COURBES PRAMETREES **MATHEMATIQUES** **BTS2**

Exercice 1

Etudier la courbe(*C*) définie par $\begin{cases} f(t)=\cos t \\ g(t)=2\sin t \end{cases}$ et sa représentation graphique dans un repère orthonrmal

Exercice 2

Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.On prendra 4 cm comme unité sur les deux axes. On considère l'application F du plan dans lui-même qui, à tout point m , d'affixe z , associe le point M d'affixe $\frac{1}{2}z^2 - z$. L' objet de cet exercice est de tracer la courbe Γ décrite par M lorsque m décrit le cercle C de centre O et de rayon 1. Soit t un réel de $[-\pi;\pi]$ et m le point de C d'affixe $z=e^{it}$.

1. Montrer que l'image M de m par F est le point de coordonnées : $\begin{cases} x(t)=\frac{1}{2}\cos 2t-\cos t \\ y(t)=\frac{1}{2}\sin 2t-\sin t \end{cases}$ $t\in[-\pi;\pi]$.

   Ces relations constituent une représentation paramétrique de la courbe Γ.
2. Comparer $x(-t)$ et $x(t)$ d'une part, $y(-t)$ et $y(t)$ d'autre part.
   En déduire que Γ admet un axe de symétrie que l'on précisera.
3. Montrer que $x'(t)=\sin t(1-2\cos t)$. Etudier les variations de x sur $[0;\pi]$.
4. Montrer que $y'(t)=(\cos t-1)(1+2\cos t)$. Etudier les variations de y sur $[0;\pi]$.
5. Dans un même tableau, faire figurer les variations de x et y sur $[0;\pi]$
6. Placer les points de Γcorrespondant aux valeurs $0;\pi/4;\pi/3$; $\pi/2;2\pi/3;3\pi/4;5\pi/6;\pi$ du paramètre t .
   Tracer les tangentes en ces points (on admettra que, pour t = 0, la tangente à Γest horizontale).
   Tracer la partie de Γ obtenue lorsque t décrit $[0;\pi]$ puis tracer Γ complètement.

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

On considère la courbe (*C*) définie par la représentation graphique : $\begin{cases} x(t)=f(t)=(2+\cos(2t))\sin t \\ y(t)=g(t)=\cos t \end{cases}$ $.t\in\mathbb{R}$

1°. Montrer que f et g sont périodiques de période 2π .On limitera l'étude à l'intervalle $\left[-\pi;\pi\right]$.

2°. Etudier la parité de chacune des fonctions f et g .En déduire un élément de symétrie de la courbe (*C*) .

3°. Calculer $f(\pi-t)$ et $g(\pi-t)$. déduire un élément de symétrie de la courbe (*C*).

4°. Montrer que $f'(t)=3\cos t\cos(2t)$ .En déduire les variations de f et g sur l'intervalle $[0;\pi/2]$.
   Préciser les tangentes parallèles aux axes.

5° Tracer avec soin la partie de la courbe (*C*) correspondant à cet intervalle puis, à l'aide des symétries mises en évidence aux questions 2° et 3° . Tracer (*C*).

Exercice 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère la courbe (*C*) définie par la représentation graphique : $\begin{cases} f(t)=\cos(2t)-2\cos t \\ g(t)=\sin(2t)-2\sin t \end{cases}$ $.t\in\mathbb{R}$

On limitera l'étude à l'intervalle $\left[-\pi;\pi\right]$.

1°. Etudier la parité de chacune des fonctions f et g .En déduire un axe de symétrie de la courbe (*C*) .

2°. Montrer que $f'(t)=-4\sin(t/2)\cos(3t/2)$.Etablir le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $\left[0;\pi\right]$
   On admettra que $g'(t)=-4\sin(t/2)\sin(3t/2)$. Déterminer le signe de $g'(t)$.
   En déduire les variations de f et g sur l'intervalle $\left[0;\pi\right]$.

