TP 3 PROBABILITE BTS 2

Exercice 1

Nombre inscrit	1	2	5	10
Nombre de boules	4	3	2	1

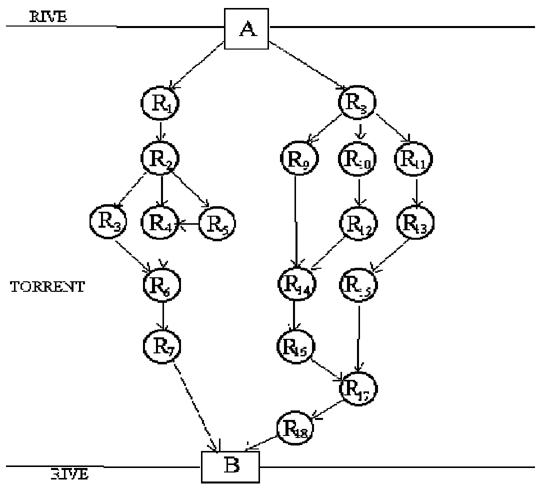
Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher. Sur chacune d'elles est inscrit un nombre comme l'indique le tableau ci-contre
Un joueur mise 4 euros, tire une boule au hasard et reçoit le montant (en euros) inscrit sur la boule.

1. Le joueur effectue un tirage. On appelle p_1 la probabilité pour qu'il perde (c'est à dire qu'il reçoive moins de 4 euros) et p_2 la probabilité pour qu'il gagne (c'est à dire qu'il reçoive plus de 4 euros). Calculer p_1 et p_2.
2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, fait correspondre le « gain » du joueur (positif s'il gagne, négatif s'il perd).Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?; puis le représenter la loi de probabilité de X dans un tableau.
   c. Calculer son espérance mathématique E(X).
3. Un jeu est équitable si et seulement si E(X) = 0. On décide de changer le nombre inscrit sur une seule boule portant le nombre 1. Quel nombre doit-on y inscrire pour que le jeu soit équitable ?

Exercice-2

Le personnage virtuel d'un jeu électronique doit franchir un torrent en sautant de rocher en rocher. Le torrent se présente de la manière suivante (les disques R_1, R_2, ..., R_{17}, R_{18} représentent les rochers) :
le personnage virtuel part de A pour aller en B. Il ne peut que choisir les trajets matérialisés par des pointillés et avancer uniquement dans le sens des flèches. On appelle " parcours " une suite ordonnée de lettres représentant un trajet possible. Par exemple : $A-R_1-R_2-R_3-R_6-R_7-B$ est un parcours qui nécessite 6 bonds.

Toutes probabilité demandée sera donnée sous forme de fraction.



1. Déterminer les six parcours possibles.
2. Le joueur choisit au hasard un parcours. On admet que les différents parcours sont équiprobables.
   a. Quelle est la probabilité p_1 de l'événement :
   " le personnage virtuel passe par le rocher R_7 " ?
   b. Quelle est la probabilité p_2 de l'événement :
   " le personnage virtuel passe par le rocher R_{14} "?
3. Chaque bond du personnage virtuel nécessite 2 secondes.
   On note X la variable aléatoire qui, à chaque parcours associe sa durée en secondes.
   a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.
4. Quelle devrait être la durée d'un bond du personnage virtuel pour que la durée moyenne d'un parcours soit égale à 10 secondes ?

Exercice 3

Un professeur d'une classe de terminale S. T. I. donne à ses élèves trois questions dans une interrogation écrite et propose deux réponses par question : l'une juste et l'autre fausse. On désigne par J une réponse juste et par F une réponse fausse. On suppose que les élèves répondent à chaque question en indiquant soit la réponse juste, soit la réponse fausse. À chaque élève, on associe le résultat de son interrogation, sous la forme d'un triplet constitué des réponses données aux trois questions. Par exemple, si un élève a répondu juste à la première, faux à la deuxième et à la troisième , on lui associera le résultat (J, F, F).

I Déterminer à l'aide d'un arbre l'ensemble des résultats possibles. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

II On considère un élève qui répond au hasard à chaque question et de façon indépendante pour chacune d'elles. Le professeur fait l'hypothèse d'équiprobabilité des résultats.

1. Démontrer que la probabilité de l'évènement A « le résultat contient exactement une réponse juste » est égale à $\frac{3}{8}$
2. Déterminer la probabilité de l'évènement B « le résultat contient au moins une réponse juste. »
3. Dans cette question, le professeur note les copies de la manière suivante : il donne 1 point pour une réponse juste et 0 point pour une réponse fausse. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque résultat associe la note obtenue par l'élève.

a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
b. Donner la loi de probabilité de X.
c. Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.
4. Dans cette question, le professeur note les copies de la manière suivante : il donne 1 point pour une réponse juste et enlève 0,25 point pour une réponse fausse. Si le total des points ainsi obtenu est négatif, la note attribuée est 0.
On appelle Y la variable aléatoire qui à chaque résultat associe la note obtenue par l'élève.
Calculer l'espérance mathématique E(Y) de Y .

