
TP MATHEMATIQUES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice 1

1. La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.
 - a. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$ où $a \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation $y' = a y$.
 - b. Soit g une solution de l'équation $y' = a y$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)e^{-ax}$.
Montrer que h est une fonction constante.
 - c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = a y$.
2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.
 - a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = a \cos x + b \sin x$ soit une solution de (E).
 - b. Résoudre l'équation différentielle (E0) : $y' = 2y$. En déduire les solutions de (E).
 - c. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(\pi/2) = 0$.

Exercice 2

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = x$, où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle x et y' sa dérivée.

1. Résoudre l'équation différentielle (H) : $y' + y = 0$.
2. Déterminer les deux nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = a x + b$, est solution de l'équation (E).
3. a. Le nombre k désignant une constante réelle, on considère la fonction I définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = k e^{-x} + x - 1$. Vérifier que la fonction f est solution de l'équation (E).
b. Déterminer le réel k pour que $f(0) = 0$.
4. Dans cette question, on prend $k = 1$.
 - a. Calculer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[0; 2]$.
 - b. En déduire une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

Exercice 3

Soit l'équation différentielle (E) : $y'(t) + y(t) = 8e^{3t}$ où $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la solution homogène de $y'(t) + y(t) = 0$.
2. Déterminer la valeur de a pour que la fonction y telle que $y(t) = ae^{3t}$ soit solution de (E).
3. En déduire la solution générale de (E).

Exercice 4

Soit l'équation différentielle (E) : $y'(t) - 2y(t) = e^t + t$ où $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la solution homogène de $y'(t) - 2y(t) = 0$.
2. Déterminer la valeur de a pour que la fonction g telle que $g(t) = ae^t$ soit solution de $y'(t) - 2y(t) = e^t$.
3. Déterminer a et b pour que la fonction h telle que $h(t) = at + b$ soit solution de $y'(t) - 2y(t) = t$.
4. Vérifier que $g + h$ est bien solution particulière de (E).
5. En déduire la solution générale de (E).

Exercice 5

On considère l'équation différentielle (E) : $(1+x)y'(x) + y(x) = \frac{1}{1+x}$ où y est une fonction de la variable réelle x , définie et dérivable sur $] -1; +\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

- 1° Démontrer que les solutions sur $] -1; +\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) : $(1+x)y'(x) + y(x) = 0$

sont les fonctions définies Par $h(x) = \frac{k}{1+x}$ où k est une constante réelle quelconque.

- 2° Soit g la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$

Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E)

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E)

4° Déterminer la solution, f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 2$.

Exercice 6

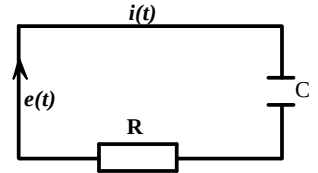
On se propose dans cette partie d'obtenir l'intensité i du courant dans le circuit ci-dessous lorsqu'il est alimenté par le signal d'entrée $e \mapsto e(t)$. L'équation permettant de trouver l'intensité du

courant est, pour $t \in [0; +\infty[$, $Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(u) du = e(t)$ (1)

Pour déterminer la fonction i on remplace le signal d'entrée $e(t)$

définie par : $e(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin t - \frac{2}{3\pi} \cos 2t$. L'équation (1) devient alors :

$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(u) du = e(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin t - \frac{2}{3\pi} \cos 2t$ (2). On admet que l'intensité i du courant est une fonction dérivable sur $[0; +\infty[$. On suppose dans toute la suite de l'exercice que $R = 5000 \Omega$ et $C = 10^{-4} F$.