3°. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe(*C*) aux point A , B , C et D de paramètres respectifs $t_A = 0$; $t_B = \frac{\pi}{3}$; $t_C = \frac{2\pi}{3}$ et $t_D = \pi$

4° .Tracer avec soin la partie de la courbe ($\mathcal{C}$) . Tracer le tangentes aux points A , B , C et D .

Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

On considère la courbe ($\mathcal{C}$) définie par la représentation graphique : $\begin{cases} f(t) = 2\cos(t) + \cos 2t \\ g(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases} . t \in \mathbb{R}$

1°. Montrer que f et g sont périodiques de période 2π .On limitera l'étude à l'intervalle $\left[-\pi;\pi\right]$.

2°. Etudier la parité de chacune des fonctions f et g .En déduire un élément de symétrie de la courbe ($\mathcal{C}$) .

3°. Etudier les variations de f et g sur l'intervalle $[0;\pi/2]$, puis dresser le tableau de variations conjointes de f et g

4°. Préciser les points où la courbe admet des tangentes parallèles aux axes du repère .

5°. Construire la courbe et les tangentes dans le repère donné.

Exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

On considère la courbe ($\mathcal{C}$) définie par la représentation graphique : $\begin{cases} x(t) = f(t) = 2\cos(3t) \\ y(t) = g(t) = \sin(2t) \end{cases} . t \in \mathbb{R}$

1°. Montrer que f et g sont périodiques de période 2π .On limitera l'étude à l'intervalle $\left[-\pi;\pi\right]$.

2°. Etudier la parité de chacune des fonctions f et g .En déduire un élément de symétrie de la courbe (C) .

3°. Calculer $f(\pi - t)$ et $g(\pi - t)$. Que peut-on dire pour les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$?

En déduire un centre de symétrie de la courbe ($\mathcal{C}_0$).

Justifier que l'on peut restreindre d'étude à $[0;\pi/2]$.Préciser les transformations géométrique qui permettent de construire ($\mathcal{C}$) a partir de l'arc ($\mathcal{C}_0$)

4°. Etudier les variations de f et g sur l'intervalle $[0;\pi/2]$, puis dresser le tableau de variations conjointes de f et g

5°. Préciser les points où la courbe ($\mathcal{C}_0$) admet des tangentes parallèles aux axes du repère ..

6°. Construire la courbe($\mathcal{C}$) et les tangentes sur l'intervalle$\left[0;\pi\right]$, puis sur $\left[-\pi;\pi\right]$dans le repère donné.

Exercice 7

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

On considère la courbe ($\mathcal{C}$) définie par la représentation graphique : $\begin{cases} x(t) = f(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = g(t) = \sin 2t \end{cases} . t \in \mathbb{R}$

1°. Montrer que f et g sont périodiques de période 2π .On limitera l'étude à l'intervalle $\left[-\pi;\pi\right]$.

2°. Etudier la parité de chacune des fonctions f et g .En déduire un élément de symétrie de la courbe ($\mathcal{C}$) .

3°. Etudier les variations de f et g sur l'intervalle $[0;\pi]$, puis dresser le tableau de variations conjointes de f et g

4°. Préciser les points où la courbe admet des tangentes parallèles aux axes du repère .

5°. Construire la courbe et les tangentes dans le repère donné.

Exemple 8

Soit la courbe définie par $\begin{cases} f(t) = -6t^3 + 6t^2 \\ g(t) = -6t^2 + 6t \end{cases}$; $t \in \left[0;1\right]$

1°. Etudier les variations de f et g sur l'intervalle $[0;1]$, puis dresser le tableau de variations conjointes de f et g

2.Déterminer les tangentes à la courbe ($\mathcal{C}$) aux points A ,B et E de paramètres respectifs $t_0 = 0$; $t_1 = 1/2$

3°. Construire la courbe et les tangentes dans le repère donné.

