

Tp n° 2

MATHEMATIQUES – INTEGRATIONS

Exercice 1

On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(\omega x) e^{-px} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(\omega x) e^{-px} = 0$, pour tous réels $\omega \neq 0$ et $p > 0$.

1. Calculer l'intégrale $J(x) = \int_0^x \sin(t) e^{-pt} dt$ et en déduire la valeur de $I(x) = \int_0^x \cos(t) e^{-pt} dt$,

En déduire l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-pt} dt$ et l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-pt} dt$

2. Calculer l'intégrale $I(x) = \int_0^x \cos(\omega t) e^{-pt} dt$, puis l'intégrale $J(x) = \int_0^x \sin(\omega t) e^{-pt} dt$

Vérifier que $\int_0^{+\infty} \cos(\omega t) e^{-pt} dt = \frac{p}{\omega} \int_0^{+\infty} \sin(\omega t) e^{-pt} dt$. (on posera $u' = \cos \omega t$ et $v = e^{-pt}$)

En déduire la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \cos(\omega t) e^{-pt} dt$ et de $J = \int_0^{+\infty} \sin(\omega t) e^{-pt} dt$.

3. Calculer $A(x) = \int_0^x t e^{-pt} dt$, $B(x) = \int_0^x t^2 e^{-pt} dt$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t e^{-pt} dt$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t^2 e^{-pt} dt$.

Peut-on généraliser ces résultats ? $I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-pt} dt$ et $F_n(p) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} dt$

Exercice 2.

On considère le signal électrique représenté par la fonction numérique φ de la variable réelle t , paire, périodique de période 2π et telle que : $\varphi(t) = \pi^2 - 2\pi t$ si $t \in [0; \pi/2]$ et $\varphi(t) = 0$ si $t \in]\pi/2; \pi]$. et dont la courbe représentée ci-dessous sur l'intervalle $t \in [-5\pi/2; 5\pi/2]$.

1°. Tracer, dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ unité graphique 1 cm), la courbe représentative de f sur $[-5\pi/2; 5\pi/2]$

2°. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. à l'aide d'une intégration par parties, calculer en fonction de n : $I = \int_0^{\pi/2} (\pi^2 - 2\pi t) \cos(nt) dt$.

3°. a. on donne $b_n = \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - 2\pi t) \sin(nt) dt$ Pour $n \geq 1$, donner la valeur de b_n .

b. on donne $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - 2\pi t) dt$ et $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - 2\pi t) \cos(nt) dt$. Calculer a_0 et a_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Montrer que, pour $p \geq 1$ on a : $a_{2p} = \frac{1 - (-1)^p}{p^2}$.

d. En déduire, pour $k > 0$, la valeur de a_{4k} et de a_{4k+2} en fonction de k .

e. Calculer a_{2p+1} en fonction p .

Exercice-3

Soit la fonction numérique f de la variable réelle t telle que : $\begin{cases} f \text{ est impaire et de période } 2\pi \\ f(t) = 1 - \cos 2t \text{ si } 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$

1) Etudier les variations de f sur $[0; \pi]$. Tracer, dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ unité graphique 1 cm), la courbe représentative de f sur $[-2\pi; 2\pi]$.

2) Calculer la valeur efficace, E_f , de la fonction f .

3) On admet que, pour tout réel t , les nombres a_0, a_n et b_n sont définies par :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt ; b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

a) Calculer a_0 . Justifier que, pour $n \geq 0$, $a_n = 0$

b) Calculer b_2 .

c) Calculer b_n pour $n \geq 1$ et $n \neq 2$. (on précisera le résultat suivant la parité de n).

d) Calculer b_1 ; b_3 ; b_5 et b_7

Exercice 4

1°) Soit n entier naturel non nul. On pose : $I_n = \int_0^\pi (t - \pi)^2 \cos(nt) dt$ et $J_n = \int_0^\pi (t - \pi) \sin(nt) dt$

Montrer en intégrant par parties, que : $J_n = -\frac{\pi}{n}$ et $I_n = \frac{2\pi}{n^2}$

2°) On considère un signal périodique modélisé par la fonction $t \mapsto u(t)$, de période 2π , paire et définie par : $u(t) = (t - \pi)^2$ pour $t \in [0; \pi]$

a) Tracer dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la représentation graphique de la fonction u , pour t variant entre -2π et 6π .

b) Calculer $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi u(t) dt$; $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi u(t) \cos(nt) dt$.

3°) On suppose désormais que le signal u est une tension appliquée aux bornes d'un circuit électrique.

Le carré de la tension efficace est donnée par la formule : $U_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi u^2(t) dt$

Calculer U_{eff} et donner une approximation décimale à 10^{-3} près.

Exercice 5

1- Soit n un entier naturel. On appelle I_n l'intégrale : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin t \cos(2nt) dt$

Calculer I_n . Vérifier que $I_n = \frac{1}{1 - 4n^2}$.