1. Montrer que l'équation (2) peut alors se transformer et s'écrire :
$$\begin{cases} i'(t) + 2i(t) = 10^{-4} \cos t + \left(\frac{4}{15\pi} \times 10^{-3} \right) \sin 2t \\ t \in [0; +\infty[\end{cases}$$
 (3)

2. Vérifier que la fonction i_1 , telle que $i_1(t) = (4 \times 10^{-5}) \cos t + (2 \times 10^{-5}) \sin t$ est une solution particulière de l'équation différentielle :
$$\begin{cases} i'(t) + 2i(t) = 10^{-4} \cos t \\ t \in [0; +\infty[\end{cases}$$

3. Déterminer une solution particulière i_2 de l'équation différentielle :
$$\begin{cases} i'(t) + 2i(t) = \left(\frac{4}{15\pi} \times 10^{-3} \right) \sin 2t \\ t \in [0; +\infty[\end{cases}$$

4. Résoudre alors l'équation différentielle (3). En déduire la solution particulière vérifiant la condition $i(0) = 0$.

Exercice 7

Un embrayage vient appliquer, à l'instant $t = 0$, un couple résistant constant sur un moteur dont la vitesse à vide est de 150 rad/s. On note $w(t)$, la vitesse de rotation du moteur à l'instant t .

La fonction w est solution de l'équation différentielle : $\frac{1}{200} y'(t) + y(t) = 146$ (1) ; où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle positive t .

1. (a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (1). On cherchera une solution particulière constante.

(b) Sachant que $w(0) = 150$, montrer que $w(t) = 146 + 4e^{-200t}$ pour tout $t \in [0; +\infty[$

2. (a) On note $w_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} w(t)$. Déterminer la perte de vitesse $w_\infty - w_0$ due au couple résistant.

(b) On considère que la vitesse du moteur est stabilisée lorsque l'écart relatif $\left| \frac{w(t) - w_\infty}{w_\infty} \right|$ est inférieur à 1%.

Calculer le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse. On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au millièème

Exercice 10. 11 points

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels telle que :

$$f''(t) + \frac{6}{5} f'(t) + f(t) = 1, \text{ pour tout nombre réel } t \quad f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 0.$$

1. Dans cette question on détermine une expression de $f(t)$.

a. Résoudre l'équation différentielle (E) $y''(t) + \frac{6}{5} y'(t) + y(t) = 0$ (E) dans laquelle y désigne une fonction de la variable réelle t .

b. En déduire que la fonction f est définie pour tout nombre réel t par :

$$f(t) = 1 - e^{-(3/5)t} \left[\cos\left(\frac{4}{5}t\right) + \frac{3}{4} \sin\left(\frac{4}{5}t\right) \right]$$

2. Dans cette question on détermine la limite de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

a. Justifier que, pour tout nombre réel t , on a : $-e^{-(3/5)t} \leq e^{-(3/5)t} \cos\left(\frac{4}{5}t\right) \leq e^{-(3/5)t}$

b. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-(3/5)t} \cos\left(\frac{4}{5}t\right) = 0$

c. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. a. Calculer $f'(t)$ pour tout nombre réel t .

b. Montrer que : $f'(t) = 0$ équivaut à $t_k = \frac{5k\pi}{4}$, où k désigne un nombre entier relatif.

c. On note pour tout nombre entier relatif k , $t_k = \frac{5k\pi}{4}$ et on pose $D_k = |f(t_k) - 1|$

$$\text{Montrer que : } D_k = e^{-\frac{3k\pi}{4}}.$$

Exercice 3

Soit l'équation différentielle (E) : $y'(t) - y(t) = 2 \cos t$ où $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la solution homogène de $y'(t) - y(t) = 0$.

2. Déterminer a et b pour que la fonction y telle que $y(t) = a \cos t + b \sin t$ soit solution de (E).

3. En déduire la solution générale de (E).

Corrigé

Exercice 1

a. $f'(x) = ae^{ax} = af(x)$ donc $f(x) = e^{ax}$ est une solution de l'équation $y' = ay$

b. $h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = ag(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = 0$, donc $h(x) = C$ où C est une constante réelle.

c. $h(x) = C = g(x)e^{-ax} \Rightarrow g(x) = Ce^{ax}$.