Exercice 4

Un jeu est organisé de la manière suivante : le joueur mise 3 €, puis fait tourner une roue partagée en 6 secteurs circulaires. Lorsque la roue s'immobilise, un repère situé devant la roue indique le secteur circulaire désigné. On suppose que la roue est lancée suffisamment vite pour que la position du repère corresponde à un tirage aléatoire ; la probabilité que le repère indique un secteur donné est donc proportionnelle à l'angle au centre de ce secteur.
Sur chacun des secteurs circulaires est affichée une somme que le joueur reçoit :
– le secteur 1mesure 150° et indique la somme 0 € : le joueur ne reçoit rien;
– le secteur 2 mesure 100°et affiche 3 € ; – le secteur 3mesure 50° et affiche 4 € ;
– le secteur 4mesure 35° et affiche 6 € ; – le secteur 5mesure 15°et affiche 10 € ? ;
– le secteur 6, qui et le dernier, mesure 10° et affiche 15 € .
On appelle « gain » du joueur la somme, positive ou négative, que le joueur obtient après le lancer de la roue : cette somme prend en compte la mise de 3 €. Ainsi, par exemple le gain correspondant au secteur 5 est égal à 7 €.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain du joueur.
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
1. Déterminer la loi de probabilité de la variable X.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un gain d'au moins 3 " ?
3. a. Calculer l'espérance mathématique de la variable X.
b. Le jeu est-il équitable ?
4. Dans cette question, les cinq premiers secteurs sont inchangés, mais le sixième affiche une somme de a € où a est un nombre réel positif. On note encore X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain du joueur.
a. Calculer l'espérance mathématique de la variable X en fonction du réel a.
b. Déterminer la valeur de a pour que cette espérance soit nulle.

Exercice 5

Onze chansons différentes sont enregistrées sur un CD. La durée de chacune d'elles étant inscrite sur la pochette du CD, on a le tableau suivant :

Numéro de la chanson	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Durée en secondes	200	185	150	200	185	215	230	215	200	230	300

Un lecteur de CD sélectionne au hasard une des onze chansons et une seule ; toutes les chansons ont la même probabilité d'être sélectionnées. Les résultats seront donnés sous forme de fractions.
1. Quelle est la probabilité que la chanson n°7 soit sélectionnée ?
2. a. Déterminer la probabilité de l'évènement A : « la chanson sélectionnée a une durée de 200 secondes ».
b. Déterminer la probabilité de l'évènement B : « la chanson sélectionnée a une durée supérieure à 210 secondes ».
c. Soit B l'évènement contraire de B. Décrire B par une phrase, puis déterminer sa probabilité.
3. On note X la variable aléatoire qui à chaque chanson sélectionnée associe sa durée exprimée en secondes
a. Déterminer les différentes valeurs prises par X.
b. Établir sous forme d'un tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. Interpréter ce résultat.

Exercice 6

Une urne contient quatre boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 4.Une expérience aléatoire se déroule de la manière suivante : On tire au hasard une première boule de l'urne et on note son numéro. Après avoir remis cette boule dans l'urne, on en tire au hasard une seconde dont on note aussi le numéro. À l'issue de cette expérience, on obtient un couple de nombres (on rappelle que, par exemple, le couple (2 ; 3) est différent du couple (3 ; 2)).
1. À l'aide d'un arbre ou d'un tableau, établir la liste des 16 couples possibles.
2. a. On note A l'évènement « obtenir un couple de nombres pairs ». Déterminer la probabilité de l'évènement A.
b. On note B l'évènement « obtenir un couple de nombres impairs ». Calculer la probabilité de l'événement B.
c. On note C l'évènement « obtenir un couple de nombres de parité différente ».
Calculer la probabilité de l'évènement C.
3. On organise un jeu. Un joueur mise 2 euros et réalise ensuite l'expérience aléatoire décrite ci-dessus.
− Si l'évènement A est réalisé, le joueur reçoit 8 euros de l'organisateur du jeu ;
− Si l'évènement B est réalisé, le joueur reçoit 4 euros de l'organisateur du jeu ;

− Si l'évènement C est réalisé, le joueur donne 4 euros à l'organisateur du jeu.
On désigne par X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur.
Par exemple, s'il obtient le couple (2 ; 2), son gain est 6 euros.

a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
c. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.
d. On dit qu'un jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est nulle.
Quelle aurait du être la mise du joueur pour que le jeu soit équitable ?

Exercice7

Un hôtel de vacances propose deux types de bungalow (bungalow avec kitchenette ou bungalow sans kitchenette) à louer à la semaine. Pour les clients qui le souhaitent, l'hôtel propose deux formules de restauration au choix :

• Formule A : petit déjeuner seul, • Formule B : petit déjeuner et dîner.

Pour chaque semaine de location, chaque client décide s'il prend une formule de restauration et si oui, choisit entre les formules A et B. Le gestionnaire de l'hôtel a constaté que sur 100 clients

• 44 clients ne prennent aucune formule de restauration.
• 60 clients optent pour un bungalow avec kitchenette et parmi ceux-ci, 10 % choisissent la formule B et 20 % la formule A.
• 35 % des clients ayant choisi un bungalow sans kitchenette prennent la formule A.

Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre de clients ayant choisi	Bungalow avec kitchenette	Bungalow sans kitchenette	Total
Formule A			
Formule B	6		
Aucune formule de restauration		2	
Total			100

2. On interroge un client au hasard, au sujet de ses choix,
a. Déterminer la probabilité de l'évènement E : « Le client a choisi la formule B ».
b. Déterminer la probabilité de l'évènement F : « Le client a loué un bungalow sans kitchenette ».
c. Déterminer la probabilité de l'évènement G : «Le client a loué un bungalow sans kitchenette ou a choisi la formule B».
d. Déterminer la probabilité de l'évènement H : « Le client a choisi une formule de restauration ».
3. La location d'un bungalow sans kitchenette à la semaine coûte 415 € et celle d'un bungalow avec kitchenette 520 €
La formule A coûte 49 € à la semaine. La formule B coûte 154 € à la semaine. On appelle X la variable aléatoire qui à chacun des 6 choix possibles, associe le coût correspondant pour une semaine.
a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
b. Démontrer que la probabilité de l'évènement « X prend la valeur 520 » est égale à 0,42.
c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
d. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.
e. Pour la prochaine saison, le gérant de l'hôtel pense qu'il louera dans les mêmes conditions 16 bungalows pendant 20 semaines. Quelle recette peut-il alors espérer ?

EXERCICE 8

Une entreprise fabrique des plaquettes de métal. Pour cela elle utilise deux machines, une qui les ajuste en longueur et une autre qui les ajuste en largeur. Les machines sont programmées pour donner des plaquettes de 2,5 cm sur 1,5 cm.
Des erreurs de manipulation peuvent conduire à des dimensions non conformes :
une longueur de 2,6 cm au lieu de 2,5 cm; une largeur de 1,6 cm au lieu de 1,5 cm.
Afin de vérifier la conformité de ces plaquettes, on procède à deux tests : un test sur la longueur et un test sur la largeur. On effectue les deux tests sur 100 plaquettes et on obtient :

• 20 plaquettes ont une longueur de 2,6 cm ; • 18 plaquettes ont une largeur de 1,6 cm;
• 5 plaquettes ont une dimension de 2,6 cm sur 1,6 cm.

On prélève au hasard une plaquette parmi les 100. Elles ont donc toutes la même probabilité d'être choisies.

1. Recopier et compléter le tableau des effectifs suivant :

	Largeur conforme 1,5	Largeur non conforme 1,6	Total
Longueur conforme 2,5			
Longueur non conforme 2,6		5	20
total			100

2. a. Quelle est la probabilité qu'une plaquette prélevée au hasard soit conforme à ce que veut l'entreprise ?
b. Quelle est la probabilité qu'une plaquette prélevée au hasard ait exactement une de ses dimensions non conforme ?
3. Soit X la variable aléatoire qui à chaque plaquette prélevée au hasard associe le nombre de ses dimensions non conformes.
a. Donner les valeurs possibles de X.
b. Donner la loi de probabilité de X.

Exercice 9

Dans une usine, deux chaînes de montage A et B fabriquent les mêmes types d'objets.
La chaîne A en fabrique trois fois plus que la chaîne B. 7 % de la production de la chaîne A est défectueuse contre 2 % pour la chaîne B.

Partie I

1. On considère une production de 1200 objets.
Reproduire et compléter le tableau suivant :

	chaîne A	chaîne B	Total
nombre d'objets défectueux			
nombre d'objets non défectueux			
Total			**1200**

2. On prélève au hasard un objet dans la production de l'usine et on admet que les tirages sont équiprobables.
a. Déterminer la probabilité que l'objet prélevé soit à la fois défectueux et produit par la chaîne A.
b. Déterminer la probabilité que l'objet prélevé ne soit pas défectueux.

Partie II

Un objet défectueux peut présenter 1, 2 ou 3 défauts.
Soit X la variable aléatoire qui, à un objet prélevé au hasard dans la production, associe le nombre de défauts.
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x	0	1	2	3
$p(X=x)$	$0,9425$	$0,0318$	$\dots$	$0,006$

1. Reproduire sur la copie puis compléter le tableau précédent.
2. Le prix de vente d'un objet dépend du nombre de défauts qu'il présente :
Soit Y la variable aléatoire qui, à un objet prélevé au hasard dans la production, fait correspondre son prix de vente.
a. Déterminer la loi de probabilité de Y .
b. Calculer l'espérance mathématique de Y .
Interpréter le résultat obtenu.

nombre de défauts	0	1	2	3
prix de vente en	56	15	10	1

Exercice 10

Une entreprise fabriquant des ordinateurs les vend en ligne sur Internet. Ces appareils sont tous garantis un an gratuitement .
Le fabriquant propose en option une extension de garantie payante de deux ans , au delà de cette première année gratuite.

1. Une étude est faite sur un échantillon de 1000 ordinateurs vendus par ce fabricant . Elle montre que :
- 10 ordinateurs ont nécessité une ou plusieurs réparations au cours de la deuxième année (On note ce cas R_2) ;
- Au cours de la troisième année, 20 ordinateurs ont nécessité une ou plusieurs réparations (on note ce cas R_3) dont un qui avait déjà été réparé l'année précédente .

Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre d'ordinateur	R_3 se produit	R_3 ne se produit pas	Total
R_2 se produit			
R_3 ne se produit pas			
Total			1000

On admet que la réparation précédente modélise ce qui se produit pour l'ensemble des ordinateurs vendus par ce fabricant

2. Selon le fabricant :
- Pour chaque ordinateur vendu sans extension de garantie et tombé en panne une ou plusieurs fois la deuxième année , le coût moyen de réparation pour l'acheteur au cours de cette deuxième année est 150 €
- Pour chaque ordinateur vendu sans extension de garantie et tombé en panne une ou plusieurs fois la troisième année , le coût moyen de réparation pour l'acheteur au cours de cette deuxième année est 200 €

On note X la variable aléatoire qui, à chaque ordinateur vendu sans extension de garantie par ce fabricant, associe le coût total moyen des réparations, pour l'acheteur, au terme des trois premières années .
ces coût est exprimé en euros .

Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont donc : $0\,;150\,;200\,;350$

a) Justifier que la probabilité de l'événement $\left(X=0\right)$ est égale à $0{,}971$

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X

3. Le fabricant propose l'extension de garantie payante de deux ans à un prix de 50 €. Que peut-on en dire ?

CORRECTION

Exercice 1

1. Le joueur va perdre si il tire une boule avec un numéro 1 ou un numéro 2 . Or il y a 4 boules numérotées 1 et 3 boules numérotées 2 . Donc $p_1=p\left(B_1\cup B_2\right)=p\left(B_1\right)+p\left(B_2\right)=\frac{4}{10}+\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$

De même , il gagne si il tire une avec un numéro 5 ou un numéro 10 , donc

$p_1=p\left(B_5\cup B_{10}\right)=p\left(B_5\right)+p\left(B_{10}\right)=\frac{2}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$ .Les événements B_i sont disjoints .

2. Soit X la variable aléatoire qui , à chaque tirage , fait correspondre le « gain » du joueur (positif s'il gagne , négatif s'il perd).

a) Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont :

Boule n°1 : $X=-4+1=-3$

Boule n°2 : $X=-4+2=-2$

Boule n°5 : $X=-4+5=1$

Boule n°10 : $X=-4+10=6$ .Donc X prend les valeurs : -3, -2, 1 et 6 .

b)

x_i	-3	-2	1	6
$p(X=x_i)$	$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

c) $E(X)=\sum_{1}^{4}x_i p_i=-3\times\frac{2}{5}-2\times\frac{3}{10}+\frac{1}{5}+6\times\frac{1}{10}=\frac{-12-6+2+6}{10}=\frac{-10}{10}=-1$. Le jeu n'est pas équitable

3. On change le nombre inscrit sur une boule numéro 1cela signifie qu'il a 3 boule 1 et une boule x

x_i	$-4+x$	-3	-2	1	6
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

Calculons $E(X)$: $E(X)=\sum_{1}^{4}x_i p_i=\left(-4+x\right)\times\frac{1}{10}-3\times\frac{3}{10}-2\times\frac{3}{10}+\frac{1}{5}+6\times\frac{1}{10}=\frac{-4+x-9-6+2+6}{10}=\frac{x-11}{10}$

Or $E(X)=0$, puisque on veut que le jeu soit équitable , donc $x=11$.

Si on veut que le jeu soit équitable , il faut remplacer une boule 1 par une boule 11 .

Exercice 2 : (correction)

1. Les six parcours possibles sont :

$A-R_1-R_2-R_3-R_6-R_7-B$ (6 bonds) ; $A-R_1-R_2-R_4-R_6-R_7-B$ (6 bonds)

$A-R_1-R_2-R_5-R_4-R_6-R_7-B$ (7 bonds) ; $A-R_8-R_9-R_{14}-R_{16}-R_{17}-R_{18}-B$ (7 bonds)

$A-R_8-R_{10}-R_{12}-R_{14}-R_{16}-R_{17}-R_{18}-B$ (8 bonds) ; $A-R_8-R_{11}-R_{13}-R_{15}-R_{17}-R_{18}-B$ (7 bonds)

2. Le joueur choisit au hasard un parcours. On admet que les différents parcours sont équiprobables.

a) p_1 : probabilité de l'événement « le personnage virtuel passe par le rocher R_7 »

il y a trois chemins sur six qui passent par R_7 donc $p_1=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

b) p_2 : probabilité de l'événement « le personnage virtuel passe par le rocher R_{14} »

il y a deux chemins sur six qui passent par R_{14} donc $p_2=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

3. On note X la variable aléatoire qui, à chaque parcours associe sa durée en secondes.

a. $A-R_1-R_2-R_3-R_6-R_7-B$ (6 bonds) $\Rightarrow 12s$; $A-R_1-R_2-R_4-R_6-R_7-B$ (6 bonds) $\Rightarrow 12s$

$A-R_1-R_2-R_5-R_4-R_6-R_7-B$ (7 bonds) $\Rightarrow 14s$;

$A-R_8-R_9-R_{14}-R_{16}-R_{17}-R_{18}-B$ (7 bonds) $\Rightarrow 14s$

$A-R_8-R_{10}-R_{12}-R_{14}-R_{16}-R_{17}-R_{18}-B$ (8 bonds) $\Rightarrow 16s$;

$A-R_8-R_{11}-R_{13}-R_{15}-R_{17}-R_{18}-B$ (7 bonds) $\Rightarrow 16s$; X prends les valeurs 12, 14 et 16 secondes .