2 - On considère un signal modélisé par la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = |\sin t|$.

a) Montrer que la fonction u est π -périodique et paire.

b) Tracer, dans un repère orthonormal, la représentation graphique de la fonction u , pour $t \in [-\pi, 2\pi]$ (unité graphique : 2 cm).

c) On note $a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u(t) \cos(2nt) dt$ et $b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u(t) \sin(2nt) dt$. Prouver, sans calcul, que $b_n = 0$.

Calculer a_0 et a_n .

3 - On suppose que le signal u est une tension appliquée aux bornes d'un circuit électrique.

On note U_{eff} la tension efficace associée à u . Le carré de U_{eff} est alors : $U_{eff}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi/2} u^2(t) dt$

Calculer U_{eff} .

Exercice 6

Soit la fonction f de la variable réelle t définie par :

1° Représenter graphiquement f sur $[-2, 6]$.

2° soit $f_e^2 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f^2(t) dt$. Calculer f_e la valeur efficace de f .

3° On donne $a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (t-1) \cos n\omega t dt$ et $b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (t-1) \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt$

a) Donner la valeur de b_n .

b) Calculer a_0 et, pour $n \geq 1$, a_n (Préciser les valeurs de a_{2p} et de a_{2p+1}).

$$\begin{cases} f(t) = t - 1 \text{ pour } t \in [0; 2] \\ f \text{ est paire} \\ f \text{ est périodique de période } 4 \end{cases}$$

Corrigé

Exercice 1

$$J(x) = \int_0^x \sin(t)e^{-pt} dt = \left[-\cos(t)e^{-pt} \right]_0^x - p \int_0^x \cos(t)e^{-pt} dt \quad J(x) = -\cos(x)e^{-px} + 1 - p \int_0^x \cos(t)e^{-pt} dt$$

$$I(x) = \int_0^x \cos(t)e^{-pt} dt = \left[\sin(t)e^{-pt} \right]_0^x + p \int_0^x \sin(t)e^{-pt} dt = \sin(x)e^{-px} + p \int_0^x \sin(t)e^{-pt} dt$$

$$\int_0^x \cos(t)e^{-pt} dt = \sin(x)e^{-px} - p \cos(x)e^{-px} + p - p^2 \int_0^x \cos(t)e^{-pt} dt$$

$$(1 + p^2) \int_0^x \cos(t)e^{-pt} dt = \sin(x)e^{-px} - p \cos(x)e^{-px} + p \Leftrightarrow (1 + p^2) \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-pt} dt = p$$

$$\int_0^x \cos(t)e^{-pt} dt = \left(\sin(x)e^{-px} - p \cos(x)e^{-px} + p \right) \times \frac{1}{p^2 + 1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x \cos(t)e^{-pt} dt \right) = \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-pt} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin(x)e^{-px} - p \cos(x)e^{-px} + p \right) \times \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin(x)e^{-px} \right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-p \cos(x)e^{-px} \right) = 0. \text{ Donc } \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-pt} dt = (p) \times \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + 1}$$

$$\text{Soit } p > 0. \text{ l'égalité } I(x) = \int_0^x \cos(t)e^{-pt} dt = \sin(x)e^{-px} + p \int_0^x \sin(t)e^{-pt} dt$$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-pt} dt = p \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-pt} dt, \text{ on en déduit : } \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \times \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$J(x) = \int_0^x \sin(\omega t)e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{\omega} \cos(\omega t)e^{-pt} \right]_0^x - \frac{p}{\omega} \int_0^x \cos(\omega t)e^{-pt} dt \quad J(x) = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega x)e^{-px} + \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega} \int_0^x \cos(\omega t)e^{-pt} dt$$

$$I(x) = \int_0^x \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t)e^{-pt} \right]_0^x + \frac{p}{\omega} \int_0^x \sin(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x)e^{-px} + \frac{p}{\omega} \int_0^x \sin(\omega t)e^{-pt} dt$$

$$\int_0^x \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x)e^{-px} - \frac{p}{\omega^2} \cos(\omega x)e^{-px} + \frac{p}{\omega^2} - \frac{p^2}{\omega^2} \int_0^x \cos(\omega t)e^{-pt} dt$$

$$\left(1 + \frac{p^2}{\omega^2} \right) \int_0^x \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x)e^{-px} - \frac{p}{\omega^2} \cos(\omega x)e^{-px} + \frac{p}{\omega^2} \Leftrightarrow \frac{\omega^2 + p^2}{\omega^2} \int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{p}{\omega^2}$$

$$\int_0^x \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \left(\frac{1}{\omega} \sin(\omega x)e^{-px} - \frac{p}{\omega^2} \cos(\omega x)e^{-px} + \frac{p}{\omega^2} \right) \times \frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x \cos(\omega t)e^{-pt} dt \right) = \int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\omega} \sin(\omega x)e^{-px} - \frac{p}{\omega^2} \cos(\omega x)e^{-px} + \frac{p}{\omega^2} \right) \times \frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\omega} \sin(\omega x)e^{-px} \right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{p}{\omega^2} \cos(\omega x)e^{-px} \right) = 0. \text{ Donc } \int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \left(\frac{p}{\omega^2} \right) \times \frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

