
TP MATHEMATIQUES FONCTIONS REELLES

Exercice 1

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie comme suit :

$$\begin{cases} f \text{ est paire} \\ f(t) = 1 - \sin t \text{ pour } 0 \leq t \leq \pi \\ f \text{ est périodique de période } \pi \end{cases}$$

1- Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.

Le plan sera muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm en abscisse, 5 cm en ordonnée).

2- Etudier les variations de la fonction f .

Exercice 2

Un signal est modélisé par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f \text{ est paire et périodique de période } \pi \\ f(t) = t \sin t \text{ pour } t \in [0 ; \pi/2] \end{cases}$$

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0 ; \pi/2]$.

2. Soit C_1 la partie de la représentation graphique de f sur l'intervalle $[0 ; \pi/2]$, relativement à un repère orthonormal du plan (unité graphique 2 cm).

Tracer les tangentes à C_1 aux points d'abscisses 0 et $\pi/2$. Tracer C_1 .

3. Dans le même repère tracer la représentation graphique C de f sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$

Exercice 3

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = (1 + \cos^2 t) \sin^2 t$

1. a . Montrer que f est paire et périodique de période 2π

b . Démontrer que la droite d'équation : $t = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe (C) sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

2. Montrer que $f'(t) = 4 \sin t \cos^3 t$. Rappels : $(u \times v)' = u'v + v'u$ et $(w^2)' = 2w'w$

3. Etudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ et donner le tableau de variations de f sur $[0 ; \pi]$

4. Montrer que $f(t) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} \cos 2t - \frac{1}{8} \cos 4t$, puis calculer $\int_{\pi/6}^{\pi/3} f(t) dt$

Exercice 4

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{12}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t \right)$

1. Montrer que f est impaire et périodique de période 2π

2. Démontrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie

3. Montrer que $f'(t) = \frac{24}{\pi} \cos 2t \cos t$. Rappels : $(\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right))$

4. Etudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ et donner le tableau de variations de f sur $[0 ; \pi]$.

5. Représenter graphiquement la courbe de la fonction f dans un repère orthonormal (unité 2 cm) sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$

6. Calculer $\int_{\pi/6}^{\pi/3} f(t) dt$.

Exercice 5

1. Etudier la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(t) = -2e^{-2t} + 3e^{-t/4}$

On montrera en particulier que la dérivée de g s'annule pour un nombre a et un seul dont on donnera une valeur exacte ; puis on déterminera une valeur approchée à 10^{-2} près de a et de $g(a)$.

2. Déterminer des valeurs approchées à 10^{-2} près de $g(1)$, $g(2)$, $g(4)$, $g(8)$ et $g(16)$. (Présenter les résultats

dans un petit tableau)

3. Construire la courbe représentative (C) de g dans un repère orthonormé (unité 1cm). On précisera la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Exercice 6

- 3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = 1 - \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2t}{3} + \frac{1}{15} \cos 4t \right)$

a- Démontrer que g est paire. Démontrer que g est périodique et admet pour période π .

b- On étudie g sur l'intervalle $[0 ; \pi/2]$.

Calculer $g'(t)$ et démontrer que l'on a : $g'(t) = -\frac{8}{3\pi} (\sin 2t) \left(1 + \frac{4}{5} \cos 2t \right)$

En déduire le sens de variation de g sur $[0 ; \pi/2]$.

c- Sur le graphique de la question 1), dessiner la courbe représentative de g sur $[0 ; \pi/2]$.

On placera les tangentes à cette courbe aux points d'abscisses 0 et $\pi/2$.

Exercice 7

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(t) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{\pi^2} \cos(\pi t)$

1° Montrer que φ est paire et périodique de période 4.

2° a) Calculer $\varphi'(t)$ pour tout réel t et vérifier que : $\varphi'(t) = \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right)$

b) En déduire le sens de variation de φ sur $[0 ; 2]$.

3° Construire dans un plan rapporté à un repère orthonormal, les courbes représentatives de f et de φ pour t appartenant à $[-2 ; 2]$. (Unité graphique : 4 cm).

Exercice 8

1. On considère le signal défini par la fonction f 2π -périodique, impaire définie sur $[0 ; \pi]$ par :

$$f(t) = t(\pi - t).$$

a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

Construire la courbe représentative de la fonction f, restreinte à l'intervalle $[0 ; \pi]$.

Démontrer que f est une fonction paire

b) Construire la courbe représentative de la fonction f, restreinte à l'intervalle $[-3\pi ; 3\pi]$.

- 2 - On considère un signal modélisé par la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = |\sin t|$.

a) Montrer que la fonction u est π -périodique et paire.

b) Tracer, dans un repère orthonormal, la représentation graphique de la fonction u, pour $t \in [-\pi, 2\pi]$ (unité graphique : 2 cm).

3. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de la variable t, telle que : $\begin{cases} f(t) = 1 + \cos t \text{ pour } t \in]0 ; \pi[\\ f \text{ est périodique de période } 2\pi \end{cases}$

Représenter graphiquement f sur $[-\pi ; 2\pi]$.

4. Soit f la fonction 2π -périodique définie par $f(t) = t^2$ sur $[-\pi ; \pi]$.

Tracer dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ une ébauche du graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi ; 3\pi]$

5. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire, π -périodique telle que $f(t) = \frac{\pi}{2}t$ si $t \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$

Tracer la représentation graphique de f sur $[-\pi ; \pi]$

6. Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 1 telle que :

$$\begin{cases} f(t) = 1/2 - \tau & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ f(t) = -\tau & \text{si } \tau \leq t \leq 1/2 \end{cases} \quad \text{où } \tau \text{ est un nombre réel tel que } 0 < \tau < 2. \text{ Uniquement dans cette question, on}$$

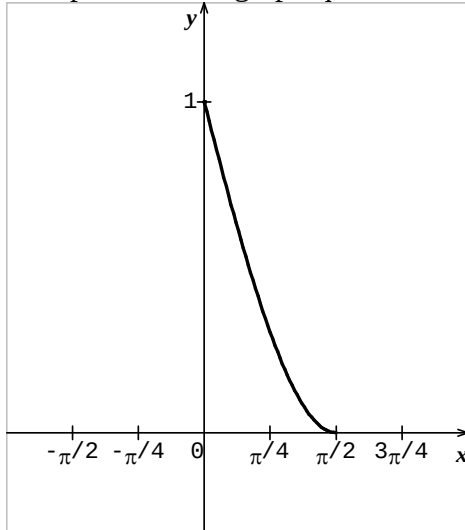
prendra $\tau = \frac{1}{6}$. Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ dans un repère orthonormal.

7- Soit la fonction numérique f de la variable réelle t telle que :
$$\begin{cases} f \text{ est impaire et de période } 2\pi \\ f(t) = 1 - \cos 2t \quad \text{si } 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

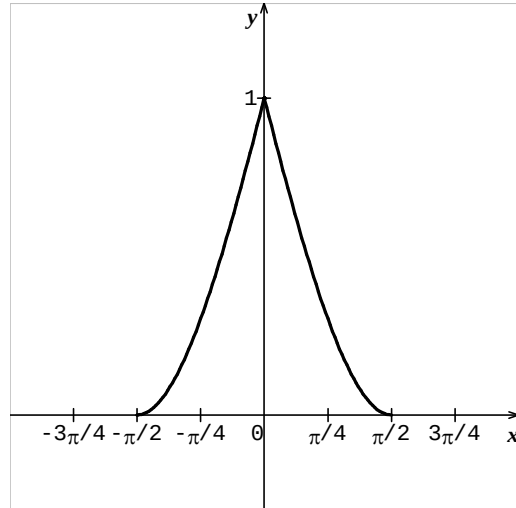
Etudier les variations de f sur $[0; \pi]$. Tracer, dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ unité graphique 1 cm), la courbe représentative de f sur $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 1