Exercice 9

Soit la courbe définie par Soit la courbe définie par $\begin{cases} f(t) = -t^2 + t + 1/2 \\ g(t) = t^2/2 \end{cases}$; $t \in [0;1]$

1°. Etudier les variations de f et g sur l'intervalle $[0;1]$, puis dresser le tableau de variations conjointes de f et g

2.Déterminer les tangentes à la courbe ($\mathcal{C}$) aux points A ,B et E de paramètres respectifs $t_0 = 0$; $t_1 = 1/2$

3°. Construire la courbe et les tangentes dans le repère donné

Exercice 10

Soit la courbe($\mathcal{C}$) , ensemble des points $M(t)$ d'affixe $z(t) = t^2 e^{j\frac{1}{2}\arccos t}$; $t \in [-1; 1]$.

1.Etudier sur l'intervalle $[-1; 1]$ les fonctions θ et ρ définies par : $\begin{cases} \rho(t) = t^2 \\ \theta(t) = \frac{1}{2}\arccos t \end{cases}$

2. Dresser le tableau de variations conjointes de θ et ρ .
3. Ecrire $z(t)$ sous la algébrique , puis donner leurs coordonnées paramétriques
4.Tracer la courbe ($\mathcal{C}$) dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$. $r_1(\theta) = \cos^2(2\theta)$.

Exercice 11

Soit la courbe ($\mathcal{C}$) définie par la représentation graphique : $F(t) = t^2 e^{it}$, $t \in [-\pi; \pi]$

1.Etudier sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ les fonctions θ et r .

2. Dresser le tableau de variations conjointes de θ et r .

3.Représentation graphique

La courbe ($\mathcal{C}$) est l'ensemble des points M de coordonnées : $\begin{cases} x(t) = t^2 \cos t \\ y(t) = t^2 \sin t \end{cases}$; $t \in [-\pi; \pi]$

Tracer la courbe ($\mathcal{C}$) dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 12

1.Etudier sur l'intervalle $[-1; 1]$ les fonctions θ et ρ définies par : $\begin{cases} \rho(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \\ \theta(t) = -2\arctan t \end{cases}$; $t \in [0;+\infty[$

2. Dresser le tableau de variations conjointes de θ et ρ .
3.Tracer la courbe ($\mathcal{C}$) dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$. ($\rho(\theta) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\theta/2)}$)

Exercice 12

1. Etudier sur l'intervalle $[-1; 1]$ les fonctions θ et ρ définies par : $\begin{cases} \rho(t) = 2t+1 \\ \theta(t) = \arcsin t \end{cases}$; $t \in [-1;1]$
2. Dresser le tableau de variations conjointes de θ et ρ .
3. Tracer la courbe ($\mathcal{C}$) dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$. ($\rho(\theta) = 1 + 2\sin\theta$)

Exercice 13

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

On considère la courbe ($\mathcal{C}$) définie par la représentation graphique : $\begin{cases} f(t) = 2\cos(t) \\ g(t) = \sin 2t \end{cases}$. $t \in \mathbb{R}$

1°. Montrer que f et g sont périodiques de période 2π .On limitera l'étude à l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

2°. Etudier la parité de chacune des fonctions f et g .En déduire un élément de symétrie de la courbe ($\mathcal{C}$) .

3°. Etudier les variations de f et g sur l'intervalle $[0;\pi/2]$, puis dresser le tableau de variations conjointes de f et g

4°. Préciser les points où la courbe admet des tangentes parallèles aux axes du repère .

5°. Construire la courbe et les tangentes dans le repère donné

Corrigé

Exercice 1

Etudier la courbe($\mathcal{C}$) définie par $\begin{cases} f(t)=\cos t \\ g(t)=2\sin t \end{cases}$ et sa représentation graphique dans un repère orthonrmal

Période : f et g ont 2π pour période commune .On étudiera donc la courbe sur intervalle de longueur 2π Et on obtiendra toute la courbe pour $t \in \left[-\pi;\pi\right]$

Recherche des symétrie éventuelles :

$\begin{cases} f(-t)=\cos(-t)=\cos t = f(t) \\ g(-t)=2\sin(-t)=-2\sin t=-g(t) \end{cases}$, donc on étudiera et on tracera la courbe ($\mathcal{C}$) pour $t \in \left[0;\pi\right]$, puis on Complétera par symétrie par rapport à l'axe $(x'x)$.