Soient $\omega \neq 0$ et $p > 0$. l'égalité

$$I(x) = \int_0^x \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x)e^{-px} + \frac{p}{\omega} \int_0^x \sin(\omega t)e^{-pt} dt \text{ donc } \int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{p}{\omega} \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-pt} dt,$$

$$\text{on en déduit : } \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{\omega}{p} \times \frac{p}{p^2 + \omega^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

$$c. \int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(p-i\omega)t} + e^{-(p+i\omega)t} dt$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega} \right] = \frac{1}{2} \frac{p+i\omega + p-i\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{1}{2} \frac{2p}{p^2 + \omega^2} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sin(\omega t) e^{-pt} dt &= \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) e^{-pt} dt = \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{-(p-i\omega)t} - e^{-(p+i\omega)t} dt \\ \text{d. } &= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega} \right] = \frac{1}{2i} \frac{p+i\omega - p+i\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{1}{2i} \frac{2i\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$\text{e. } \int_0^{+\infty} e^t e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{(1-p)t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-1)t} dt = \left[\frac{1}{p-1} e^{-(p-1)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p-1} \text{ avec } \operatorname{Re}(p) > 1$$

$$\text{f. } \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+1)t} dt = \left[-\frac{1}{p+1} e^{-(p+1)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{3. a. } f(t) = \cos t : \int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-pt} dt &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{it} + e^{-it}) e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(p-i)t} + e^{-(p+i)t} dt \text{ pour } \operatorname{Re}(p) > 0 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i} \right] = \frac{1}{2} \frac{p+i + p-i}{p^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{2p}{p^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } g(t) = \sin t : \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-pt} dt &= \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} (e^{it} - e^{-it}) e^{-pt} dt = \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{-(p-i)t} - e^{-(p+i)t} dt \text{ pour } \operatorname{Re}(p) > 0 \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i} \right] = \frac{1}{2i} \frac{p+i - p+i}{p^2 + 1} = \frac{1}{2i} \frac{2i}{p^2 + 1} = \frac{1}{p^2 + 1}. \end{aligned}$$

Fonctions puissances $t \mapsto t^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$n = 1$ Considérons la fonction $f_1(t) = t U(t)$, on obtient : $\int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt$

On peut procéder à une intégration par parties, en posant : $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-pt}$, on obtient : $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\frac{1}{p} e^{-pt}$ d'où (si $p \neq 0$) : $\int_0^x t e^{-pt} dt = \left[\frac{-te^{-pt}}{p} \right]_0^x + \frac{1}{p} \int_0^x e^{-pt} dt = \left[\frac{-te^{-pt}}{p} - \frac{1}{p} \frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^x = e^{-px} \left(\frac{-x}{p} - \frac{1}{p^2} \right) + \frac{1}{p^2}.$

On obtient pour $p > 0$: $\int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2}.$

$n = 2$: $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-pt} dt$. On peut procéder à une intégration par parties, en posant : $u(t) = t^2$ et $v'(t) = e^{-pt}$, on obtient : $u'(t) = 2t$ et $v(t) = -\frac{1}{p} e^{-pt}$ d'où (si $p \neq 0$) :

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2 e^{-pt} dt &= \left[\frac{-t^2 e^{-pt}}{p} \right]_0^x + \frac{2}{p} \int_0^x t e^{-pt} dt = \left[\frac{-t^2 e^{-pt}}{p} \right]_0^x + \frac{2}{p} \int_0^x t e^{-pt} dt, \text{ on remarque que } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-px} = 0 \text{ et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t e^{-pt} dt &= \frac{1}{p^2} \text{ d'où : } \int_0^{+\infty} t^2 e^{-pt} dt = \frac{2}{p^3}. \end{aligned}$$

On sait déjà que pour $p > 0$, $F_0(p) = \frac{1}{p}$; $F_1(p) = \frac{1}{p^2}$ et $F_2(p) = \frac{2}{p^3}$. On peut procéder à une intégration par parties, en posant : $u(t) = t^n$ et $v'(t) = e^{-pt}$, on obtient : $u'(t) = nt^{n-1}$ et $v(t) = -\frac{1}{p} e^{-pt}$ d'où (si $p \neq 0$) :

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-pt} dt = \left[\frac{-t^n e^{-pt}}{p} \right]_0^x + \frac{n}{p} \int_0^x t^{n-1} e^{-pt} dt = \frac{-x^n e^{-px}}{p} + \frac{n}{p} \int_0^x t^{n-1} e^{-pt} dt ; \text{ si } p > 0 \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-px} = 0$$