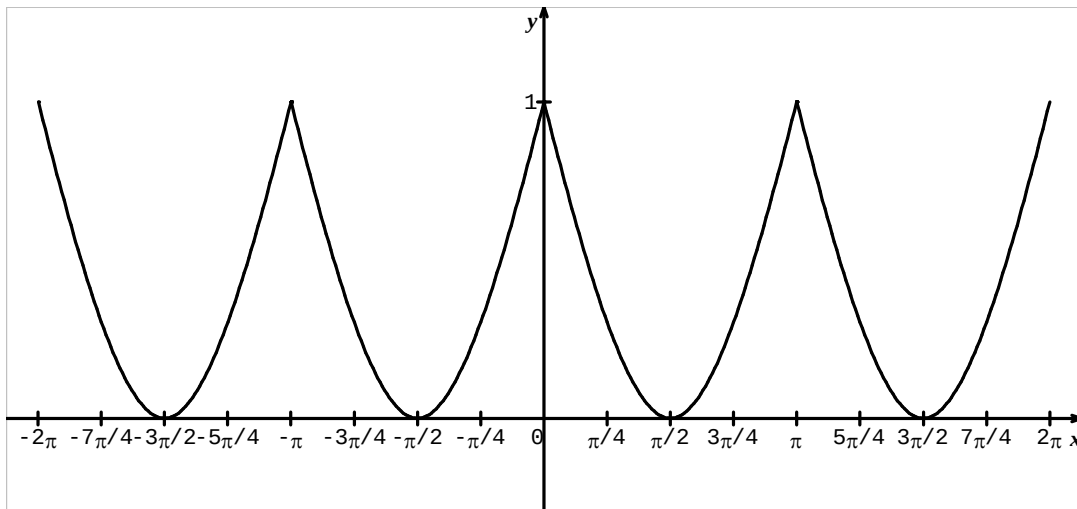
1. Représentation graphique de fonction



On dessine la courbe sur $[0; \frac{\pi}{2}]$



La fonction est paire donc son graphe est
Symétrique par rapport à l'axe $[Oy]$



f est périodique de période π donc $f(t + \pi) = f(t)$ et $f(-t + \pi) = f(-t)$

Or $t \in [0; \pi]$, donc $-t \in [-\pi; 0]$ et $-t + \pi \in [0; \pi]$

$f(-t + \pi) = 1 - \sin(-t + \pi) = 1 + \sin(-t) = 1 - \sin t = f(t)$ comme $f(-t + \pi) = f(-t)$ on déduit que

$f(-t) = f(t)$ et par conséquent f est paire

La fonction f est π -périodique donc le graphique est obtenu par translation de vecteur $k\pi\vec{i}$.

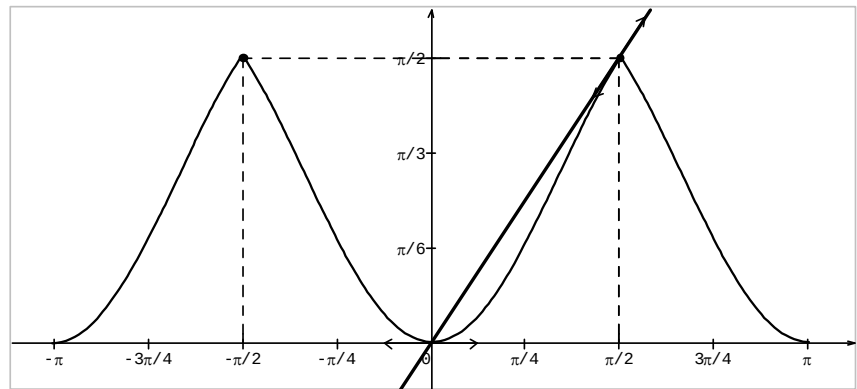
Exercice 2

1. $f'(t) = \sin t + t \cos t$. pour $t \in [0; \pi/2]$
 $\sin t \geq 0$ et $t \cos t \geq 0$, donc $f'(t) \geq 0$ et
 par conséquent f est croissante
 pour $t \in [0; \pi/2]$.

2. La tangente en 0 est horizontale :

$$f'(0) = 0 \text{ .la tangente en } \frac{\pi}{2} :$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} \cos(\frac{\pi}{2}) = 1 + 0 = 1$$



$$\text{et } f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \text{ , puis } y = f'(\frac{\pi}{2})(t - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = 1 \times (t - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = t.$$

Exercice 3

• $f(-t) = (1 + \cos^2(-t)) \sin^2(-t) = (1 + \cos^2 t) \sin^2 t = f(t)$ donc f est paire.

• Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π .

$f(t + \pi) = (1 + \cos^2(t + \pi)) \sin^2(t + \pi) = (1 + (-\cos t)^2) (-\sin t)^2 = (1 + \cos^2 t) \sin^2 t = f(t)$, donc f est Périodique de période π .

$$\begin{aligned} \bullet f(t + \frac{\pi}{2}) &= (1 + \cos^2(t + \frac{\pi}{2})) \sin^2(t + \frac{\pi}{2}) = (1 + \sin^2 t) (\cos^2 t) \\ f(t - \frac{\pi}{2}) &= (1 + \cos^2(t - \frac{\pi}{2})) \sin^2(t - \frac{\pi}{2}) = (1 + \sin^2 t) (\cos^2 t) \end{aligned} \quad \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} + t) = -\sin t & \cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t \\ \sin(\frac{\pi}{2} + t) = \cos t & \sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t \end{cases}$$

$$2. f'(t) = -2 \sin t \cos t \sin^2 t + (1 + \cos^2 t) 2 \sin t \cos t = -2 \sin t \cos t \sin^2 t + 2 \sin t \cos t + 2 \sin t \cos^3 t$$

$$f'(t) = -2 \sin t \cos t + 2 \sin t \cos^3 t + 2 \sin t \cos t + 2 \sin t \cos^3 t ; f'(t) = 4 \sin t \cos^3 t$$

3. pour tout $t \in [0; \pi]$: $\sin t \geq 0$ et $\cos^2 t \geq 0$, car c'est un carré et $\cos^2 t$ s'annule en même temps que $\cos t$.
 on en déduit le tableau de signes pour $g'(t)$ et le tableau de variation pour g .

$$4. \int_{\pi/6}^{\pi/3} f(t) dt = \left[\frac{5t}{8} - \frac{1}{4} \sin(2t) - \frac{1}{32} \sin(4t) \right]_{\pi/6}^{\pi/3}$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} f(t) dt = \frac{5\pi}{48} - \frac{\sqrt{3}}{32}$$

t	0	$\pi/2$	π
$\sin t$	+		+
$\cos t$	+	0	-
$g'(t)$	+	0	-
$g(t)$	0	1	0

Exercice 4

- pour tout t réel : $g(-t) = \frac{12}{\pi} \left(\sin(-t) + \frac{1}{3} \sin(-3t) \right) = \frac{12}{\pi} \left(-\sin(t) - \frac{1}{3} \sin(3t) \right) = -g(t)$, donc g est impaire

- On vérifie que g est 2π -périodique (c'est-à-dire que 2π est une période)

$$\text{Pour tout t réel on a : } g(t + 2\pi) = \frac{12}{\pi} \left(\sin(t + 2\pi) + \frac{1}{3} \sin(3(t + 2\pi)) \right) = \frac{12}{\pi} \left(\sin(t) + \frac{1}{3} \sin(3t) \right) = g(t).$$

$$\text{Pour tout t réel on a : } g'(t) = \frac{12}{\pi} (\cos(t) + \cos(3t)). \text{ Or on sait que : } \cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\text{Donc } g'(t) = \frac{12}{\pi} (\cos(t) + \cos(3t)) = \frac{24}{\pi} \cos(2t) \cos t. \text{ Etudions le signe de } g'(t) :$$

Sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{4}]$, on a : $t \in [0; \frac{\pi}{4}]$ donc $2t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ et $\cos(2t) \geq 0$ pour $t \in [0; \frac{\pi}{4}]$.

Sur l'intervalle $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$, on a : $t \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ donc $2t \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$ et $\cos(2t) \leq 0$ pour $t \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$.

Sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}]$, on a : $t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}]$ donc $2t \in [\pi; \frac{3\pi}{2}]$ et $\cos(2t) \leq 0$ pour $t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}]$.

Sur l'intervalle $[\frac{3\pi}{4}; \pi]$, on a : $t \in [\frac{3\pi}{4}; \pi]$ donc $2t \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$ et $\cos(2t) \geq 0$ pour $t \in [\frac{3\pi}{4}; \pi]$.

Sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$, on a : $\cos(t) \geq 0$ et sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ $\cos(t) \leq 0$,

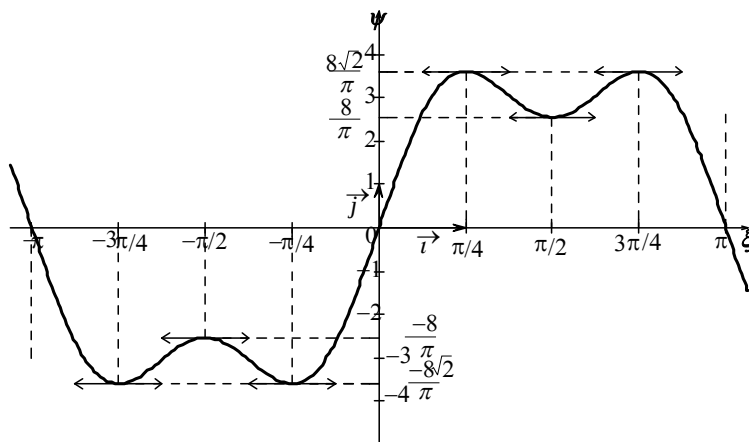
d'où le tableau de variation de g .

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cos t$	1	+	+	0	-
$\cos(2t)$	1	+	0	-	0
$g'(t)$		+	0	0	+
$g(t)$	0	$M = \frac{8\sqrt{2}}{\pi}$	$m = \frac{8}{\pi}$	$M = \frac{8\sqrt{2}}{\pi}$	0

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{12}{\pi} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{3} \sin 3\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{12}{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{12}{\pi} \left(\frac{3\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} \right) = \frac{12}{\pi} \left(\frac{4\sqrt{2}}{6} \right) = \frac{8\sqrt{2}}{\pi}$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{12}{\pi} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \sin 3\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{12}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{12}{\pi} \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{8}{\pi} ; g(0) = g(\pi) = 0$$

$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{12}{\pi} \left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) \right) = \frac{12}{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{12}{\pi} \left(\frac{3\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} \right) = \frac{12}{\pi} \left(\frac{4\sqrt{2}}{6} \right) = \frac{8\sqrt{2}}{\pi}$$



Exercice 6

$\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout t réel :

$$g(-t) = 1 - \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos(-2t)}{3} + \frac{1}{15} \cos(-4t) \right) = 1 - \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos(2t)}{3} + \frac{1}{15} \cos(4t) \right) = g(t), \text{ donc } g \text{ est paire.}$$

- On vérifie que g est π -périodique : Pour tout t réel on a :

$$g(t + \pi) = 1 - \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos(2(t + \pi))}{3} + \frac{1}{15} \cos(4(t + \pi)) \right) = 1 - \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos(2t + 2\pi)}{3} + \frac{1}{15} \cos(4t + 4\pi) \right) = g(t).$$

Donc g est bien π -périodique.

b. g est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(t) = \frac{4}{\pi} \left(-\frac{2\sin 2t}{3} - \frac{4\sin 4t}{15} \right)$. or $\sin 2a = 2\sin a \cos a$,

$$\text{donc } \sin 4t = 2\sin 2t \cos 2t \text{ et on a : } g'(t) = \frac{4}{\pi} \left(-\frac{2\sin(2t)}{3} - \frac{8\sin(2t)\cos(2t)}{15} \right) = -\frac{8}{3\pi} \sin(2t) \left(1 + \frac{4\cos(2t)}{5} \right)$$

$$\text{on a obtenu que : } g'(t) = -\frac{8}{3\pi} \sin(2t) \left(1 + \frac{4\cos(2t)}{5} \right).$$

Etude de variation :

Lorsque $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ on a : $0 \leq 2t \leq \pi$, donc $\sin(2t) \geq 0$ et $-1 \leq \cos 2t \leq 1$ et $-\frac{4}{5} \leq \frac{4}{5} \cos 2t \leq \frac{4}{5}$ donc

$1 - \frac{4}{5} \leq 1 + \frac{4}{5} \cos 2t \leq 1 + \frac{4}{5}$, c'est-à-dire $\frac{1}{5} \leq 1 + \frac{4}{5} \cos 2t \leq \frac{9}{5}$ donc $1 + \frac{4}{5} \cos 2t \geq 0$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et par

conséquent : $g'(t) < 0$ sur $\mathbb{R}$. g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

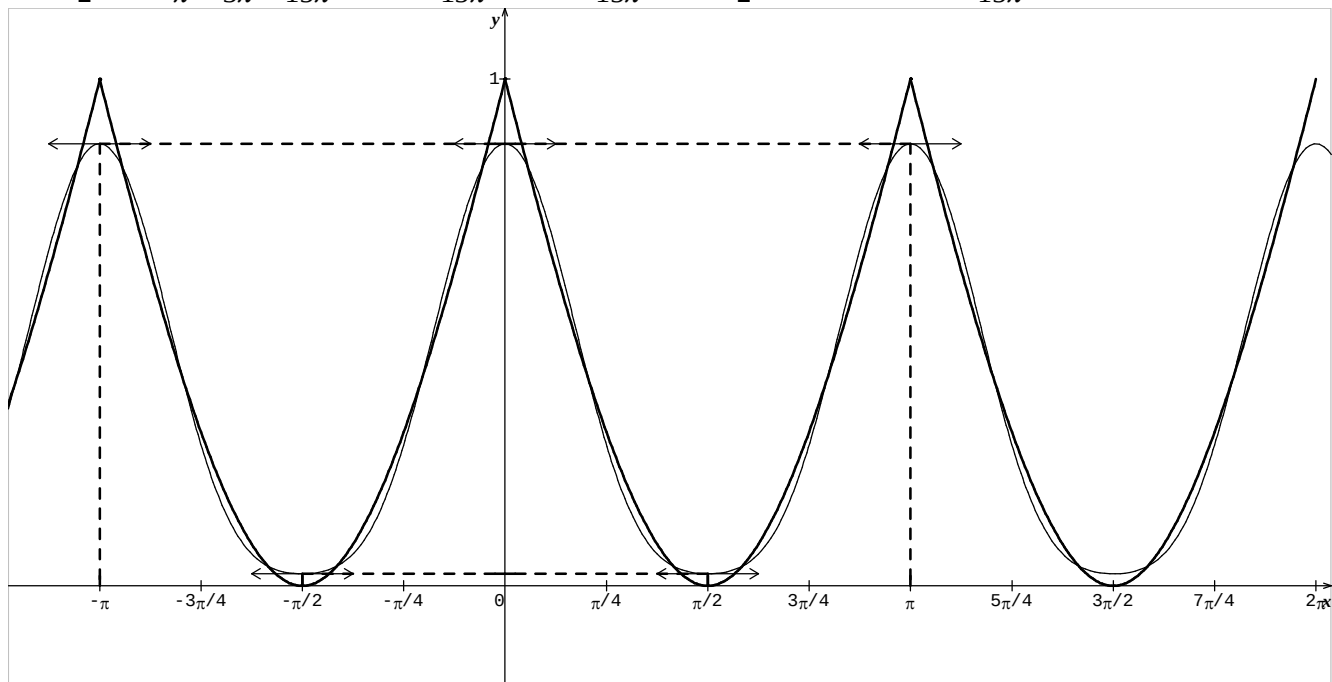
c. graphique

La tangente à la courbe représentant g au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = g'(0)(x - 0) + g(0)$

or $g(0) = 1 - \frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi} + \frac{4}{15\pi} = 1 - \frac{2}{5\pi}$ et $g'(0) = 0$ donc $y = 1 - \frac{2}{5\pi} \approx 0,873$.