$\begin{cases} f(\pi-t)=\cos(\pi-t)=-\cos t=-f(t) \\ g(\pi-t)=2\sin(\pi-t)=2\sin t=g(t) \end{cases}$, donc on étudiera et on tracera la courbe ($\mathcal{C}$) pour $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, puis on Complétera par symétrie par rapport à l'axe $(y'y)$.

Etude des variations

Dérivées : $\begin{cases} f'(t)=-\sin t \\ g'(t)=2\cos t \end{cases}$: pour $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. f ' s'annule en 0 et g ' s'annule en $\frac{\pi}{2}$. $\begin{matrix} \sin t>0 \\ \cos t>0 \end{matrix}$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, donc $-f'(t)<0$ et $g'(t)>0$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Tangente à la courbe aux points remarquables

Pour $t=0$: on a : $\{ f'(0)=0 \quad g'(0)=2$, la tangente à la courbe au point $A(0;2)$ est horizontale , par symétrie Il y a aussi une tangente horizontale au point $A'(0;-2)$

t• 0 $\frac{\pi}{2}$• • Signe de $f'(t)$• 0

0 $\frac{\pi}{2}$• • Signe de $f'(t)$• 0 –

• Signe de $f'(t)$• 0 – –1• • Variation d

Signe de $f'(t)$• 0 – –1• • Variation de

0 – –1• • Variation de $f(t)$• 1

• Variation de $f(t)$• 1

Variation de $f(t)$• 1

1

0• • Signe de $g'(t)$• 2

• Signe de $g'(t)$• 2 + 0• •

Signe de $g'(t)$• 2 + 0• •

2 + 0• •

•

Variation de $g(t)$• 2

2

0 • • $\begin{cases} f(\pi-t)=\cos(\pi-t)=-\cos t=-f(t) \\ g(\pi-t)=2\sin(\pi-t)=2\sin t=g(t) \end{cases}$,

Pour $t=\frac{\pi}{2}$: on a : $\begin{cases} f'(\frac{\pi}{2})=-1 \end{cases}$ $g'(\frac{\pi}{2})=0$, la tangente à la courbe au point $B(1;0)$ est verticale , par symétrie. Il y a aussi une tangente horizontale au point $B'(-1;0)$

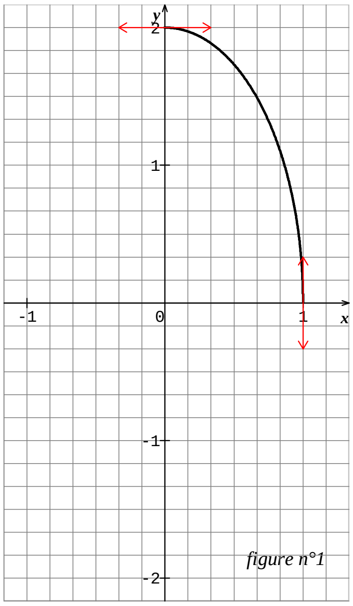
Tracé de la courbe

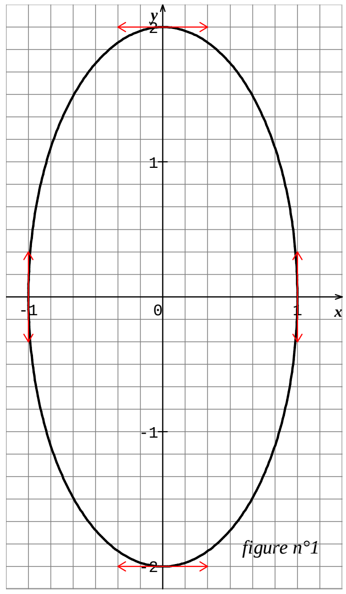
f est décroissante et g est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, donc du point $M(0)$ au point $M(\frac{\pi}{2})$ on se déplace

Vers la droite et vers le bas du graphique

On obtient l'arc de la courbe pour $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, puis on fait les symétries .