Donc l'intégrale $F_n(p) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} dt$ est convergente et $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x) = F_n(p).$

supposons désormais $p > 0$. $F_n(p) = \frac{n}{p} F_{n-1}(p)$ et $F_{n-1}(p) = \frac{n-2}{p} F_{n-2}(p)$; $F_{n-2}(p) = \frac{n-2}{p} F_{n-3}(p), \dots$

$F_3(p) = \frac{3}{p} F_2(p)$ et $F_2(p) = \frac{2}{p} F_1(p) = \frac{2}{p^3}$ donc on déduit de proche en proche que

$$F_n(p) = \frac{n}{p} \times \frac{(n-1)}{p} \times \frac{(n-2)}{p} \times \frac{3}{p} \times \frac{2}{p} F_1(p), \text{ donc pour tout } p > 0, F_n(p) = \frac{n}{p} \times \frac{(n-1)}{p} \times \frac{(n-2)}{p} \times \frac{3}{p} \times \frac{2}{p} \times \frac{1}{p^2}$$

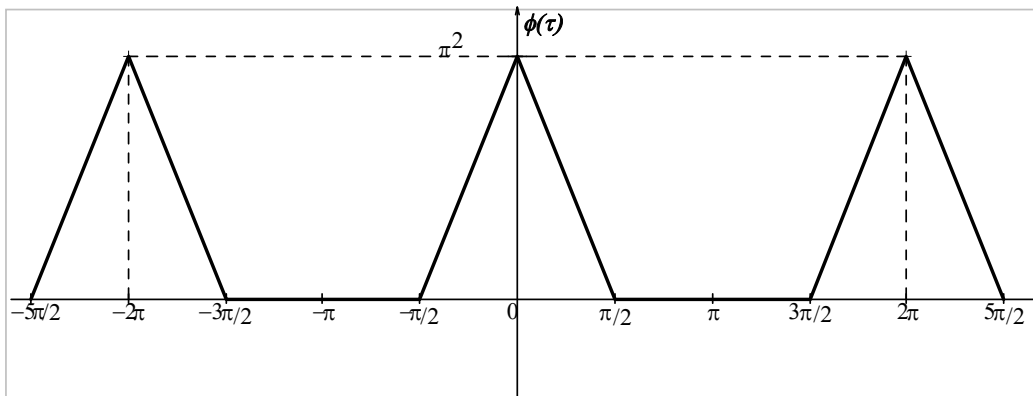
On admet que $n(n-1)(n-2) \dots 3 \times 2 \times 1 = n!$ (factoriel n). Nous admettrons qu'on obtient ainsi de proche

en proche les transformées de Laplace des fonctions $t \mapsto t^n$. On conclut que $F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, n \in \mathbb{N}$.

$$F_n(p+a) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}; p+a > 0 \quad n \in \mathbb{N} \text{ et } n=1 : F_1(p+a) = \frac{1}{(p+a)^2}.$$

Exercice 2

1°.



2°. On pose $u(t) = \pi^2 - 2\pi t$; $u(t) = -2\pi$ et $v'(t) = \cos(nt)$; $v'(t) = \frac{\sin(nt)}{n}$

$$I = \int_0^{\pi/2} (\pi^2 - 2\pi t) \cos(nt) dt = \left[\frac{(\pi^2 - 2\pi t) \sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} (-2\pi) (\sin(nt)) dt$$

$$I = 0 + \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} 2\pi \sin(nt) dt = \frac{2\pi}{n} \left[\frac{-\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi/2} = \frac{2\pi}{n^2} \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$$

3°. La fonction f est paire donc $b_n = 0$. Or $\varphi(t) = 0$ si $t \in [-\pi; -\pi/2] \cup [\pi/2; \pi]$,

$$b. a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\pi/2} \varphi(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^0 \varphi(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \varphi(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \varphi(t) dt$$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\pi^2 - 2\pi t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\pi^2 - 2\pi t) dt = \frac{1}{\pi} \left[\pi^2 t - \pi t^2 \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{4} \right] = \frac{\pi^2}{4}$$

$$c. a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} \varphi(t) \cos(nt) dt + \int_{-\pi/2}^0 \varphi(t) \cos(nt) dt + \int_0^{\pi/2} \varphi(t) \cos(nt) dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \varphi(t) \cos(nt) dt \right)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\pi^2 - 2\pi t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\pi^2 - 2\pi t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} I = \frac{2}{\pi} \times \frac{2\pi}{n^2} \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) = \frac{4}{n^2} \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$$

$$d. \text{ Si } n \text{ est pair on a : } a_{2p} = \frac{4}{(2p)^2} \left(1 - \cos(p\pi) \right) = \frac{1}{p^2} (1 - (-1)^p)$$

$$e. a_{4k} = \frac{4}{(4k)^2} \left(1 - \cos(2k\pi) \right) = 0 \text{ et } a_{4k+2} = \frac{4}{(4k+2)^2} \left(1 - \cos\left(\frac{4k+2}{2}\pi\right) \right) = \frac{1}{(2k+1)^2} \left(1 - \cos((2k+1)\pi) \right) = \frac{2}{(2k+1)^2}$$

$$f. a_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)^2} \left(1 - \cos\left(\frac{2p+1}{2}\pi\right) \right) = \frac{4}{(2p+1)^2} \left(1 - \cos\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{4}{(2p+1)^2}.$$