b)

x_i	12	14	16
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

c). $E(X)=12\times\frac{1}{3}+14\times\frac{1}{2}+16\times\frac{1}{6}=\frac{24+42+16}{6}=\frac{82}{6}=\frac{41}{3}\simeq 13{,}67$

4. Soit d la durée d'un bond du personnage virtuel pour que la durée moyenne d'un parcours soit égale à 10 secondes on a :

x_i	$6d$	$7d$	$8d$
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

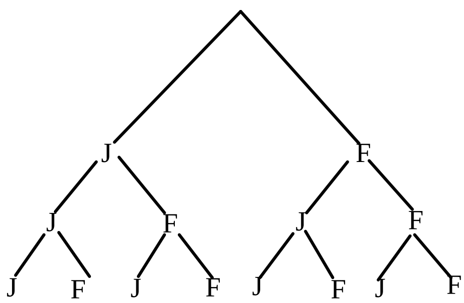
$E(X)=6d\times\frac{1}{3}+7d\times\frac{1}{2}+8d\times\frac{1}{6}=\frac{12d+21d+8d}{6}=\frac{41}{6}d$.

$E(X)=10 \Leftrightarrow \frac{41}{6}d=10 \Leftrightarrow d=\frac{60}{41}\simeq 1{,}46S$

La durée d'un bond du personnage virtuel devrait être 1,46 secondes pour que la durée moyenne d'un Parcours soit égale à 10 secondes

Exercice 3

1. Arbre représentant l'ensemble de tous les cas possibles Il y a huit cas possibles



II

1. l'événement A « le résultat contient exactement une réponse juste »

Correspond au triplet : (J,F,F) ou (F,J,F) ou (F,F,J)

Le professeur fait l'hypothèse d'équiprobabilité des résultats

Donc $p(J)=p(F)=\frac{1}{2}$

et $p(J,F,F)=p(F,J,F)=p(F,F,J)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

Or $p(A)=p(J,F,F)+p(F,J,F)+p(F,F,J)=\frac{3}{8}$

2. l'événement B « le résultat contient au moins une réponse juste » est l'événement contraire de l'événement « le résultat contient aucune réponse juste » soit de l'événement « les trois réponses sont fausses »

$p(F,F,F)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ Donc $p(B)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

3. X peut prendre les valeurs suivantes :

3 : 3 réponses justes ; 2 : 2 réponses et 1 une réponse fausse ; Une seule réponse juste et 2 réponses fausses 0 réponse juste et trois réponse fausses ; Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0 ; 1 ; 2 et 3

b)

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

c) $E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3+6+3}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}=1{,}5$

4. Y peut prendre les valeurs suivantes :

3 : 3 réponses justes ;

$2-0,25=1,75$: 2 réponses et 1 une réponse fausse ;

$1-2\times0,25=0,5$: Une seule réponse juste et 2 réponses fausses

0 : car $-3\times0,25=-0,75$: 0 réponse juste et trois réponse fausses .

Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0 ; 0,5 ; 1,75 et 3

Loi de probabilité

y_i	0	0,5	1,75	3
$p(Y=y_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(X)=0\times\frac{1}{8}+0,5\times\frac{3}{8}+1,75\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{1,5+5,25+3}{8}=\frac{9,75}{8}=1,21875$

Exercice 4

1. Si la roue s'arrête sur le secteur 1 , le gain du joueur est : $0-3=-3$

Si la roue s'arrête sur le secteur 2 , le gain du joueur est : $3-3=0$

Si la roue s'arrête sur le secteur 3 , le gain du joueur est : $4-3=1$

Si la roue s'arrête sur le secteur 4 , le gain du joueur est : $6-3=3$

Si la roue s'arrête sur le secteur 5 , le gain du joueur est : $10-3=7$

Si la roue s'arrête sur le secteur 6 , le gain du joueur est : $15-3=12$

La variable aléatoire X peut donc prendre les valeurs : $-3\,;0\,;1\,;3\,;7\,;12$

La probabilité que le repère indique un secteur donné est proportionnelle à l'angle au centre de ce secteur

Donc par exemple pour le secteur correspondant à 150° , on a une probabilité de $\frac{150}{360}=\frac{5}{12}$ puisque l'angle au centre décrivant la roue en entière est de 360°

$p(X=-3)=\frac{150}{360}=\frac{5}{12}$; $p(X=0)=\frac{100}{360}=\frac{5}{18}$; $p(X=1)=\frac{50}{360}=\frac{5}{36}$; $p(X=3)=\frac{35}{360}=\frac{7}{72}$;

$p(X=7)=\frac{15}{360}=\frac{1}{24}$; $p(X=12)=\frac{10}{360}=\frac{1}{36}$

Loi de probabilité de la variable aléatoire X

g_i	-3	0	1	3	7	12
$p(X=g_i)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{72}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{36}$

