
TP MATHEMATIQUES FONCTIONS REELLES BTS2

Exercice 1

Après avoir précisé le (ou les) intervalles où la fonction est dérivable , calculer les dérivées premières des fonctions f définies par :

- a. 1. $f(x) = \arccos(x^2 - 1)$; 2. $f(x) = \arcsin(2x - 1)$; 3. $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$
- b. 1. $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$; 2. $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \arcsin(x) - x$ 3. $f(x) = \sin(\arctan x)$
- c. 1. $f(x) = \arctan(2x)$; 2. $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$; 3. $f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$;
- d. 1. $f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1 - x^2}\right)$; 2. $f(x) = \frac{x}{1 + x^2} + \arctan(x)$; 3. $f(x) = \arccos\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$

e. Calculer, sur des ensembles de définition à préciser , $f'(x)$, $g'(x)$, $h'(x)$

$$f(x) = \arcsin(-x) + \arcsin(x) ; \quad g(x) = \arccos(-x) + \arccos(x) \quad \text{et} \quad h(x) = \arctan(-x) + \arctan(x)$$

- f. En déduire : (a) $\forall x \in [-1; 1] : \arcsin(-x) = -\arcsin(x)$;
 (b) $\forall x \in [-1; 1] : \arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$;
 (c) $\forall x \in \mathbb{R} : \arctan(-x) = -\arctan(x)$.

Primitives

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}$ sur $] -1/2 ; 1/2[$; 2. $f(x) = \frac{1}{4x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$ 3. $f(x) = \frac{1}{1 + a^2 x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $f(x) = \frac{1}{1 + x^2/4}$ sur $\mathbb{R}$; 5. $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2/2}}$ sur $] -\sqrt{2} ; \sqrt{2}[$

Exercice 2

On pose pour tout x appartenant à $[-1; 1]$: $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$

1. Calculer $f'(x)$. Déduire en calculons $f(0)$, que pour tout x appartenant à $[-1; 1]$: $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$
2. On considère pour tout réel $x > 0$ on pose $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$

Calculer $f'(x)$. Déduire en calculons $f(0)$, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

3. Montrer que pour tout x de $[-1; 1]$ on a les relations $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ et $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.

4. Montrer que pour tout x de $[-1; 1]$ on a les relations $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ et $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{et} \quad x \in] -1; 1[\quad \text{et} \quad \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \quad \text{pour} \quad x \in [-1; 1] \setminus \{0\} .$$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par : $f(x) = x \arccos x$.

1°) Déterminer $f'(x)$ pour $x \in] -1; 1[$.

2°) Si f'' désigne la dérivée seconde de f sur $] -1; 1[$, montrer que : $f''(x) = \frac{x^2 - 2}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$.

3°) Etudier le signe de $f''(x)$ et en déduire le tableau de variations de f' .

4°) Montrer que $f'(x) = 0$ admet une unique valeur α sur $]0;1[$. On donnera de α une valeur approchée

5°) Donner le tableau de variations de f , et montrer que f admet un extremum égal à $\frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = (2x-1)\arcsin x$

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [-1;1]$.
2. Calculer $f''(x)$ et montrer que $f''(x)$ est de signe de $-2x^2 - x + 4$.
3. Etudier le signe de $f''(x)$ pour $x \in [-1;1]$, puis établir le tableau de variation de f' .
4. En déduire qu'il existe une unique valeur α tel que $f'(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α .
5. Donner le tableau de variations de f .
6. Tracer la courbe dans un repère (unité graphique 5cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées)

Exercice 5

1. Soit φ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\varphi(w) = \pi - 2\arctan w$.

- a. Étudier les variations de φ . Déterminer les limites de φ en 0 et en $+\infty$.
- b. Dresser le tableau de variation de φ .

2. Soit φ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} + 3\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

- a. On note φ' la dérivée de la fonction φ . Calculer $\varphi'(\omega)$.
Déterminer le signe de $\varphi'(\omega)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
- b. Déterminer les limites de la fonction φ en 0 et en $+\infty$.

ω	0	$+\infty$
$\varphi'(\omega)$		
$\varphi(\omega)$		

3. Soit φ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2\arctan(20\omega)$

Étudier les variations de la fonction $\omega \mapsto \varphi(\omega)$ pour $\omega \in]0;+\infty[$

(On précisera les limites lorsque ω tend vers 0 par valeurs positives et lorsque ω tend vers $+\infty$).

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \arctan(x) + 1 - \frac{1}{x}$

- 1/ Montrer que $f(-x) + f(x) = 2$. et en déduire une symétrie pour la courbe représentative de f .
- 2/ Calculer la dérivée de f et en déduire le tableau de variation de f .
- 3/ En déduire le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = 0$ et donner une valeur approchée des solutions.