Exercice 3

1. f est dérivable sur $[0; \pi]$ et $f'(t) = 2\sin(2t)$

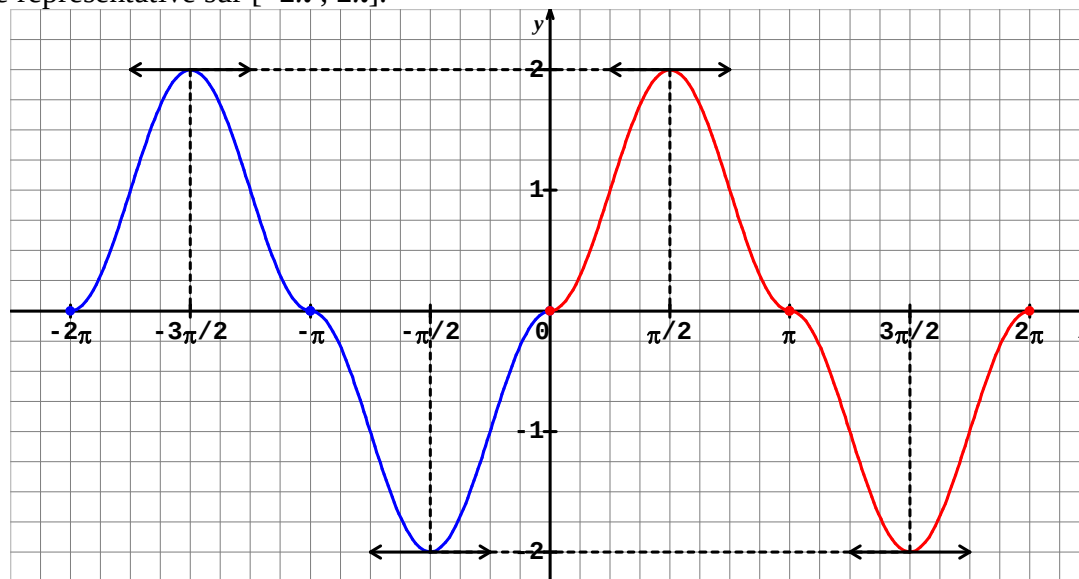
$$f'(t) = 0 \text{ équivaut à } \sin 2t = 0 \quad \sin 2t = \sin 0 \quad t = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ donc } t = \frac{\pi}{2} \text{ sur } [0; \pi].$$

Si $t \in [0; \pi/2]$ $2t \in [0; \pi]$ et $\sin(2t) \geq 0$ sur $[0; \pi]$ donc $\sin(2t) \geq 0$ sur $[0; \pi/2]$.

Si $t \in [\pi/2; \pi]$ $2t \in [\pi; 2\pi]$ et $\sin(2t) \leq 0$ sur $[\pi; 2\pi]$ donc $\sin(2t) \leq 0$ sur $[\pi/2; \pi]$

t	0	$\pi/2$	π
$f'(t)$	0	+	-
$f(t)$	0	2	0

Courbe représentative sur $[-2\pi; 2\pi]$.



$$2. E_f^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t)^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2}\right) dt$$

$$E_f^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2}\right) dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{3}{2}t - \sin(2t) + \frac{1}{8}\cos 4t \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \times \frac{3\pi}{2} = \frac{3}{2} \text{ donc } E_f = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$3. I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) dt = \frac{1}{2\pi} \left[t - \frac{1}{2}\sin 2t \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \times \pi = \frac{1}{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^0 -f(-t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = 0$$

f est une fonction impaire donc tous les a_n sont nuls.

$$b. b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

$$b_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos(2t)) \sin(2t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2t) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(2t) \sin(2t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2t) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(4t)}{2} dt$$

$$b_2 = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t) \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = 0$$

$$c. \text{ soit } n \geq 1 \text{ et } n \neq 2 : \sin(nt) \cos(mt) = \frac{1}{2} [\sin((n+m)t) + \sin(n-m)t]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1 - \cos(2t)) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(2t) \sin(nt) dt$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\sin(n+2)t + \sin(n-2)t] dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2}{n} \cos(nt) + \frac{1}{(n+2)} \cos((n+2)t) + \frac{1}{(n-2)} \cos((n-2)t) \right]_0^\pi$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{-1}{n} (\cos(n\pi) - 1) \right) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{(n+2)} \cos(n+2)\pi + \frac{1}{(n-2)} \cos(n-2)\pi \right) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{(n+2)} \cos 0 + \frac{1}{(n-2)} \cos 0 \right)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{-1}{n} ((-1)^n - 1) \right) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)} + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)} \right) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n-2)} \right)$$