2. $f_0(x) = a \cos x + b \sin x$ est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$ si

$$f_0'(x) = 2f_0(x) + \cos x \Leftrightarrow -a \sin x + b \cos x = 2(a \cos x + b \sin x) + \cos x \Rightarrow \begin{cases} -a = 2b \\ b = 2a + 1 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{5}; a = \frac{-2}{5}.$$

$y' = 2y$ a pour solution $y = Ce^{2x}$. f est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{cases} f' = 2f + \cos x \\ f_0' = 2f_0 + \cos x \end{cases} \Leftrightarrow f' - f_0' = 2(f - f_0), \text{ soit } f - f_0 \text{ solution de } (E_0)$$

Les solutions de (E) sont données par $f - f_0 = Ce^{2x} \Leftrightarrow f(x) = \left(\frac{-2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x \right) + Ce^{2x}$.

$$f(\pi/2) = \left(\frac{-2}{5} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) + Ce^{\pi} = 0 \Leftrightarrow C = \frac{-1}{5} e^{-\pi}.$$

Exercice 5

1. $a(x) = 1+x$; $b(x) = 1$; $\frac{b(x)}{a(x)} = \frac{1}{1+x}$; $G(x) = \ln(1+x)$.

Les solutions sont de la forme : $f_0(x) = ke^{-G(x)} = ke^{-\ln(1+x)} = \frac{k}{e^{\ln(1+x)}} = \frac{k}{1+x}$

$$2^\circ g'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \times (x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}.$$

$$(1+x)g'(x) + g(x) = \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} (1+x) + \frac{\ln(1+x)}{(1+x)} = \frac{1 - \ln(x+1) + \ln(1+x)}{(x+1)} = \frac{1}{1+x} \text{ cqfd.}$$

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

les solutions sont de la forme $f(x) = f_0(x) + g(x) = \frac{k}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{(1+x)}$

4° Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 2$.

$$f(0) = \frac{k}{1+0} + \frac{\ln(1+0)}{(1+0)} = k + 0 = 2 \Leftrightarrow \boxed{k=2}, \text{ et } f(x) = \frac{2 + \ln(1+x)}{(1+x)}.$$

Exercice 6

1. $Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(u) du = e(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin t - \frac{2}{3\pi} \cos 2t \quad (2)$

Pour tout $t \in [0; +\infty[$; $R = 5000 \Omega$ et $C = 10^{-4} F$. En dérivant (2), on obtient :

$$5000i'(t) + 10^4 i(t) = \frac{1}{2} \cos t + \left(\frac{4}{3\pi} \right) \sin 2t ; \text{ d'où } i'(t) + 2i(t) = 10^{-4} \cos t + \left(\frac{4}{15\pi} \times 10^{-3} \right) \sin 2t \quad (3)$$

$t \in [0; +\infty[$

2. $i_1(t) = (4 \times 10^{-5}) \cos t + (2 \times 10^{-5}) \sin t$; $i_1'(t) = -(4 \times 10^{-5}) \sin t + (2 \times 10^{-5}) \cos t$, on reporte dans l'équation Différentielle : $i'(t) + 2i(t) = -(4 \times 10^{-5}) \sin t + (2 \times 10^{-5}) \cos t + 2(4 \times 10^{-5}) \cos t + 2(2 \times 10^{-5}) \sin t = 10^{-4} \cos t$
 $i_1(t)$ est bien une solution particulière de l'équation différentielle $i'(t) + 2i(t) = 10^{-4} \cos t$.

3. $\begin{cases} i'(t) + 2i(t) = \left(\frac{4}{15\pi} \times 10^{-3} \right) \sin 2t \\ t \in [0; +\infty[\end{cases}$. Elle est de la forme $i_2(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t)$;

$$i_2'(t) = -2A \sin(2t) + 2B \cos(2t). \text{ on reporte dans l'équation Différentielle : } i'(t) + 2i(t) = \left(\frac{4}{15\pi} \times 10^{-3} \right) \sin 2t$$