2. $p(X\geq3)=p(X=3)+p(X=7)+p(X=12)$

$=\frac{7}{72}+\frac{1}{24}+\frac{1}{36}=\frac{1}{6}$

La probabilité d'obtenir un gain d'au moins 3 euros est égale à $\frac{1}{6}$

3. Espérance mathématique de la variable X : $E(X)=-3\times\frac{5}{12}+0\times\frac{5}{18}+1\times\frac{5}{36}+3\times\frac{7}{72}+7\times\frac{1}{24}+12\times\frac{1}{36}=-\frac{5}{4}+\frac{17}{36}+\frac{7}{12}=-\frac{7}{36}$

b) on a $E(X)<0$ donc le jeu n'est pas équitable sinon on aurait $E(X)=0$

4. Si la roue s'arrête sur le secteur 1 , le gain du joueur est : $0-3=-3$

Si la roue s'arrête sur le secteur 2 , le gain du joueur est : $3-3=0$

Si la roue s'arrête sur le secteur 3 , le gain du joueur est : $4-3=1$

Si la roue s'arrête sur le secteur 4 , le gain du joueur est : $6-3=3$

Si la roue s'arrête sur le secteur 5 , le gain du joueur est : $10-3=7$

Si la roue s'arrête sur le secteur 6 , le gain du joueur est : $a-3$

La variable aléatoire X peut donc prendre les valeurs : $-3\,;0\,;1\,;3\,;7\,;a-3$

$p(X=-3)=\frac{150}{360}=\frac{5}{12}$; $p(X=0)=\frac{100}{360}=\frac{5}{18}$; $p(X=1)=\frac{50}{360}=\frac{5}{36}$; $p(X=3)=\frac{35}{360}=\frac{7}{72}$;

$p(X=7)=\frac{15}{360}=\frac{1}{24}$; $p(X=a-3)=\frac{10}{360}=\frac{1}{36}$

g_i	-3	0	1	3	7	$a-3$
$p(X=g_i)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{72}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{36}$

Espérance mathématique de la variable X :

$$E(X) = -3\times\frac{5}{12}+0\times\frac{5}{18}+1\times\frac{5}{36}+3\times\frac{7}{72}+7\times\frac{1}{24}+(a-3)\times\frac{1}{36}$$
$$E(X) = -\frac{5}{4}+\frac{5}{36}+\frac{1}{2}+\frac{a}{36} = -\frac{45}{36}+\frac{5}{36}+\frac{18}{36}+\frac{a}{36} = -\frac{22}{36}+\frac{a}{36}$$
$$E(X) = \frac{a-22}{36}$$

b) $E(X)=0 \Leftrightarrow \frac{a-22}{36}=0 \Leftrightarrow a-22=0 \Leftrightarrow a=22$

Pour que l'espérance soit nulle, c'est-à-dire pour que le jeu soit équitable il faut le secteur 6 affiche 22 euros

<u>Exercice 5</u>

1.Toutes les chansons ont la même probabilité d'être sélectionnées et il y a 11 chansons
donc la probabilité que la chanson n°7 soit sélectionnée est $p=\frac{1}{11}$

2. A est l'événement « la chanson sélectionnée a une durée de 200 secondes »
Il y a 3 chansons parmi les 11 qui ont une durée de 200 secondes , donc $p(A)=\frac{3}{11}$

b) B est l'événement « la chanson sélectionnée a une durée supérieure à 210 secondes »
Il y a 5 chansons parmi les 11 qui ont une durée supérieure à 210 secondes , donc $p(B)=\frac{5}{11}$.

c) $\overline{B}$ est l'événement « la chansons sélectionnée a une durée inférieure à 210 secondes »
$p(\overline{B})=1-p(B)=1-\frac{5}{11}=\frac{7}{11}$

3. X est la variable aléatoire qui à chaque chanson sélectionnée associe sa durée exprimée en secondes

a) Les différentes valeurs prises par X sont : 150 ; 185 ; 200 ; 215 ; 230 ; 300

b) Il y a une chanson de durée 150 s , donc $p(X=150)=\frac{1}{11}$

Il y a deux chansons de durée 185 s , donc $p(X=185)=\frac{2}{11}$, etc…… ………………

x_i	150	185	200	215	230	300
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$

c) $E(X)=150\times\frac{1}{11}+185\times\frac{2}{11}+200\times\frac{3}{11}+215\times\frac{2}{11}+230\times\frac{2}{11}+300\times\frac{1}{11}=\frac{2310}{11}=210$.

En moyenne la durée d'une chanson est de 210 seconde .

<u>Exercice 6</u>

1.

		1[èr] tirage			
		1	2	3	4
2[ième] tirage	1	(1 ; 1)	(2 ; 1)	(3 ; 1)	(4 ; 1)
	2	(1 ; 2)	(2 ; 2)	(3 ; 2)	(4 ; 2)
	3	(1 ; 3)	(2 ; 3)	(3 ; 3)	(4 ; 3)
	4	(1 ; 4)	(2 ; 4)	(3 ; 4)	(4 ; 4)

2. a) On note A l'événement « obtenir un couple de nombres pairs »
On cherche dans le tableau les couples de nombres pairs : $\{(2;2),(2;4),(4;2),(4;4)\}$
Il y a donc 4 couples favorables sur les 16 couples disponibles et on a donc
$p(A)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

b) On note B l'événement « obtenir un couple de nombres impairs »
On cherche dans le tableau les couples de nombres pairs : $\{(1;1),(1;3),(3;1),(3;3)\}$
Il y a donc 4 couples favorables sur les 16 couples disponibles et on a donc $p(B)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

c) On note C l'événement « obtenir un couple de nombres de parité différente »
l'événement « obtenir un couple de nombres de parité différente » est l'événement contraire de D={ « obtenir un couple de nombres pairs » et « obtenir un couple de nombres impairs »}
Donc $p(D)=p(A\cup B)=p(A)+p(B)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$, puisque les événements A et B sont disjoints
Donc $p(C)=1-p(D)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