Si n est pair $b_{2p} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{-1}{2p} ((-1)^{2p} - 1) \right) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{(2p+2)} + \frac{1}{(2p-2)} \right) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{(2p+2)} + \frac{1}{(2p-2)} \right) = 0$

Si n est impair $n = 2p + 1$

$$b_{2p+1} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{-1}{(2p+1)} ((-1)^{2p+1} - 1) \right) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^{2p+3}}{2p+3} + \frac{(-1)^{2p-1}}{2p-1} \right) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{(2p+3)} + \frac{1}{(2p-1)} \right) = \frac{4}{(2p+1)\pi} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{2p+3} + \frac{2}{2p-1} \right)$$

$$= \frac{4}{(2p+1)\pi} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{2(2p-1) + 2(2p+3)}{(2p+3)(2p-1)} \right) = \frac{4}{(2p+1)\pi} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{4p-2+4p+6}{(2p+3)(2p-1)} \right) = \frac{4}{(2p+1)\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{2p+1}{(2p+3)(2p-1)} \right)$$

$$= \frac{4(2p+3)(2p-1)}{(2p+1)(2p+3)(2p-1)\pi} - \frac{4(2p+1)^2}{(2p+1)(2p+3)(2p-1)\pi} = 4 \frac{(2p+3)(2p-1) - (2p+1)^2}{(2p+1)(2p+3)(2p-1)\pi} = 4 \frac{4p^2 + 4p - 3 - 4p^2 - 4p - 1}{(2p+1)(2p+3)(2p-1)\pi}$$

$$b_{2p+1} = \frac{-16}{(2p+1)\pi((2p+1)^2 - 4)}$$

$$4. \quad b_1 = \frac{-16}{\pi(1-4)} = \frac{16}{3\pi} ; \quad b_3 = \frac{-16}{3\pi(9-4)} = \frac{-16}{15\pi} ; \quad b_5 = \frac{-16}{5\pi(25-4)} = \frac{-16}{105\pi} ; \quad b_7 = \frac{-16}{7\pi(49-4)} = \frac{-16}{315\pi}$$

Exercice 4

1. Soit n un entier naturel non nul. $I_n = \int_0^\pi (t - \pi) \sin(nt) dt$. on effectue une intégration par parties :

$u(t) = t - \pi$; $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \sin(nt)$; $v(t) = -\frac{1}{n} \cos(nt)$, donc pour tout $n \geq 1$, on a :

$$I_n = \int_0^\pi (t - \pi) \sin(nt) dt = \left[-\frac{(t - \pi) \cos(nt)}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nt) dt = 0 - \frac{\pi}{n} + \frac{1}{n^2} [\sin(nt)]_0^\pi = -\frac{\pi}{n} . \quad I_n = -\frac{\pi}{n} .$$

$A_n = \int_0^\pi (t - \pi)^2 \cos(nt) dt$. on effectue une intégration par parties :

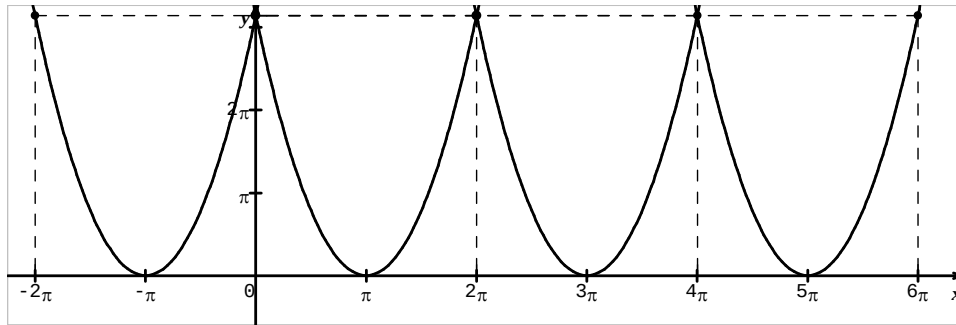
$u(t) = (t - \pi)^2$; $u'(t) = 2(t - \pi)$ et $v'(t) = \cos(nt)$; $v(t) = \frac{1}{n} \sin(nt)$, donc pour tout $n \geq 1$, on a :

$$A_n = \int_0^\pi (t - \pi)^2 \cos(nt) dt = \left[\frac{(t - \pi)^2 \sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi 2(t - \pi) \sin(nt) dt = -\frac{2}{n} I_n , \text{ donc } A_n = \frac{2\pi}{n^2} .$$