Exercice 7

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est une fonction impaire. En déduire le domaine d'étude de f .
3. Etudier les limites de f lorsque x tend vers 1.

Donner les coordonnées des points d'arrêt de la courbe (C) de la fonction f .

4. Etudier la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?
5. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .
6. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe au point d'abscisse 0.
7. Dans un repère orthonormal (unité graphique 2 cm), construire (T) et (C) .

Exercice 8

On admet que $\text{Arctan } a + \text{Arctan } b = \text{Arc tan} \left(\frac{a+b}{1-ab} \right) + n\pi$. Avec * si $ab < 1$ $n = 0$;

* si $ab > 1, a > 0, b > 0$ $n = 1$

* si $ab > 1, a < 0, b < 0$ $n = -1$.

Calculer $\text{Arctan} \frac{1}{2} + \text{Arctan} \frac{1}{3}$.

Corrigé

Exercice 1 : $f'(x) = \left(\arccos(x^2 - 1) \right)' = \frac{-2x}{\sqrt{1 - (x^2 - 1)^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{2x^2 - x^4}} = \frac{-2x}{x\sqrt{2 - x^2}} = -\frac{2}{\sqrt{2 - x^2}}$

$$f'(x) = \left(\arcsin(2x - 1) \right)' = \frac{2}{\sqrt{1 - (2x - 1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{4x - 4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}.$$

$$f'(x) = \left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{x^2}{1 + x^2}. \quad f'(x) = \left(x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} \right)' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{1 - x^2} \arcsin(x) - x \right)' = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \arcsin x + 1 - 1 = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \arcsin x.$$

$$f'(x) = \left(\arctan(2x) \right)' = \frac{2}{1 + (2x)^2} = \frac{2}{1 + 4x^2}. \quad f'(x) = \left(\arctan\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right) \right)' = \frac{\frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}}{1 + \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)^2} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

$$f'(x) = \left(\arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \right)' = \frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{1 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} = \frac{-2}{2x^2 + 2} = \frac{-1}{1 + x^2}.$$

$$f'(x) = \left(\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \right)' = \frac{\frac{2(1-x^2) + 4x^2}{(1-x^2)^2}}{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} = \frac{2 + 2x^2}{(1-x^2)^2 + 4x^2} = \frac{2 + 2x^2}{1 + x^4 - 2x^2 + 4x^2} = \frac{2(1+x^2)}{1 + 2x^2 + x^4} = \frac{2}{1 + x^2}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1+x^2} + \arctan(x) \right)' = \frac{1+x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \left(\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \right)' = -\frac{\frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = -\frac{\frac{-4x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{2}{1+x^2}.$$

Exercice 3

1. $f'(x) = \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, pour $x \in]-1; 1[$, f n'est pas dérivable en -1 et en 1.

$$2. \quad f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2} - x \left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right)}{1-x^2} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2(1-x^2) + 2x^2}{2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{(1-x^2) + x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(1-x^2)-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2-2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

3. $x^2 - 2$ est toujours négatif pour $x \in]-1;1[$ et donc $f''(x) < 0$.

4. f' est continue strictement décroissante sur $] -1;1[$.

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,47$$

$$f'(0,8) = \arccos(0,8) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{0,36}} = \arccos(0,8) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{0,6} \approx -0,69, \text{ donc } f'(x) = 0 \text{ admet une solution unique}$$

α sur $] -1;1[$. $0,5 < \alpha < 0,8$, comme f' est continue strictement décroissante l'équation $f'(x) = 0$ ne peut pas avoir de solution pour $x < 0,5$ ou pour $x > 0,8$. $f'(x)$ s'annule donc pour une valeur unique α sur $]0;1[$. De plus $f(0,6) \approx 0,18 > 0$ et $f(0,7) \approx -0,18 < 0$ donc $\alpha \in [0,6;0,7]$. on peut choisir $\alpha \approx 0,65$.