La courbe obtenue est une **ellipse**.





Exercice 2

1. Soit t un réel de $t\in[-\pi;\pi]$. Si $z=e^{it}$ alors

$$Z=\frac{1}{2}z^2-z=\frac{1}{2}e^{2it}-e^{it}\quad .\quad Z=\frac{1}{2}e^{2it}-e^{it}=\left(\frac{1}{2}\cos 2t-\cos t\right)+i\left(\frac{1}{2}\sin 2t-\sin t\right).$$

Donc les coordonnées x (t) et y(t)de M(t) sont données par

$$\begin{cases} x(t)=\frac{1}{2}\cos 2t-\cos t \\ y(t)=\frac{1}{2}\sin 2t-\sin t \end{cases}\quad t\in[-\pi;\pi]$$

2. La fonction cos est paire, donc pour tout $t\in[-\pi;\pi]$ $x(-t)=x(t)$.

La fonction sin est impaire, donc pour tout $t\in[-\pi;\pi]$ $y(-t)=-y(t)$.

On en déduit que les points $M(-t)$ et $M(t)$ ont même abscisse et des ordonnées opposées :

ils sont symétriques par rapport à l'axe $(O;\vec{u})$. Ainsi l'axe $(O;\vec{u})$ est un axe de symétrie pour la courbe Γ.

3. La fonction $t\mapsto x(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x'(t)=-\sin 2t+\sin t=-2\cos t\sin t+\sin t \\ t\in[-\pi;\pi] \end{cases}\quad \text{d'où}\quad x'(t)=\sin t(1-2\cos t)\ .$$

Etude du signe de x'(t) sur [0 , π]:

t	0		$\pi/3$		π
$\sin t$	0	$+$		$+$	0
$1-2\cos t$	-1	$-$	0	$+$	3
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	0

On en déduit les variations de x sur [0 , π] :

t	0		$\pi/3$		π
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
$x(t)$	$-1/2$	↘	$-3/4$	↗	$3/2$

4. La fonction $t\mapsto y(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$y'(t)=\cos 2t-\cot=2\cos^2 t-\cos t-1=(\cos t-1)(1+2\cos t)$ .On vérifie aisément que le développement de $(\cos t-1)(1+2\cos t)=\cos t+2\cos^2 t-1-2\cos t=2\cos^2 t-\cos t-1$,donc $y'(t)=(\cos t-1)(1+2\cos t)$.

Etude du signe de y'(t) sur [0 , π]:

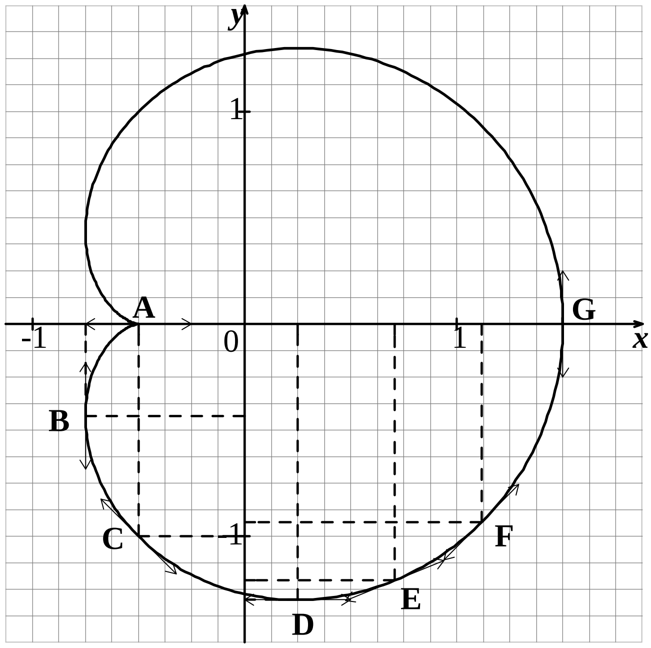
t	0		$2\pi/3$		π
$\cos t-1$	0	$-$		$-$	-2
$2\cos t+1$	3	$+$	0	$-$	-1
$y'(t)$	0	$-$	0	$+$	2