$$\text{et on a : } i'(t) + 2i(t) = -2A \sin(2t) + 2B \cos(2t) + 2A \cos(2t) + 2B \sin(2t) = \left(\frac{4}{15\pi} \times 10^{-3} \right) \sin 2t$$

en identifiant le coefficients on obtient le système :

$$\begin{cases} 2B + 2A = 0 \\ 2B - 2A = \frac{4}{15\pi} \times 10^{-3} \end{cases} \text{ soit } B = \frac{1}{15\pi} \times 10^{-3} = -A \text{ et } i_2(t) = \frac{1}{15\pi} \times 10^{-3} \cos(2t) + \frac{1}{15\pi} \times 10^{-3} \sin(2t)$$

4. solution générale de l'équation différentielle (3) sans second membre est de la forme $i_0(t) = Ce^{-2t}$

Solution générale avec second membre est : $i(t) = i_0(t) + i_1(t) + i_2(t)$ et on obtient :

$$i(t) = Ce^{-2t} + (4 \times 10^{-5}) \cos t + (2 \times 10^{-5}) \sin t + \frac{1}{15\pi} \times 10^{-3} \cos(2t) + \frac{1}{15\pi} \times 10^{-3} \sin(2t)$$

Solution particulière vérifiant la condition initiale $i(0) = 0$

$$i(0) = C + 4 \times 10^{-4} - \frac{1}{5\pi} 10^{-3} = 0, \text{ donc } C = -4 \times 10^{-4} + \frac{1}{5\pi} 10^{-3}$$

$$i(t) = \left(-4 \times 10^{-4} + \frac{1}{5\pi} 10^{-3} \right) e^{-2t} + (4 \times 10^{-5}) \cos t + (2 \times 10^{-5}) \sin t + \frac{1}{15\pi} \times 10^{-3} \cos(2t) + \frac{1}{15\pi} \times 10^{-3} \sin(2t)$$

Exercice 7

1. (a) Il faut résoudre l'équation homogène associée : $\frac{1}{200} y'(t) + y(t) = 146 \quad (1)$

La solution générale est donnée par : $\omega_1(t) = ke^{-200t}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Il faut chercher une solution particulière de l'équation complète sous la forme d'une constante, c'est à dire : $\omega(t) = \omega_0$ donc $\omega'(t) = 0$

Remplaçons dans l'équation (1) ; on obtient : $\frac{1}{200} \omega'(t) + \omega(t) = 146 \Rightarrow 0 + \omega_0 = 146 \Leftrightarrow \omega_0 = 146$

Une solution particulière est donc : $\omega_2(t) = 146$

La solution générale de l'équation complète est obtenue en ajoutant la solution générale de l'équation homogène à une solution particulière de l'équation avec second membre, c'est-à-dire :

$$\omega(t) = ke^{-200t} + 146 \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

(b) On a $\omega(0) = 150$ donc $\omega(0) = ke^0 + 146 = 150$ donc $k = 4$.

On a donc bien : $\omega(t) = 4e^{-200t} + 146$

2. (a) On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-200t} = 0$ donc : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t) = 146$

La perte de vitesse est donc : $\omega_0 - \omega_\infty = 150 - 146 = 4$

(b) On a : $\left| \frac{\omega(t) - \omega_\infty}{\omega_\infty} \right| = \left| \frac{4e^{-200t}}{146} \right| = \left| \frac{2e^{-200t}}{73} \right|$. Il faut donc résoudre : $\left| \frac{\omega(t) - \omega_\infty}{\omega_\infty} \right| \leq \frac{1}{100}$ Donc :

$$\left| \frac{2e^{-200t}}{73} \right| \leq \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{2e^{-200t}}{73} \leq \frac{1}{100}. \text{ Il vient : } e^{-200t} \leq \frac{73}{200} \Leftrightarrow -200t \leq \ln 0,365 \text{ donc } -200t < \ln 0,365$$

D'où $t \geq \frac{\ln(0,365)}{-200}$ et on obtient : $t \geq 0,00503929$. En conclusion la valeur approchée est $t = 0,005s = 5ms$