D'où le signe de $f'(x)$, puisque $f'(x)$ est strictement décroissante

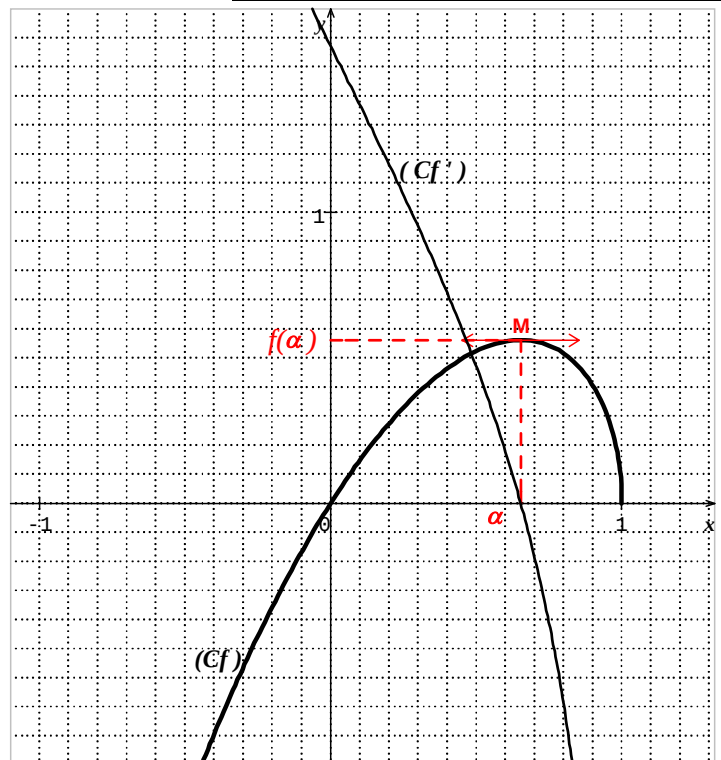
$$f'(x) > 0 \text{ sur }]-1;\alpha[\text{ et } f'(x) < 0 \text{ sur }]\alpha;1[.$$

5. Le maximum correspond à $f(\alpha)$, or $f(\alpha) = \alpha \arccos \alpha$

$$\text{et } f'(\alpha) = \arccos \alpha - \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \text{ mais } f'(\alpha) = 0$$

$$\text{Donc } \arccos \alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \text{ et } f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

x	-1	α	1
$f''(x)$	$-$		$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\pi$	$\frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}$	0



Exercice 4

$$f'(x) = 2 \arcsin x + \frac{(2x-1)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$f''(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2\sqrt{1-x^2} + 2x(2x-1)/2\sqrt{1-x^2}}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{2(1-x^2) + 2(1-x^2) + 2x^2 - x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{2-2x^2+2-2x^2+2x^2-x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x^2-x+4}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Pour $x \in]-1;1[$, $(1-x^2)\sqrt{1-x^2} > 0$, donc le signe de $f''(x)$ dépend du signe de $-2x^2-x+4$

Calculons $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (-2) \times 4 = 1 + 32 = 33 > 0$, donc il ya deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{33}}{-4} = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4} \approx -1,68 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{33}}{-4} = \frac{-1 - \sqrt{33}}{4} \approx 1,19$$

x	$-\infty$	x_1	-1	-1	x_2	$+\infty$	
$-2x^2 - x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$		0	$+$	$+$		0	
Variations de f'							

4. la fonction f' est strictement croissante sur l'intervalle $]-1;1[$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = +\infty$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left(2 \arcsin x + \frac{(2x-1)}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (2 \arcsin x) + \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left(\frac{(2x-1)}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (2 \arcsin x) = 2 \times (-\pi/2) = -\pi \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left(\frac{(2x-1)}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (2x-1) \times \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = -3 \times (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(2 \arcsin x + \frac{(2x-1)}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (2 \arcsin x) + \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{(2x-1)}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (2 \arcsin x) = 2 \times (\pi/2) = \pi \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{(2x-1)}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (2x-1) \times \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = 1 \times (+\infty) = +\infty.$$

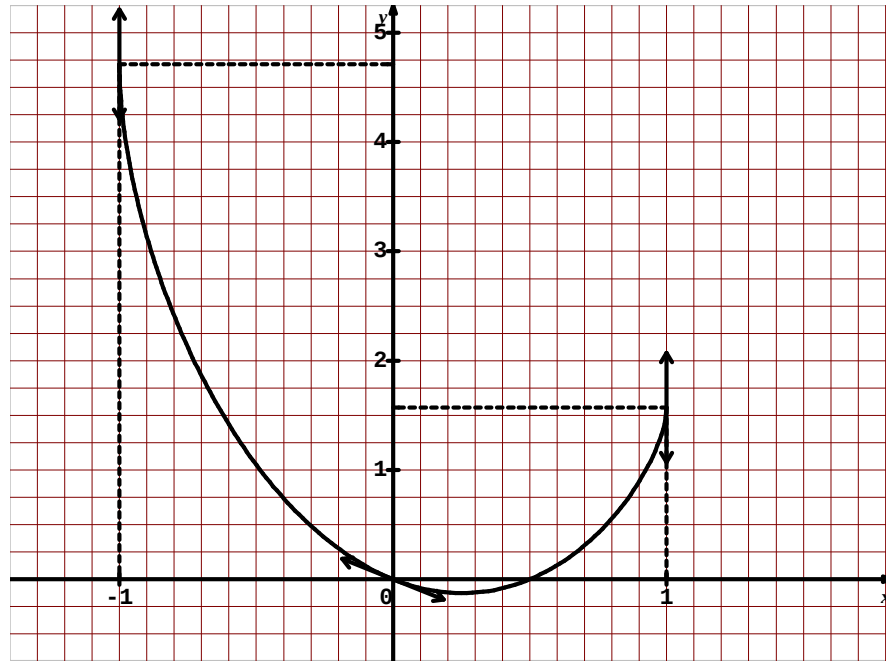
Donc il existe un réel unique $\alpha \in]-1;1[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

