tout n ; or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (comme série de Riemann avec $\alpha = 2$), donc la série de terme général $\frac{1}{n^2+1}$ converge .

En admettant que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{n^2+1}=3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$, on peut dire que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{n^2+1}$ est une série convergente .

On peut aussi utiliser le théorème d'équivalence : On directement :

$\frac{3}{n^2+1}\underset{+\infty}{\sim}\frac{3}{n^2}$, la série de terme général $\frac{3}{n^2}$ est convergente donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{n^2+1}$ est une série convergente.

4. On considère la série positive $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1))^2}$ de terme général $U_n=\frac{1}{(2n+1))^2}=\frac{1}{4n^2\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^2}$

On a : $n^2U_n=\frac{n^2}{(2n+1))^2}=\frac{n^2}{4n^2+4n+1}$ donc $\lim_{n\to+\infty}n^2U_n=\frac{1}{4}$, par conséquent , la règle de Riemann s'appliquant aux séries à terme positifs permet d'affirmer que la série converge .

Quand n tend vers l'infini , u_n est un équivalent de $\frac{1}{4n^2}$, on reconnaît le terme général d'une série de Riemann qui avec $\alpha=2>1$ est une série qui converge , donc la série de terme général u_n converge aussi d'après le théorème d'équivalence des séries positives .

5. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ répond au critère d'une série alternée :

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (on a pour tout $n>0$, $\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{n}$ donc $v_{n+1}\leq v_n$ ou ($|u_{n+1}|\leq|u_n|$)($x\mapsto\frac{1}{x}$)

et $\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ converge. Cette série est appelée la **série harmonique alternée**

6.1a série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ de terme général $u_n=\frac{(-1)^n}{2n+1}$. On reconnaît une série alternée, et ici le théorème spécial de convergence des séries alternées s'applique. En effet, pour tout n entier naturel on a :

$|u_{n+1}|=\frac{1}{2(n+1)+1}=\frac{1}{2n+3}<\frac{1}{2n+1}=|u_n|$ .Ainsi, la suite définie par $|u_n|=\frac{1}{2n+1}$ est décroissante

et $\lim_{n\to+\infty}|u_n|=0$, donc 1a série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente

7. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ de terme général $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. On reconnaît une série alternée, et ici le théorème spécial de convergence des séries alternées s'applique.

En effet, pour tout n entier naturel on a : $|u_n|=\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right|=\frac{1}{n^2}$ $|u_{n+1}|=\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{n^2+2n+1}<\frac{1}{n^2}=|u_n|$.

Ainsi, la suite définie par $|u_n|=\frac{1}{n^2}$ est décroissante et $\lim_{n\to+\infty}|u_n|=0$, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ est convergente.

8. $0<\frac{n^2}{2^n+n}<\frac{n^2}{2^n}=v_n$

Etudions la convergence de la série de terme général v_n en utilisant la règle d'Alembert

$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\to\frac{1}{2}<1$ donc la série de terme général v_n est convergente .D'après le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs , la séries de terme général $u_n = \frac{n^2}{2^n + n}$ est convergente également .

Exercice 8

1. soit la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$; pour tout $n > 0$ $|u_n| = \left|\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right| \leq \frac{1}{n^2}$. La série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ converge

(théorème de Riemann), donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ converge (critère de comparaison

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est absolument convergente , $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ est convergente .

2. Soit la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\arctan n}{n^2}$. Pour tout $n > 0$, on a : $0 \leq \frac{\arctan n}{n^2} < \frac{\pi}{2n^2}$, donc $0 \leq u_n < \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{n^2}$. La série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ converge (théorème de Riemann)donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\arctan n}{n^2}$ est convergente.

3. On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. On obtient $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+2}{(n+1)!}\right) / \left(\frac{n+1}{n!}\right) = \frac{n+2}{(n+1)!}\times\frac{n!}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)^2}$, donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, $0 < 1$

Donc d'après la règle d'Alembert , la série $\sum\frac{n+1}{n!}$ est convergente

4. On a : $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n-2}$, $u_n - \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n}}{n-2} - \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{n\sqrt{n} - n\sqrt{n} + 2\sqrt{n}}{n(n+1)} = \frac{2\sqrt{n}}{n(n+1)}$, cette expression est positive pour tout $n > 2$. On a donc $u_n > \frac{\sqrt{n}}{n}$ ou $u_n > \frac{1}{n^{1/2}}$. La série de terme général $\frac{1}{n^{1/2}}$ diverge (comme série de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$), on déduit donc que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-2}$ est divergente .on peut aussi la règle d'équivalence :

$\frac{\sqrt{n}}{n-2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n}$ donc $\frac{\sqrt{n}}{n-2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ la conclusion vient de manière immédiate : la série de terme général $\frac{\sqrt{n}}{n-2}$ est divergente.