On en déduit les variations de y sur [0 , π] :

t	0		$2\pi/3$		π
$y'(t)$	0	$-$	0	$+$	2
$y(t)$	0	↘	$-3\sqrt{3}/4$	↗	0

5.Le tableau suivant donne les variations conjointes de x et y sur $[0;\pi]$:

t	0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	$\sqrt{3}$	$+$	0
$x(t)$	$-1/2$ ↘		$-3/4$	↗	$-1/4$	↗	$3/2$
$y'(t)$	0	$-$	-1		0	$+$	2
$y(t)$	0 ↘		$-\sqrt{3}/4$	↘	$-3\sqrt{3}/4$	↗	0



6.On peut alors tracer la partie de Γ obtenue lorsque t décrit $[0;\pi]$. On obtient alors Γ complètement en utilisant la symétrie d'axe $(O;\vec{u})$.

en $t_A = 0$: $x'(0)=0$ et $y'(0)=0$, donc $\vec{u}=\vec{0}$
et l'axe des abscisses est une tangente à la courbe en O.

en $t_B = \dfrac{\pi}{3}$: $x'(\pi/3)=0$ et $y'(\pi/3)=(\cos\pi/3-1)(1+2\cos\pi/3)=(-1/2)(2)=-1$, donc $\vec{u}=-\vec{j}$

en $t_C = \dfrac{2\pi}{3}$: $x'(2\pi/3)=\sin 2\pi/3(1-2\cos 2\pi/3)=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$; $y'(2\pi/3)=0$ et $\vec{u}=\sqrt{3}\,\vec{i}$

en $t_D=\pi$: $x'(\pi)=0$ et $y'(\pi)=2$, donc $\vec{u}=2\,\vec{j}$

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j}\right)$(unité graphique 5 cm sur les axes .

On considère la courbe C définie par la représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t)= f(t)=(2+\cos(2t))\sin t \\ y(t)=g(t)=\cos t \quad t\in\mathbb{R}\end{cases}$

1. $\begin{cases} f(t+2\pi)=(2+\cos(2t+4\pi))\sin(t+2\pi)=(2+\cos(2t)\sin(t) \\ g(t)=\cos(t+2\pi)=\cos t\end{cases}$, donc f et g sont périodiques de période 2π .

   On limitera à l'étude à l'intervalle $\left[-\pi;\pi\right]$.

2. $\begin{cases} f(-t)=(2+\cos(-2t))\sin(-t)=-(2+\cos(2t))\sin(t)=-f(t) \\ g(-t)=\cos(-t)=\cos t=g(t)\end{cases}$ on déduit que la courbe (C) est symétrique

   Par rapport à l'axe des ordonnées , puis on étudiera la courbe (C) sur l'intervalle $\left[0;\pi\right]$.

3. $\begin{cases} f(\pi-t)=(2+\cos(2t-2\pi))\sin(\pi-t)=(2+\cos(2t))\sin(t)= f(t) \\ y(t)=g(t)=\cos(\pi-t)=-\cos t=-g(t)\end{cases}$ on déduit que la courbe (C) est symétrique

   Par rapport à l'axe des abscisses , puis on étudiera la courbe (C) sur l'intervalle $[0;\pi/2]$.

4. $\begin{cases} f'(t)=-2\sin(2t)\sin t+(2+\cos(2t))\cos t \\ g'(t)=-\sin t\end{cases}$

$f'(t)=-2\sin(2t)\sin t+(2+\cos(2t))\cos t=-2\sin(2t)\sin t+2\cos t+\cos(2t)\cos t$

$=-4\sin^2 t\cos t+2\cos t+\cos(2t)\cos t=2\cos t(1-2\sin^2 t)+\cos(2t)\cos t$ $\quad f'(t)=0$ équivaut à $\cos t=0$ ou