$f(0,2527) \approx -0,7 \times 10^{-4}$ et $f(0,2528) \approx 1,5 \times 10^{-4}$ donc $\alpha \approx 0,2528$ par excès.

5.

x	-1	α	1
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f			

$$m = f(\alpha) = -0,1264$$



Exercice 6

Comme $f(-x) + f(x) = \arctan(-x) + 1 + \frac{1}{x} + \arctan(x) + 1 - \frac{1}{x} = -\arctan(x) + \arctan(x) + 2 = 2$

On en déduit que, pour tout réel x , non nul, les points $M(x, f(x))$ et $N(-x, f(-x))$ sont symétriques par rapport à $I(0;1)$. (puisque $f(a-x) + f(a+x) = 2b$ avec $I(a;b)$ centre de symétrie).

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2+1}{x^2}, \text{ qui est positive.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + 1 \quad (\text{puisque } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad (\text{puisque } \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty)$$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$		$\frac{\pi}{2} + 1$

3. f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, elle définit une bijection de $]0; +\infty[$ sur $]-\infty; \frac{\pi}{2} + 1[$, comme

$$\frac{\pi}{2} + 1 > 0, \quad 0 \in]-\infty; \frac{\pi}{2} + 1[\text{ et l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une solution unique } \alpha \text{ sur }]0; +\infty[.$$

De plus $f(0,6) \approx -0,13 < 0$ et $f(0,65) \approx 0,04 > 0$ donc $\alpha = 0,625$.

En raison de symétrie par rapport à I ; comme f est continue, strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ sur

$$]-\frac{\pi}{2} + 1; +\infty[; \quad -\frac{\pi}{2} + 1 < 0 \text{ et } 0 \in]-\frac{\pi}{2} + 1; +\infty[\text{ et l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une solution unique } \beta \text{ sur}$$

$$]-\infty; 0[. \text{ De plus } f(-3,45) \approx 0,001 > 0 \text{ et } f(-3,5) \approx -0,007 < 0 \text{ donc } \beta = -3,5.$$

l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β .

Exercice 7

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$.

1. $u \mapsto \arctan(u)$ est définie sur $\mathbb{R}$ si u est définie sur, or $\frac{x}{1-x^2}$ est définie pour tout réel x tel que

$$1-x^2 \neq 0, \text{ c'est-à-dire } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, \text{ donc par composition on a : } D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[.$$

$$2. f(-x) = \arctan\left(\frac{-x}{1-(-x)^2}\right) = \arctan\left(\frac{-x}{1-x^2}\right) = -\arctan\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = -f(x), \text{ donc } f \text{ est une fonction}$$

impaire et par conséquent la courbe est symétrique par rapport à O .

on peut donc étudier la fonction sur l'intervalle $[0;1[\cup]1;+\infty[$ et compléter la courbe par symétrie par rapport à O.

$$3. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (1-x^2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (1-x)(1+x) = 2(1-1^-) = 0^+, \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x}{1-x^2} = +\infty, \text{ et}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \arctan\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = +\pi/2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (1-x^2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (1-x)(1+x) = 2(1-1^+) = 0^-, \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x}{1-x^2} = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \arctan\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = -\pi/2. \text{ On déduit que sur } [0;1[\cup]1;+\infty[, \text{ on a deux points d'arrêts :}$$