Quelques séries numériques de référence : Série harmonique : c'est la série : $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$

Bien que son terme général tend vers 0 en + ∞, cette série est divergente en effet :

$$\sum_{k=1}^{2^p}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{2\ termes} + \underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{4\ termes} + \ldots\ldots + \underbrace{\frac{1}{2^{p-1}+1} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^p}}_{2^{p-1}\ termes}$$

$$\sum_{k=1}^{2^p}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{2\ termes} + \underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{4\ termes} + \ldots\ldots + \underbrace{\frac{1}{2^{p-1}+1} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^p}}_{2^{p-1}\ termes}$$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \geq 2\times\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} \geq 4\times\frac{1}{8}$; …………… ; $\frac{1}{2^{p-1}+1} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^p} \geq 2^{p-1}\times\frac{1}{2^p}$

$\sum_{k=1}^{2^p}\frac{1}{k} \geq 1 + \frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{4} + 4\times\frac{1}{4} + \ldots\ldots + 2^{p-1}\times\frac{1}{2^p} = 1 + \frac{1}{2}\underbrace{(1+1+1+\ldots\ldots\ldots+1)}_{p}$; donc $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} \geq 1 + \frac{p}{2}$

soit n un entier naturel non nul, soit p la **partie entière** du nombre $\frac{\ln n}{\ln 2}$, on a : n ≥ 2^p et : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\geq 1+\frac{p}{2}$

quand n tend vers $+\infty$, p tend également vers $+\infty$ d'ou la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est une série divergente.

III. Raisonnement par Récurrence.

Propriété : Soit P(n) une propriété dépendant d'un entier n et n_0 un entier fixé.

Etape 1 : Vérification (initialisation)

On vérifie que la propriété est vraie pour le premier terme : P(0) ou P(1) est vraie.

Etape 2 : Hérédité

On suppose que la propriété est vraie pour le terme de rang n et on démontre que si elle est vraie pour le rang n elle est vraie pour le rang n + 1.

Si pour tout entier $n \geq n_0$ on a P(n) vraie $\Rightarrow$ P(n+1)vraie.

Exercice 3. Démontrer par récurrence que pour tout $n\geq 1$, on a :

1. $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 3.

Soit à démontrer par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$. $P_{n0=1}$: $1^3 = 1^2$

On suppose que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

Somme des n premiers cubes (non nuls) $1^3+2^3+3^3+.........+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Démonstration :

Le principe est le même que pour la somme des n premiers carrés ,

posons :

$S_1 = 1+2+3+\ldots+n$

$S_2 = 1^2+2^2+\ldots+n^2$

$S_3 = 1^3+2^3+\ldots+n^3$

la formule du binôme de Newton permet d'écrire : $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3+6k^2+4k+1$

on obtient en faisant varier k de 1 à n , n équations que l'on peut ajouter membre à membre :

$2^4 - 1^4 = 4\times 1^3 + 6\times 1^2 + 4\times 1 + 1$

$3^4 - 2^4 = 4\times 2^3 + 6\times 2^2 + 4\times 2 + 1$

…

$\underline{(n+1)^4 - n^4 = 4\times n^3 + 6\times n^2 + 4\times n + 1}$

$(n+1)^4 - 1 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n$

en isolant S_3 on obtient la formule de la somme des cubes.

Somme des n premiers carrés (non nuls) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

démonstration :

posons :

$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

$S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ on sait que : $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

on peut donc écrire et ajouter membre à membre les n égalités suivantes :

$\cancel{2^3} - 1^3 = 3\times 1^2 + 3\times 1 + 1$

$\cancel{3^3} - \cancel{2^3} = 3\times 2^2 + 3\times 2 + 1$

$\cancel{4^3} - \cancel{3^3} = 3\times 3^2 + 3\times 3 + 1$

. . .

$\underline{(n+1)^3 - n^3 = 3\times n^2 + 3\times n + 1}$

$(n+1)^3 - 1 = 3\times(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3\times(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n$

$(n+1)^3 - 1 = 3\times S_2 + 3\times S_1 + n$

$3S_2 = (n+1)^3 - 1 - 3S_1 - n$

$3S_2 = (n+1)^3 - 1 - \dfrac{3n(n+1)}{2} - n$

$3S_2 = (n+1)^3 - (n+1) - \dfrac{3n(n+1)}{2}$

$3S_2 = \dfrac{(n+1)}{2}\left[2(n+1)^2 - 2 - 3n\right]$

$S_2 = \dfrac{(n+1)}{6}\left[2n^2 + 4n + 2 - 2 - 3n\right]$

$S_2 = \dfrac{(n+1)}{6}(2n^2 + n)$

$\boxed{S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$