2.a) pour la représentation graphique de la fonction u sur $[-2\pi; 6\pi]$, on trace d'abord l'arc de la parabole correspondant à l'intervalle $[0; \pi]$ sur lequel $u(t)$ est un polynôme du second degré du type x^2 avec $x = t - \pi$. u étant paire, on obtient par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées l'arc de parabole correspondant

à l'intervalle $[-\pi; 0]$. u admettant pour période 2π , par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ on passe de l'intervalle $[-\pi; \pi]$ à $[-\pi+2\pi; \pi+2\pi] = [\pi; 3\pi]$ puis de $[\pi; 3\pi]$ à $[3\pi; 5\pi]$ et on complète jusqu'à 6π .

De même par translation de vecteur $-2\pi\vec{i}$ on passe de $[0; \pi]$ à $[-2\pi; -\pi]$.



b/ $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) dt$. on lit sur le formulaire : $a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt$ pour une fonction périodique, de période T .

ici $T = 2\pi$ et $a = -\pi$; u étant paire donc $\int_{-\pi}^0 u(t) dt = \int_0^{\pi} u(t) dt$, donc $a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} u(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(t) dt$

$$\text{Donc } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (t - \pi)^2 dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{3} (t - \pi)^3 \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}. \text{ d'où } a_0 = \frac{\pi^2}{3}.$$

On calcule de même $a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos(n\omega t) dt$ pour tout entier non nul.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos(n\omega t) dt ; a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t) \cos(n\omega t) dt, \text{ car les fonctions } u \text{ et } \cos \text{ sont paires, il en est de même}$$

pour $t \mapsto u(t) \cos nt$. donc $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t - \pi)^2 \cos(n\omega t) dt$ car $u(t) = (t - \pi)^2$ sur l'intervalle $[0; \pi]$.

Donc $a_n = \frac{2}{\pi} A_n$ où $A_n = \frac{2\pi}{n^2}$ d'après 1°. Donc $a_n = \frac{4}{n^2}$ pour tout n entier naturel $n \geq 1$.

La fonction u étant paire, $b_n = 0$ pour tout n entier naturel $n \geq 1$.

3. $U_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^2(t) dt$, la fonction u étant paire, il en est de même de la fonction u^2 . donc

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (t - \pi)^4 dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{(t - \pi)^5}{5} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^5}{5\pi} = \frac{\pi^4}{5} ; U_{eff}^2 \approx 19,483.$$

Exercise 5

1.) $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2nx dx$, ($n \in \mathbb{N}$). on sait que : $\sin(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)]$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2nx dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\sin(1+2n)x + \sin(1-2n)x) dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\sin(1+2n)x - \sin(2n-1)x) dx$$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2nx dx = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{-1}{1+2n} \right) \cos(1+2n)x + \left(\frac{1}{2n-1} \right) \cos(2n-1)x \right]_0^{\pi/2}$$

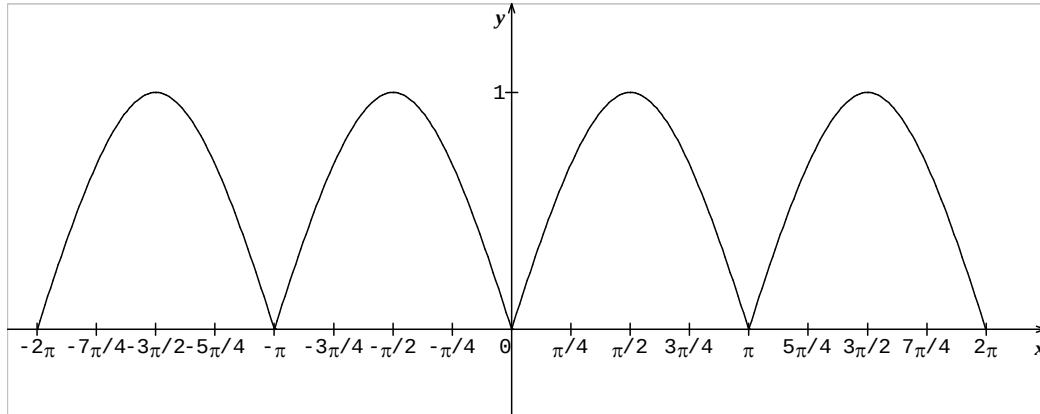
$$I_n = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{-1}{1+2n} \right) \cos(1+2n) \frac{\pi}{2} + \left(\frac{1}{2n-1} \right) \cos(2n-1) \frac{\pi}{2} - \left(\left(\frac{-1}{1+2n} \right) \cos(1+2n)0 + \left(\frac{1}{2n-1} \right) \cos(2n-1)0 \right) \right]$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(1+2n) \frac{\pi}{2} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos n\pi - \sin \frac{\pi}{2} \sin n\pi = 0 \\ \cos(2n-1) \frac{\pi}{2} &= \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos n\pi \cos \frac{\pi}{2} + \sin n\pi \sin \frac{\pi}{2} = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \cos(1+2n) \frac{\pi}{2} = \cos(2n-1) \frac{\pi}{2} = 0$$

$$I_n = \frac{1}{2} \left[- \left(\frac{-1}{1+2n} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right) = \frac{1}{2} \frac{2n-1 - (2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2} \frac{-2}{4n^2 - 1} = \frac{1}{1-4n^2}.$$