$$M(1; \pi/2) \text{ et } N(1; -\pi/2).$$

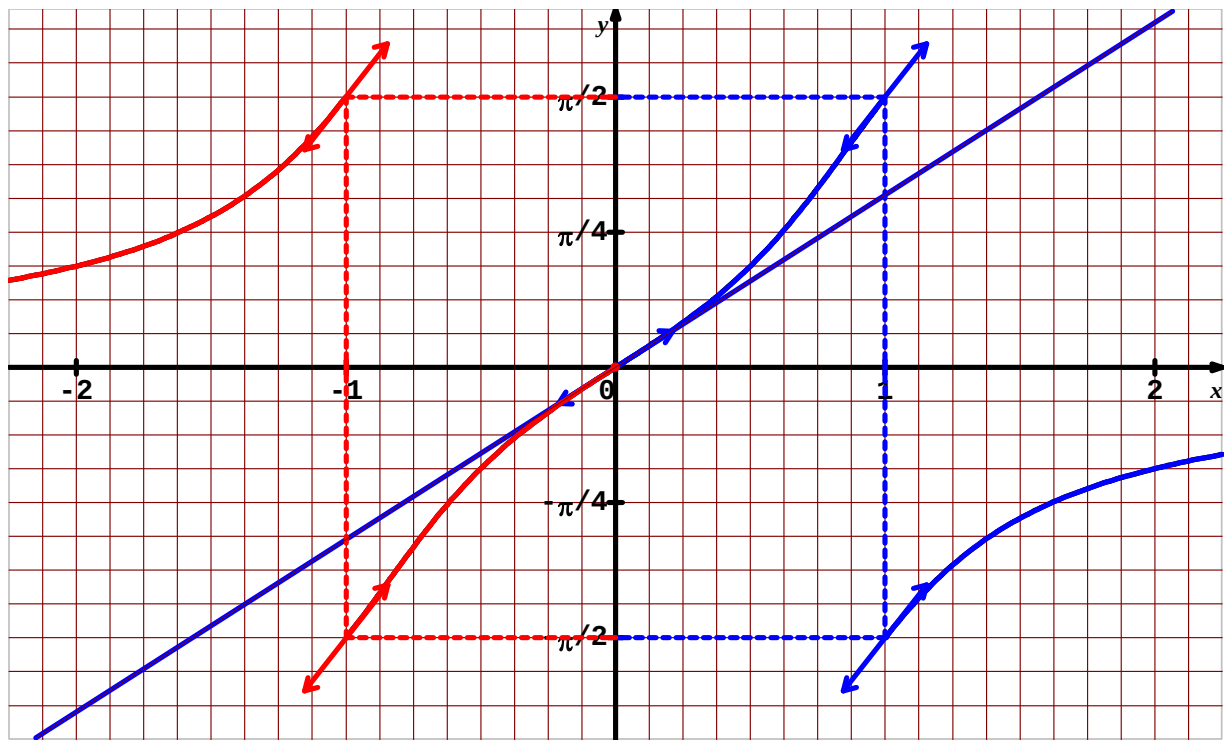
b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-x^2} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, on conclut que la courbe de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses).

$$4. (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}, \quad u' = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{1-x^2 - (-2x)x}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}}{1+\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2 + x^2} = \frac{1+x^2}{x^4 - x^2 + 1} > 0, \text{ donc } f \text{ est croissante sur } [0;1[\cup]1;+\infty[.$$

5. $f'(x) = \frac{1+x^2}{x^4 - x^2 + 1}$, donc $f'(0) = \frac{1+0}{0+1} = 1$ et $f(0) = \arctan\left(\frac{0}{1}\right) = \arctan(0) = 0$, d'où l'équation de tangente est $y = x$.

$$f'(1) = \frac{1+1^2}{1^4 - 1^2 + 1} = \frac{2}{1} = 2 \text{ et } f'(-1) = \frac{1+(-1)^2}{(-1)^4 - (-1)^2 + 1} = 2, \text{ donc le coefficient directeur aux points d'arrêt est égal à 2 (les tangentes sont parallèles).}$$



8. On a, pour tous réels a et b tels que $a + b \in D$:

$$\tan(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

Comme $a \in D$ et $b \in D$, on peut diviser numérateur et dénominateur par $\cos a \cos b$ (qui est non nul) :

$$\tan(a + b) = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

9. Partons du membre de droite. D'après les formules d'additions appliquées avec $b = a$, on obtient :

$$\frac{1 - \cos(2a)}{\sin(2a)} = \frac{1 - (\cos^2 a - \sin^2 a)}{2 \sin a \cos a} = \frac{(1 - \cos^2 a) + \sin^2 a}{2 \sin a \cos a} = \frac{2 \sin^2 a}{2 \sin a \cos a} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a$$

En particulier avec $a = \frac{\pi}{8}$, cela donne :

$$\tan \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} - 1$$

Et avec $a = \frac{\pi}{12}$, cela donne :

$$\tan \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3}$$