La tangente à la courbe représentant g au point d'abscisse $x = \frac{\pi}{2}$ a pour équation : $y = g'(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2}) + g(\frac{\pi}{2})$

or $g(\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} + \frac{4}{15\pi} = 1 - \frac{30 + 20 - 4}{15\pi} = 1 - \frac{46}{15\pi}$ et $g'(\frac{\pi}{2}) = 0$ donc $y = 1 - \frac{46}{15\pi} \approx 0,024$.



Exercice 7.

1. - $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout t réel :

$$\varphi(-t) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2} \cos\left(-\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{\pi^2} \cos(-\pi t) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{\pi^2} \cos(\pi t) = \varphi(t) . \text{ donc } \varphi \text{ est paire}$$

On vérifie que φ est 4-périodique : Pour tout t réel on a

$$\begin{aligned} \varphi(t+4) &= \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}(t+4)\right) - \frac{2}{\pi^2} \cos(\pi(t+4)) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + 2\pi\right) - \frac{2}{\pi^2} \cos(\pi t + 4\pi) = \varphi(t) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{\pi^2} \cos(\pi t) = \varphi(t) \end{aligned}$$

$$2. \varphi'(t) = \frac{4}{\pi^2} \times \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{2}{\pi^2} \times \pi \times \sin(\pi t) = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{2}{\pi} \sin(\pi t) = \frac{2}{\pi} \left(\sin(\pi t) + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right) = \frac{2}{\pi} \left(2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right) \right)$$

$$\text{Donc } \varphi'(t) = \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right) ; \left(\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \right)$$

$$\varphi'(t) = 0 \text{ équivaut à } \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 0 \text{ ou } \cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right) = 0 \text{ donc } \begin{cases} \frac{\pi}{4}t = k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{4}t = \pi + k\pi \text{ donc } t = 4k \text{ ou } \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3\pi}{4}t = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } \frac{3\pi}{4}t = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ donc } t = \pm \frac{2}{3} \pm \frac{4k}{3} \text{ où } k \in \mathbb{Z} . \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \frac{2}{3} ; 0 \leq \frac{\pi}{4}t \leq \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} \text{ et } 0 \leq \frac{3\pi}{4}t \leq \frac{3\pi}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} \text{ donc } \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \geq 0 \text{ et } \cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right) \geq 0 \text{ sur } \left[0; \frac{2}{3}\right].$$

$$\frac{2}{3} \leq t \leq 2 ; \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{4}t \leq 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} \times \frac{2}{3} \leq \frac{3\pi}{4}t \leq \frac{3\pi}{4} \times 2 = \frac{3\pi}{2} \text{ donc } \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \geq 0 \text{ et } \cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right) \leq 0$$

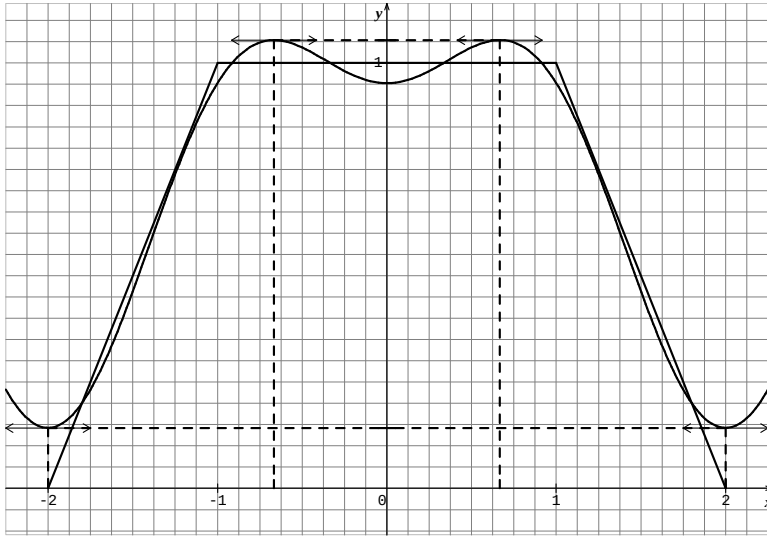
sur $\left[\frac{2}{3}; 2\right]$.

D'où le tableau de variation sur l'intervalle $[0; 2]$

$$M = \frac{3}{4} + \frac{3}{\pi^2} \approx 1,05 \quad ; \quad A = \frac{3}{4} + \frac{2}{\pi^2} \approx 0,95264$$

$$\text{et } B = \frac{3}{4} - \frac{6}{\pi^2} \approx 0,14.$$

t	0	$\frac{2}{3}$	2		
$\varphi'(t)$	0	+	0	-	0
$\varphi(t)$	A	M		B	

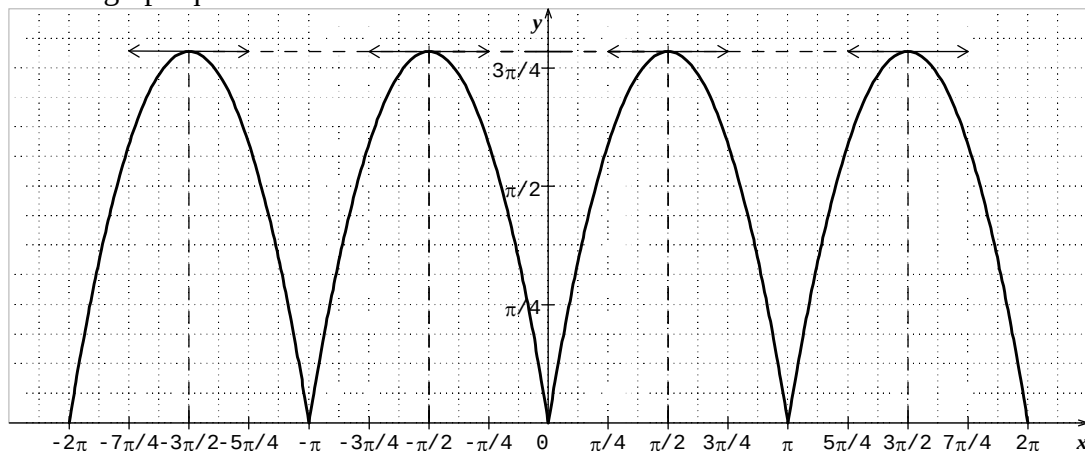


Exercise 8

1. 2.a $f(t) = t(\pi - t)$ sit $t \in [0; \pi]$ et $f'(t) = (\pi - 2t)$ donc $f'(t) = 0$ pour $t = \pi/2$.

t	0	$\pi/2$		π
$f'(t)$	π	+	0	- $-\pi$
$f(t)$	0	$\pi^2/4$		0

Représentation graphique.



b. f est périodique de période π donc $f(t + \pi) = f(t)$ et $f(-t + \pi) = f(-t)$

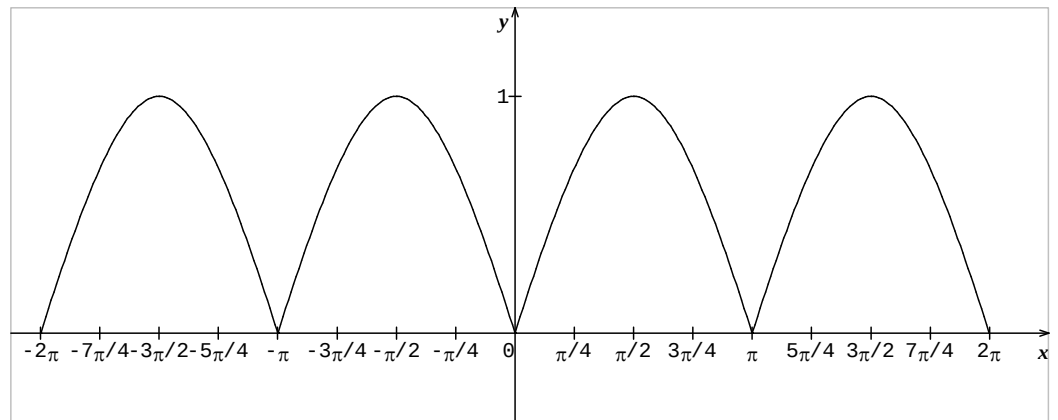
Or $t \in [0; \pi]$, donc $-t \in [-\pi; 0]$ et $-t + \pi \in [0; \pi]$

$f(-t + \pi) = (-t + \pi)(\pi - (-t + \pi)) = (-t + \pi)(\pi + t - \pi) = t(\pi - t) = f(t)$ comme $f(-t + \pi) = f(-t)$ on déduit que $f(-t) = f(t)$ et par conséquent f est paire.