3. a) événement A : $X=8-2=6$; événement B : $X=4-2=2$; événement C : $X=-4-2=-6$
La variable aléatoire X peut prendre les valeurs suivantes : $6;2;-6$

b)

$X=x_i$	-6	2	6
$p(X=x_i)$	$p(C)=\frac{1}{2}$	$p(B)=\frac{1}{4}$	$p(A)=\frac{1}{4}$

c) $E(X)=-6\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{4}=-3+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=-1$

d) Le jeu n'est pas équitable puisque en moyenne on perd 1€
Soit $G'=m-G$; $E(G')=E(m-G)=m-E(G)=m-1$, soit $E(G')=0\Leftrightarrow m=1$
il faudrait que la mise soit un 1 euro moins chère , donc une mise de 1euros ($2-1=1$€)
pour que l'espérance soit égale à 0.

AUTRE METHODE

$X=x_i$	$-4-m$	$4-m$	$8-m$
$p(X=x_i)$	$p(C)=\frac{1}{2}$	$p(B)=\frac{1}{4}$	$p(A)=\frac{1}{4}$

$E(G')=(-4-m)\times\frac{1}{2}+(4-m)\times\frac{1}{4}+(8-m)\times\frac{1}{4}=m-1$. $E(G')=0$ équivaut à $m-1=0$ soit $m=1$€.

Pour que le jeu soit équitable il faut une mise de 1€ .

Exercice 7

1.

Nombre de clients ayant choisi	Bungalow avec kitchenette	Bungalow sans kitchenette	Total
Formule A	**12**	**14**	**26**
Formule B	6	**24**	**30**
Aucune formule de restauration	**42**	2	**44**

Total	**60**	**40**	100

2. a) Il y a 30 clients qui ont choisit la formule B parmi les 100 clients $p(E)=\dfrac{30}{100}=0,3$

b) Il y a 40 clients qui ont loué un bungalow sans kitchenette parmi les 100 clients $p(F)=\dfrac{40}{100}=0,4$

c) Il y a 40 clients qui ont loué un bungalow sans kitchenette et qui ont la formule B parmi les 100 clients $p(E\cap F)=\dfrac{24}{100}=0,24$

L'événement G : « le client a loué un bungalow sans kitchenette ou a choisit la formule B » est L'événement $E\cup F$ on a : $p(E\cup F)=p(E)+p(F)-p(E\cap F)=0,3+0,4-0,24=0,46$

d) Il y a 26 clients qui ont choisit la formule A et 30 clients qui ont choisit la formule B, il y a donc 56 clients qui ont choisit une formule de restauration parmi les 100 clients $p(H)=\dfrac{56}{100}=0,56$

3. Choix possibles et coûts correspondants :

Bungalow avec kitchenette + Formule A : $520+49=569$;
Bungalow avec kitchenette + Formule B : $520+154=674$;
Bungalow avec kitchenette + Aucune formule de restauration : $520+0=520$
Bungalow sans kitchenette + Formule A : $415+49=464$;
Bungalow sans kitchenette + Formule B : $415+154=569$;
Bungalow sans kitchenette + Aucune formule de restauration : $415+0=415$

La variable aléatoire X peut donc prendre les valeurs : 415 ; 464 ; 520 ; 569 et 674.

b) Il y a 42 clients qui ont loué un bungalow avec kitchenette et qui n'ont choisit aucune formule de restauration parmi les 100 clients . Donc $p(X=520)=\dfrac{42}{100}=0,42$

c) Il y a 2 clients qui ont loué un bungalow sans kitchenette et qui n'ont choisit aucune formule de restauration parmi les 100 clients . Donc $p(X=415)=\dfrac{2}{100}=0,02$

Il y a 14 clients qui ont loué un bungalow sans kitchenette et qui ont choisit la formule A parmi les 100 clients . Donc $p(X=464)=\dfrac{14}{100}=0,14$

Il y a 12 clients qui ont loué un bungalow avec kitchenette et qui ont choisit la formule A parmi les 100 clients et Il y a 24 clients qui ont loué un bungalow avec kitchenette et qui ont choisit la formule B parmi les 100 clients Donc $p(X=569)=\dfrac{12+24}{100}=0,36$.

Il y a 6 clients qui ont loué un bungalow avec kitchenette et qui ont choisit la formule B parmi les 100 Clients $p(X=674)=\dfrac{6}{100}=0,06$.

Loi de probabilité de X

x_i	415	464	520	569	674
$p(X=x_i)$	$0,02$	$0,14$	$0,42$	$0,36$	$0,06$

d) Espérance mathématique $E(X)$:

$E(X)=415\times0,02+464\times0,14+520\times0,42+569\times0,36+674\times0,06=536,94$

e) $E(X)=536,94$ ce qui signifie que le coût moyen pour un bungalow pendant une semaine est de $536,94$ €. On a : $16\times536,94\times20=171820,80$

Donc pour 16 bungalows pendant 20 semaines , la recette que peut espérer le gérant de l'hôtel sera $171820,80$ €.

Exercice 8

1.