2. $u(t + \pi) = |\sin(t + \pi)| = |-\sin t| = |\sin t| = u(t)$ et $u(-t) = |\sin(-t)| = |-\sin t| = |\sin t| = u(t)$; Donc u est bien π -périodique et paire.

b. lorsque $t \in [0; \pi]$: $u(t) = |\sin t| = \sin t$ puisque $\sin t > 0$ sur $[0; \pi]$. sur cet intervalle la courbe C associée à u est la courbe représentative de la fonction sinus. comme u est π -périodique, la courbe représentative sur $[-\pi; 2\pi]$ est obtenue par translation de $\pi \vec{i}$ puis de $-\pi \vec{i}$ de l'élément C .



c. comme la fonction u est paire, on a donc $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{1}{\pi} [-\cos t]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} (1+1) = \frac{2}{\pi} \text{ puisque la fonction } f \text{ est paire}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin t| \cos(2nt) dt = \frac{2}{\pi} \left(2 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos(2nt) dt \right) \text{ puisque la fonction à intégrer est paire.}$$

$$\text{Donc } a_n = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{1-4n^2}.$$

$$\text{b. } a_0 = \frac{2}{\pi} ; a_1 = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{1-4} = \frac{-4}{3\pi} ; a_2 = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{1-16} = \frac{-4}{15\pi} ; a_3 = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{1-36} = \frac{-4}{35\pi}$$

$$a_4 = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{1-64} = \frac{-4}{63\pi}.$$

$$3. U_e^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 2t}{2} \right) dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 6

soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(t) = t-1 \text{ pour } t \in [0; 2] \\ f \text{ est paire} \\ f \text{ est périodique de période } 4 \end{cases}$$

2°)

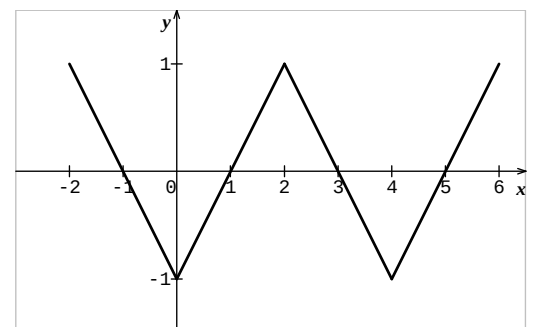
$$f_e^2 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f^2(t) dt = \frac{2}{4} \int_0^2 f^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 (t-1)^2 dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} (t-1)^3 \right]_0^2 = \frac{1}{3}.$$

3°) a. puisque f est une fonction paire, b_n est nul.

$$\text{b. on a : } a_0 = \frac{1}{4} \times 2 \int_0^2 (t-1) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{(t-1)^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{4} (1-1) = 0.$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (t-1) \cos \left(\frac{n\pi t}{2} \right) dt = \int_0^2 (t-1) \cos \left(\frac{n\pi t}{2} \right) dt.$$

$$\text{On intègre par parties, en posant : } u(t) = t-1 ; u'(t) = 1 \text{ et } v'(t) = \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) t, v(t) = \frac{2}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) t.$$



$$a_n = \int_0^2 (t-1) \cos\left(n \frac{\pi}{2} t\right) dt = \left[\frac{2(t-1)}{n\pi} \sin\left(n \frac{\pi}{2} t\right) \right]_0^2 - \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin\left(n \frac{\pi}{2} t\right) dt = 0 - \frac{2}{n\pi} \left[-\frac{2}{n\pi} \cos\left(n \frac{\pi}{2} t\right) \right]_0^2 = \frac{4}{n^2 \pi^2} (\cos(n\pi) - 1)$$

Deux cas :

1. n est pair, on pose $n = 2p$ où $n \in \mathbb{N}$ $a_{2p} = \frac{4}{n^2 \pi^2} (\cos(2p\pi) - 1) = 0$.

2. n est impair, on pose $n = 2p+1$ où $n \in \mathbb{N}$

$$a_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)^2 \pi^2} (\cos((2p+1)\pi) - 1) = \frac{4}{(2p+1)^2 \pi^2} (-1 - 1) = -\frac{8}{(2p+1)^2 \pi^2}.$$