2.a. $u(t + \pi) = |\sin(t + \pi)| = |-\sin t| = |\sin t| = u(t)$ et $u(-t) = |\sin(-t)| = |-\sin t| = |\sin t| = u(t)$; Donc u est bien π -périodique et paire.

b. lorsque $t \in [0; \pi]$: $u(t) = |\sin t| = \sin t$ puisque $\sin t > 0$ sur $[0; \pi]$. sur cet intervalle la courbe C associée à u est la courbe représentative de la fonction sinus .comme u est π -périodique, la courbe représentative sur $[-\pi; 2\pi]$ est obtenue

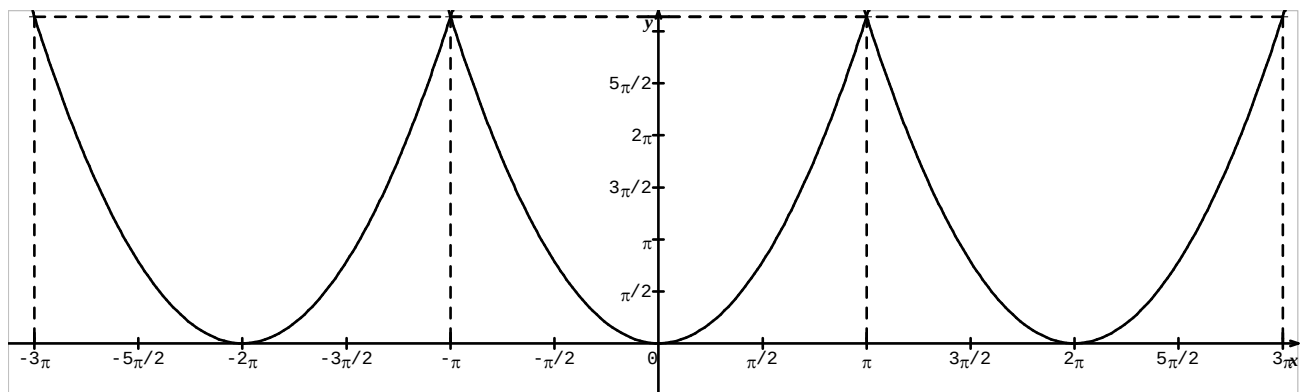
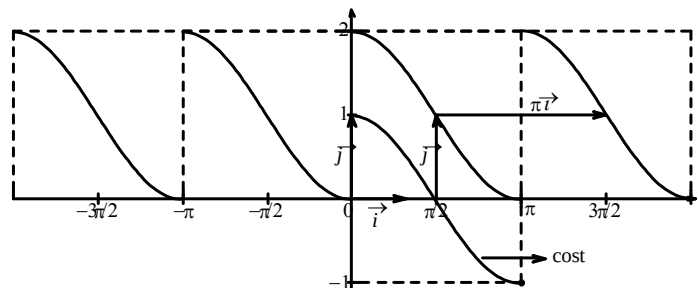
par translation de $\pi \vec{i}$
puis de $-\pi \vec{i}$ de
l'élément C .



3.

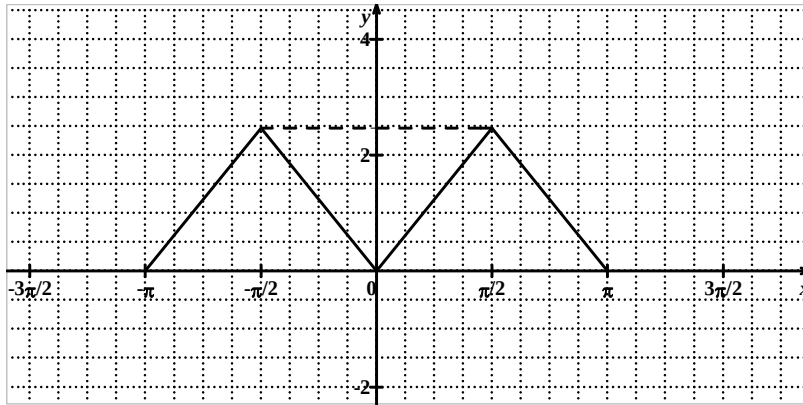
1.a) la fonction $t \mapsto \cos t$ est une fonction de référence dont le graphique est connu .le graphique de la fonction f sur $[0; \pi]$ s'obtient à partir de celui de la fonction $t \mapsto \cos t$ sur $[0; \pi]$, noté C par translation de vecteur $\vec{j}$, on obtient le graphique de la fonction f sur $[0; \pi]$, noté C_f . Puisque f est périodique de période π , on effectue une translation de vecteur $-\pi \vec{i}$ puis une translation de $\pi \vec{i}$ pour obtenir le graphique de f sur $[-\pi; 2\pi]$.

4. dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la représentation graphique de fonction f sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ est une parabole . par translation de vecteur $2\pi \vec{i}$ et de vecteur $-2\pi \vec{i}$, on peut obtenir la courbe demandée .



5. f est définie sur $\mathbb{R}$, paire et périodique, de période $T = \pi$; de plus $f(t) = \frac{\pi}{2}t$ si $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

On trace le segment de droite définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, puis son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées . par translation de vecteur $\pi \vec{i}$ ou $-\pi \vec{i}$ on obtient la courbe demandée sur $[-\pi; \pi]$:



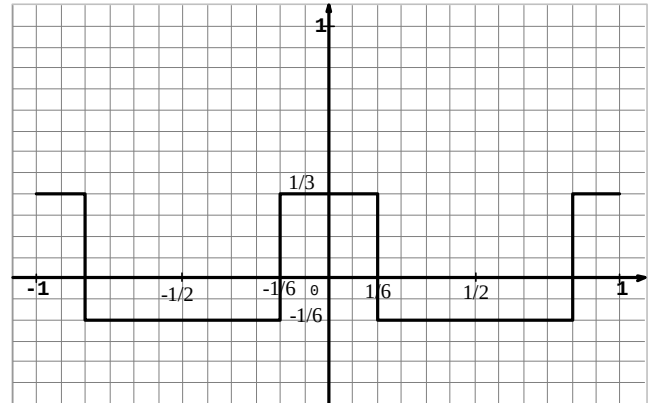
6. Dans cette question, on a : $f(t) = \frac{1}{3}$ sur $\left[0; \frac{1}{6}\right]$ et

$$f(t) = -\frac{1}{6} \text{ sur } \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right]$$

Avec la parité de la fonction f, on peut tracer la courbe sur

l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ en utilisant la symétrie par

rapport à l'axe des ordonnées. De plus, la fonction f est périodique de période 1, donc on obtient la représentation ci-contre :



7-

1. f est dérivable sur $[0; \pi]$ et $f'(t) = 2\sin(2t)$

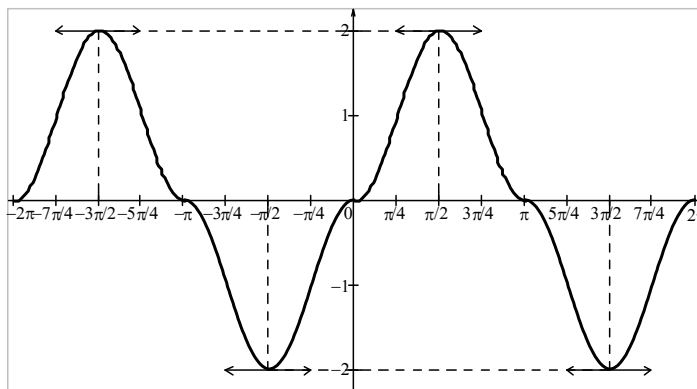
$$f'(t) = 0 \text{ équivaut à } \sin 2t = 0 \quad \sin 2t = \sin 0 \quad t = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ donc } t = \frac{\pi}{2} \text{ sur } [0; \pi].$$

Si $t \in [0; \pi/2]$ $2t \in [0; \pi]$ et $\sin(2t) \geq 0$ sur $[0; \pi]$ donc $\sin(2t) \geq 0$ sur $[0; \pi/2]$.