	Largeur conforme 1,5	Largeur non conforme 1,6	Total
Longueur conforme 2,5	**67**	**13**	**80**
Longueur non conforme 2,6	**15**	**5**	**20**
total	**82**	**18**	**100**

2.a) D'après le tableau il y a 67 plaquettes sur 100 qui ont une largeur et une longueur conforme
Donc la probabilité qu'une plaquette prélevée au hasard soit conforme à ce que veut l'entreprise
Vaut $p(A)=\frac{67}{100}=0,67$

b) Il y a 15 plaquettes sur 100 qui ont leur largeur conforme mais pas la longueur
Il y a 13 plaquettes sur 100 qui ont leur longueur conforme mais pas la largeur
Soit au total 28 plaquette sur 100 qui ont exactement une de leurs dimensions non conforme
La probabilité cherchée vaut $p(B)=\frac{28}{100}=0,28$

3. Chaque plaquette a deux dimensions donc X peut prendre comme valeurs 0 ; 1 ou 2

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$0,67$	$0,28$	$0,05$

Exercice 9

Partie I

1. La chaîne A en fabrique trois fois plus que la chaîne B donc la chaîne A fabrique $\frac{3}{4}$ de la production totale soit 900 objets et la chaîne B en fabrique $\frac{1}{4}$ soit 300 objets

7 % de la production de la chaîne A est défectueuse soit $900\times\frac{7}{100}=63$ objets défectueux

2 % de la production de la chaîne B est défectueux soit $300\times\frac{2}{100}=6$ objets défectueux

On peut donc ainsi compléter tableau d'effectifs

	chaîne A	chaîne B	Total
nombre d'objets défectueux	63	**6**	**69**
nombre d'objets non défectueux	**837**	**294**	**1131**
Total	**900**	**300**	**1200**

2. Loi de probabilité de X

a. Il y a 63 objets qui sont à la fois défectueux et produit par la chaîne A parmi 1200 objets , donc
L'objet prélevé soit à la fois défectueux et produit par la chaîne correspond à $A\cap B$, donc
$p(A\cap B)=\frac{63}{1200}=\frac{21}{400}=0,0525$

b. Soit D l'objet prélevé est défectueux , $\overline{D}$ l'objet prélevé ne soit pas défectueux
il y a 1131 objets non défectueux parmi les 1200 objets .Donc $p(\overline{D})=\frac{1131}{1200}=\frac{377}{400}=0,9425$

Partie II

$p(X=2)=1-p(X=0)-p(X=1)-p(X=3)$, soit $p(X=2)=0,0197$

1. Loi de probabilité de X est donné par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	0, 9425	0, 0318	**0,0197**	0, 006

2. Loi de probabilité de Y

Y est la variable aléatoire qui , à un objet prélevé au hasard tout dans la production , fait correspondre Son prix de vente donc Y peut prendre les valeurs : 56 15 10 et 1

$p(Y=56)=p(X=0)=0,9425$. $p(Y=15)=p(X=1)=0,0318$ $p(Y=10)=p(X=2)=0,0197$

$p(Y=1)=p(X=3)=0,006$

a.

nombre de défauts x_i	0	1	2	3
prix de vente en euros y_i	56	15	10	1
$p(Y=y_i)$	**0, 9425**	**0, 0318**	**0,0197**	**0, 006**

b. $E(Y)=\sum_{i=0}^{3} y_i\, p(Y=y_i)=1\times 0,006+10\times 0,0197+15\times 0,0318+56\times 0,9425=53,46$

ce qui signifie qu'en moyenne un objet est vendu $53,46$ €.

<u>Exercice 10- corrigé</u>

1.

Nombre d'ordinateur	R_2 se produit	R_3 ne se produit pas	Total
R_2 se produit	**1**	**9**	**10**
R_3 ne se produit pas	**19**	**971**	**990**
Total	**20**	**980**	**1000**

2. a) l'événement $(X=0)$ correspond à l'événement « R_2 ne se produit pas et R_3 ne se produit pas »

Donc $p(X=0)=\frac{971}{1000}=0,971$

b) L'événement $(X=150)$ correspond à l'événement « R_2 se produit et R_3 ne se produit pas »

Donc $p(X=150)=\frac{9}{1000}=0,009$

L'événement $(X=200)$ correspond à l'événement « R_2 ne se produit pas et R_3 se produit »

Donc $p(X=200)=\frac{19}{1000}=0,019$

L'événement $(X=350)$ correspond à l'événement « R_2 se produit et R_3 se produit »

Donc $p(X=350)=\frac{1}{1000}=0,001$

Loi de probabilité de la variable aléatoire X

x_i	**0**	**150**	**200**	**350**
$p(X=x_i)$	**0, 971**	**0, 009**	**0,019**	**0, 001**

c) Espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X

$$E(X)=\sum_{i=0}^{3} x_i\, p(X=x_i)=0\times 0,971+150\times 0,009+200\times 0,018+350\times 0,001=5,5$$

3. On a $E(X)=5,5$ ce qui signifie que lorsque l'acheteur achète un ordinateur il dépense en moyenne $5,5$ en réparation au cours des 3 premières années .

Si le fabricant propose l'extension de garantie payante de deux ans à un prix de 50 on peut donc dire que cette extension est favorable au fabricant (l'acheteur se fait avoir)