Si $t \in [\pi/2; \pi]$ $2t \in [\pi; 2\pi]$ et $\sin(2t) \leq 0$ sur $[\pi; 2\pi]$ donc $\sin(2t) \leq 0$ sur $[\pi/2; \pi]$

t	0	$\pi/2$	π
f'(t)	0	+	-
f(t)	0	2	0

Courbe représentative sur $[-2\pi; 2\pi]$.



Exercice 1

1. Soit le signal f , dit « dent de scie » définie sur $\mathbb{R}$, de période 2π , telle que : $f(t) = t$ si $t \in [-\pi; \pi[$.

L'énergie E transportée par le signal est donnée par la formule : $E^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt$

Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi; 4\pi]$, puis calculer E .

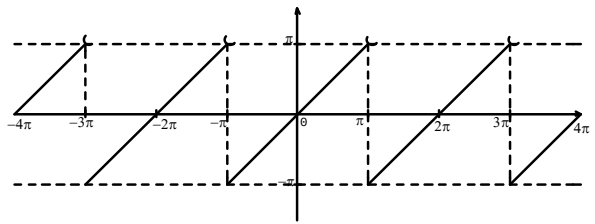
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = 2 \sin t - \sin(2t)$.

- Prouver que g est une fonction impaire, de période 2π .
- Prouver que $g'(t) = 2(1 - \cos t)(1 + 2 \cos t)$. Dresser le tableau de variation de g sur l'intervalle $[0; \pi]$.
- Représenter sur un même graphique les fonctions f et g sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

1. La représentation graphique de f a été obtenue en représentant la fonction $t \mapsto t$ sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ et en dupliquant le segment obtenu par translations de vecteurs $\pm 2\pi \vec{i}$.

2.a. pour tout t ,

$g(-t) = 2 \sin(-t) - \sin(-2t) = -2 \sin t + \sin(2t) = -g(t)$ et
 $g(t + 2\pi) = 2 \sin(t + 2\pi) - \sin(2(t + 2\pi)) = 2 \sin t - \sin(2t) = g(t)$,
 donc g est paire de période 2π . Il suffit donc d'étudier g sur un intervalle d'amplitude π , par exemple $[0; \pi]$.



c
 $g'(t) = 2 \cos t - 2 \cos(2t) = 2 \cos t - 2(2 \cos^2 t - 1) = -4 \cos^2 t + 2 \cos t + 2$
 $2(1 - \cos t)(1 + 2 \cos t) = 2(1 + 2 \cos t - \cos t - 2 \cos^2 t) = 2 + 2 \cos t - 4 \cos^2 t$, on a donc bien

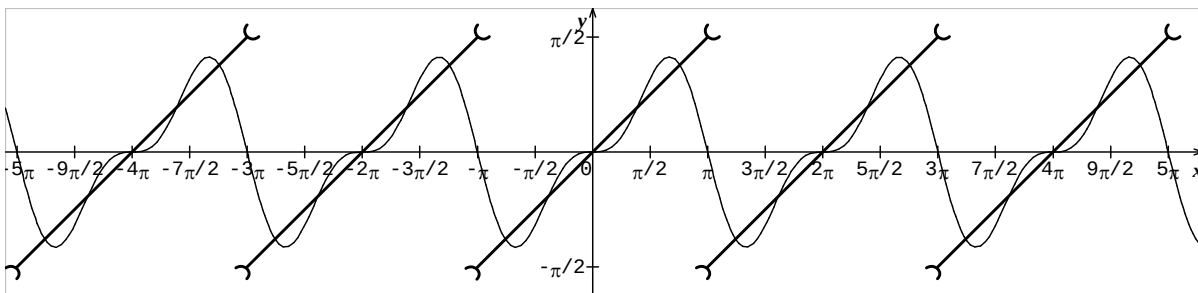
$g'(t) = 2(1 - \cos t)(1 + 2 \cos t)$. $g'(t) = 0$ signifie $2(1 - \cos t)(1 + 2 \cos t) = 0$ c'est-à-dire $\cos t = 1$ ou $\cos t = -\frac{1}{2}$:

$t = 0$ ou $t = \frac{2\pi}{3}$ sur $[0; \pi]$. D'où le tableau de

variation.

La courbe représentative de g

t	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$g'(t)$	0	+	0
$g(t)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0



1. On vérifie que pour tout t réel : $f(-t) = |\sin(-2t)| = |\sin(2t)| = f(t)$

$$f\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \left| \sin 2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \right| = |\sin(2t + \pi)| = |\sin(2t + \pi)| = |-\sin(2t)| = |\sin(2t)| = f(t).$$

f est bien une fonction périodique de période $\pi/2$ et paire.

2 - On considère un signal modélisé par la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = |\sin t|$.

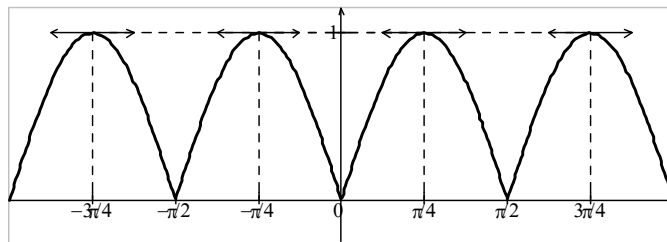
a) Montrer que la fonction u est périodique de période $\pi/2$ et paire.

b) Tracer, dans un repère orthonormal, la représentation graphique de la fonction u , pour $t \in [-\pi, 2\pi]$ (unité graphique : 2 cm).

a. $u(t + \pi/2) = |\sin 2(t + \pi/2)| = |\sin(2t + \pi)| = |-\sin 2t| = |\sin 2t| = u(t)$ et $u(-t) = |\sin(-2t)| = |-\sin 2t| = |\sin 2t| = u(t)$;
 Donc u est bien $\pi/2$ périodique et paire.

b. lorsque $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ $f(t) = |\sin(2t)| = \sin(2t)$, puisque $\sin(2t) > 0$ sur $[0; \pi/2]$. sur cet intervalle la courbe C

associée à f est la courbe représentative de la fonction $t \mapsto \sin(2t)$. comme f est périodique de période $\frac{\pi}{2}$, la courbe sur $[-\pi; \pi]$ est obtenue par translation de $\frac{\pi}{2}\vec{i}$ puis $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$ de la courbe C .



Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) + 2\sin(x)$.

On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° Vérifier que l'on peut réduire l'ensemble d'étude de f à l'intervalle $[0; 2\pi]$.

2° Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x)$ est du signe de : $f'(x) = 4\cos(x)\left(\frac{1}{2} - \sin(x)\right)$

Etudier les variations de f sur $[0; 2\pi]$ et dresser son tableau de variation.

Donner les valeurs exactes des extrema, et préciser en justifiant s'il s'agit de minima ou de maxima.

3° Démontrer que la courbe C admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie.

4° Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.

Etudier la position de C par rapport à T sur $[0; \pi/6]$

5° On a tracé ci-contre, dans un repère orthonormal, la courbe C sur $[0; 2\pi]$.

(l'unité graphique n'est pas précisée).

En utilisant les questions précédentes compléter le tracé sur $[-\pi; 2\pi]$ et tracer la droite T .

Exercice 2

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\sin(x) + 3$.

1) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a exactement 2 solutions sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

On notera α et β ces solutions ($\alpha < \beta$).

2) Donner en le justifiant, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de chacune de ces solutions.

3) En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2(x) - 3\sin(x)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra pour unité 1cm sur l'axe des ordonnées et on représentera π par 3 cm sur l'axe des abscisses).

1) Pourquoi f est-elle continue et dérivable sur $\mathbb{R}$?

2) Montrer que f est périodique.

3) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ et dresser son tableau de variations sur cet intervalle.

4) Déterminer les abscisses des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses sur $[0; 2\pi]$.

Tracer C sur $[0; 2\pi]$, puis sur $[-\pi; 0]$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos(x)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.a. Pourquoi f est-elle continue et dérivable sur $\mathbb{R}$?

b. Montrer que f est périodique de période 2π .

c. Démontrer que la courbe C admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

2.a. Déterminer la fonction dérivée de f

b. Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = \sin x(-2\cos x + 1)$

c. Etudier le signe de $f'(x)$ pour tout réel x dans l'intervalle $[0; \pi]$

3) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0; \pi]$ et dresser son tableau de variations sur cet intervalle.

4) Tracer la courbe représentant f sur $[-\pi; \pi]$.

Exercice 1

Ex I

1° f est périodique de période 2π

2° $f'(x) = -2 \sin 2x + 2 \cos x$

$= -1 \sin x \cos x + 2 \cos x$

$= 4 \cos x \left(-\sin x + \frac{1}{2}\right)$

-3 minimum, $\frac{3}{2}$ maximum,

1 minimum local

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos x	+	+	0	+	0	+
$\frac{1}{2} \sin x$	+	0	-	-	0	+
f'(x)	+	0	-	0	+	0
f	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	-3	1

$$3^{\circ} f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(\pi + 2x) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos 2x + 2 \cos x$$

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(\pi - 2x) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos 2x + 2 \cos x$$

4° $f(0) = 1$ et $f'(x) = 2$.

Equation de la tangente : $y = 2x + 1$

$$g(x) = f(x) - (2x + 1) = \cos 2x + 2 \sin x - 2x - 1$$

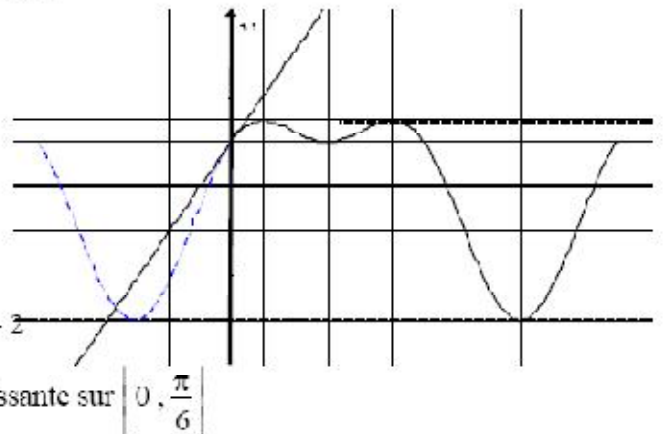
$$g'(x) = -2 \sin 2x + 2 \cos x - 2$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ donc } 0 \leq \sin 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } 0 \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{On a donc } -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times 0 - 2 < g'(x) < -2 \times 0 + 2 \times \frac{1}{2} - 2$$

$$\text{c'est-à-dire } -\sqrt{3} - 2 \leq g'(x) \leq -1 < 0, g \text{ est donc décroissante sur } \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$$

pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ on a : $g(x) \leq 0$ ($g(0) = 0$) donc $\mathcal{C}_f$ est au dessous de $\mathcal{T}$



Exercice2

partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4 \sin(x) + 3$.

1) Etude des variations de g .

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; et $g'(x) = 4 \cos(x)$.

$$g'(x) \geq 0 \text{ sur } [0; 2\pi] \Leftrightarrow \cos x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \pi/2 \text{ ou } 3\pi/2 \leq x \leq 2\pi$$

x	0	$\pi/2$	$3\pi/2$	2π
$g'(x)$	+	0	-	+
$g(x)$	3	7	-1	7

L'équation $g(x) = 0$ a exactement 2 solutions sur l'intervalle $[0; 2\pi]$

- Sur $[0; 2\pi]$, d'après le tableau de variation $g(x) \geq 3$, donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de racine.
- Sur $[\pi/2; 3\pi/2]$, g est continue et strictement décroissante et 0 est entre $g(\pi/2)$ et $g(3\pi/2)$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[\pi/2; 3\pi/2]$ une unique solution: on la note α .
- Sur $[3\pi/2; 2\pi]$, g est continue et strictement croissante et 0 est entre $g(3\pi/2)$ et $g(2\pi)$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[3\pi/2; 2\pi]$ une unique solution: on la note β .
- Conclusion: sur $[0; 2\pi]$ l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions: α et β .

2. Encadrement d'amplitude 10^{-2} de chacune des solutions α et β .

- D'après la calculatrice, $g(3,98) \approx 0,0257$ et $g(3,99) \approx -9 \times 10^{-4}$ alors $g(3,98) \geq g(\alpha) \geq g(3,99)$; Or g est décroissante strictement sur $[\pi/2; 3\pi/2]$, alors $3,98 \leq \alpha \leq 3,99$.
- D'après la calculatrice, $g(5,43) \approx -0,0135$ et $g(5,44) \approx 0,0129$ alors $g(5,43) \leq g(\beta) \leq g(5,44)$;

or g est croissante strictement sur, $[3\pi/2; 2\pi]$ alors $5,43 \leq \beta \leq 5,44$.

Signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

Il résulte de 1) et 2) que

x	0	$\pi/2$	α	$3\pi/2$	β	2π
$g(x)$	+	+	0	-	0	+

Partie B :

1. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $\cos$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction linéaire $x \mapsto x^2$ aussi, alors par composition $x \mapsto 2\cos(2x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. D'autre part $\sin$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors (comme somme) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction f est périodique.

Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont périodiques et de période 2π , alors il en est de même de la fonction f .

En effet, pour tout réel x : $f(x+2\pi) = 2\cos^2(x+2\pi) - 3\sin(x+2\pi) = 2\cos^2(x) - 3\sin(x) = f(x)$

Conclusion: f est périodique de période 2π .

3) Variations de f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$

D'après 1), f est dérivable, de plus $(u^2)' = 2u'u$ alors $f'(x) = -4\sin x \cos x - 3\cos x = -\cos x(4\sin x + 3)$

Par définition de α : $4\sin \alpha + 3 = 0$, donc $\sin \alpha = -\frac{3}{4}$.

$$f(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 3\sin(\alpha) = 2(1 - \sin^2 \alpha) - 3\sin \alpha = 2\left(1 - \frac{9}{16}\right) + 3 \times \frac{3}{4} = \frac{7}{8} + \frac{9}{4} = \frac{25}{8}$$

$$\text{de même, } \sin \beta = -\frac{3}{4} \text{ et } f(\beta) = 2\cos^2(\beta) - 3\sin(\beta) = 2(1 - \sin^2 \beta) - 3\sin \beta = 2\left(1 - \frac{9}{16}\right) + 3 \times \frac{3}{4} = \frac{7}{8} + \frac{9}{4} = \frac{25}{8}$$

x	0	$\pi/2$	α	$3\pi/2$	β	2π			
$g(x)$	+	0	+	0	-	0	+		
$\cos x$	-	0	+	+	0	-	-		
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+		
$f(x)$	2	$\searrow$	$\nearrow$	$\frac{25}{8}$	$\searrow$	$\nearrow$	$\frac{25}{8}$	$\searrow$	2

4) Abscisses des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses sur $[0; 2\pi]$.

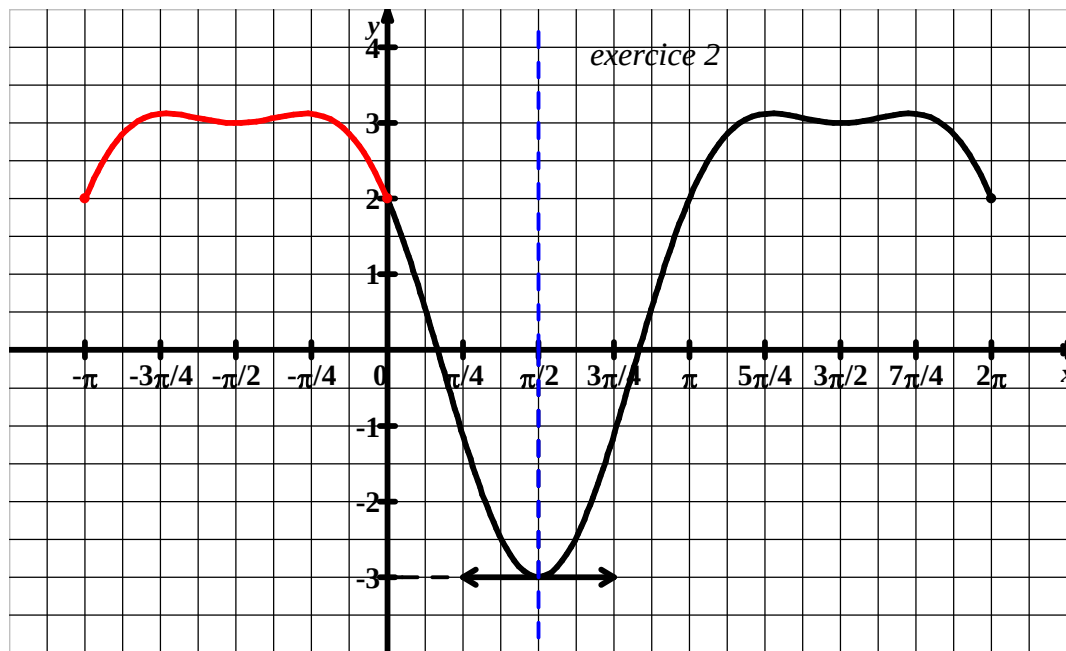
$$\text{Sur } [0; 2\pi]: f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\sin x = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) - 3\sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$(2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$$

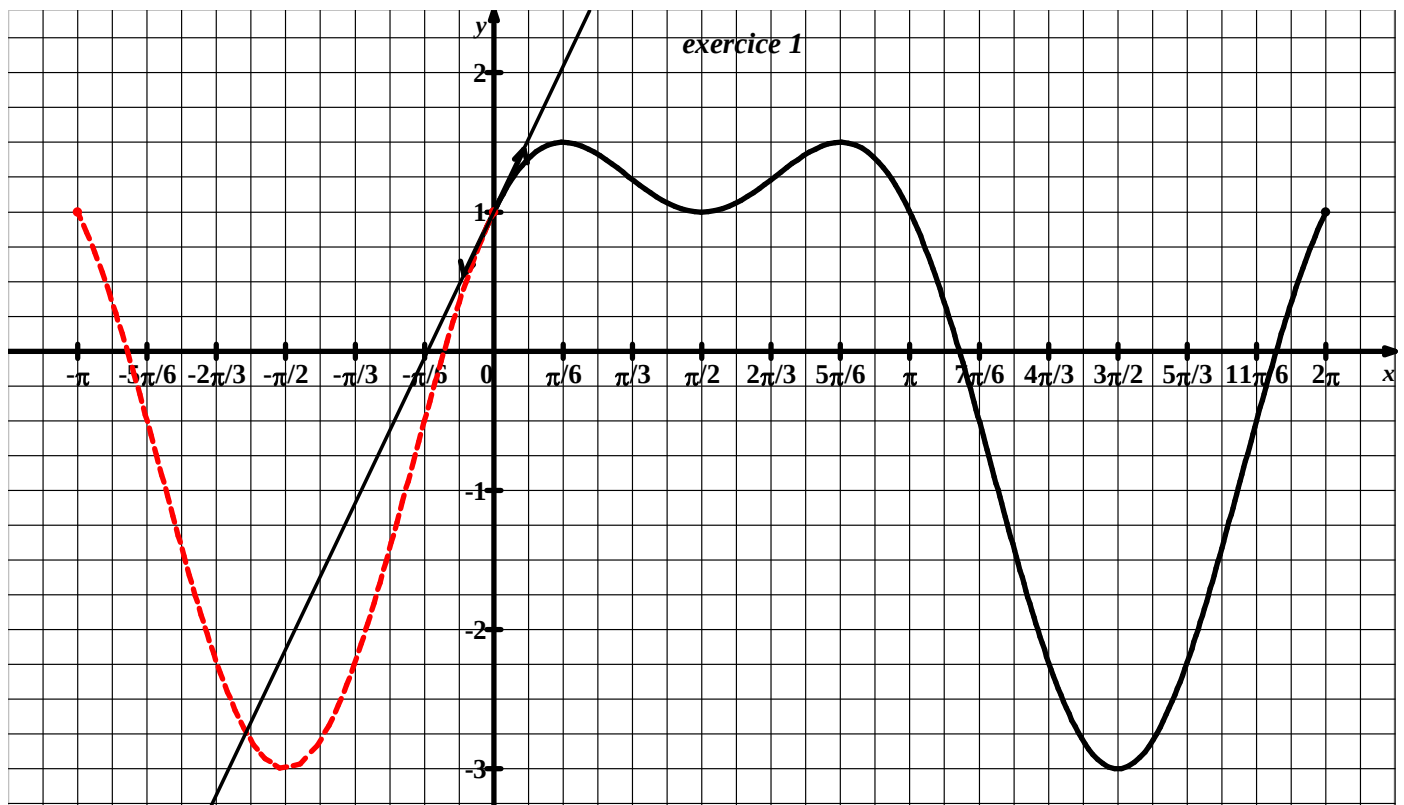
$$\Leftrightarrow \sin x = -2 < -1 \text{ (absurde car } \sin x \in [-1; 1]) \text{ ou}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Conclusion: C coupe (Ox) en deux points, d'abscisses respectives $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.



Exercice 1



Exercice 3

1. a. La fonction $\cos$ est périodique et de période 2π , alors il en est de même de la fonction f .

En effet, pour tout réel x : $f(x+2\pi) = \frac{1}{2}\cos(2x+4\pi) - \cos(x+2\pi) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos(x) = f(x)$

Conclusion: f est périodique de période 2π .

b. pour démontrer que la courbe C admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie, il faut démontrer que la fonction f est paire. R est centré en zéro et pour tout réel x ,

$$f(-x) = \frac{1}{2}\cos(-2x) - \cos(-x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos(x) = f(x), \text{ puisque la fonction cosinus est paire.}$$

Ce qui démontre que f est paire.

2.a. f est continue et dérivable en tant que somme des fonctions trigonométriques et pour tout réel x ,

$$f'(x) = -\sin(2x) + \sin(x) = -2\cos x \sin x + \sin x = \sin x(-2\cos x + 1).$$

d. pour tout réel $x \in]0; \pi[$, $\sin x > 0$. De plus $\sin 0 = \sin \pi = 0$

$$\text{pour tout réel } x \in [0; \pi], -2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

et $-2\cos x + 1 > 0 \Leftrightarrow \cos x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{\pi}{3}$, puisque la fonction cosinus est décroissante sur $[0; \pi]$.

Le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; \pi]$ est donc :

x	0	$\pi/3$	π
$\sin x$	0	+	+
$-2\cos x + 1$	-1	-	+
$f'(x)$	0	-	+

3. a. on déduit de la question précédente que f est strictement décroissante sur $[0; \pi/3]$ et strictement croissante sur $[\pi/3; \pi]$.

x	0	$\pi/3$	π
$f'(x)$	0	-	+
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$

On la complète sur $[-\pi; \pi]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (vert / noir).

Puis on la complète sur $\mathbb{R}$ par translations successives de vecteur $\pm 2\vec{i}$