$=2\cos t\cos 2t+\cos(2t)\cos t=3\cos t\cos(2t)$

$\cos 2t=0$ équivaut à $\cos 2t=\cos\pi/2$ équivaut à $t=\pi/4$ ou $t=-\pi/4$.

t	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$f'(t)$	3	$+$	0	$-$	0
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1
$g'(t)$	0	$-$	-1	$-$	-1
$g(t)$	1	$\searrow$	$\sqrt{2}/2$	$\searrow$	0

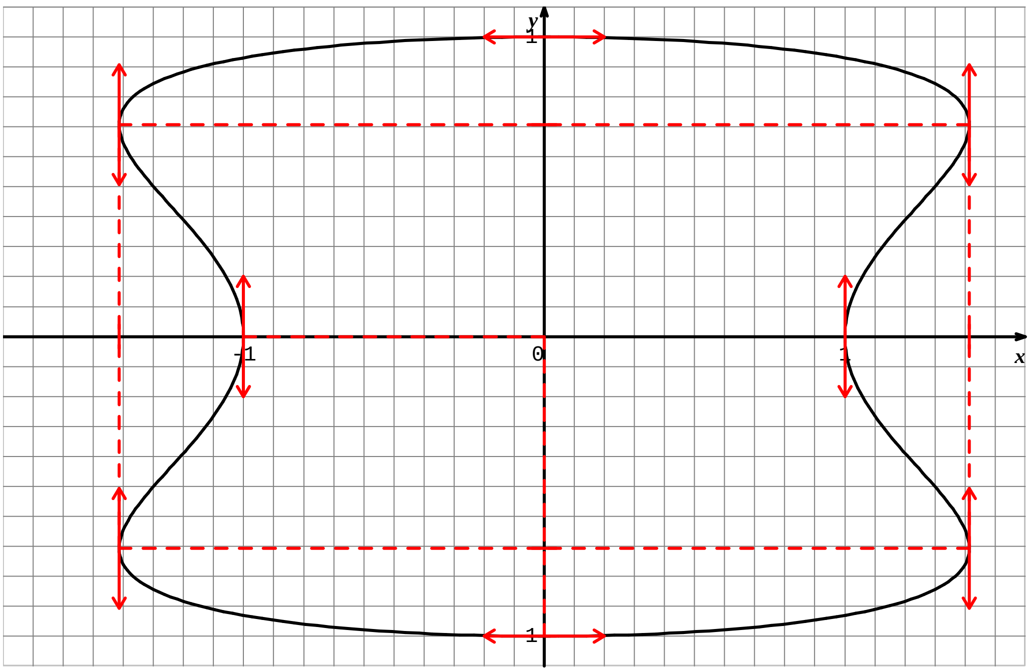
Si $t\in\left[0;\pi/4\right]$, alors $\cos t\geq 0$, Si $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$, alors $2t\in\left[0;\pi/2\right]$ et $\cos 2t\geq 0$, on a donc $f'(t)\geq 0$ et par conséquent f est croissante sur $\left[0;\pi/4\right]$.

Si $t\in\left[\pi/4;\pi/4\right]$, alors $\cos t\geq 0$; $2t\in\left[\pi/2;\pi\right]$ et $\cos 2t\leq 0$, on a donc $f'(t)\leq 0$ et par conséquent f est décroissante sur $\left[\pi/2;\pi\right]$.

En A de paramètre $t_0=0$: $f'(0)=3$ et $g'(0)=0$, la tangente à (C) en $A(0;1)$ est parallèle à l'axe des abscisses.

En B de paramètre $t_2=\pi/4$: $f'(\pi/4)=3\cos(\pi/4)\cos(\pi/2)=0$ et $g'(\pi/4)=\cos(\pi/4)=\sqrt{2}/2$, la tangente à (*C*) en $B(\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ est parallèle à l'axe des ordonnées.

En C de paramètre $t_1=\dfrac{\pi}{2}$: $f'(\pi/2)=3\cos(\pi/2)\cos\pi=0$ et $g'(\pi/2)=-\sin\pi/2=-1$. la tangente à (*C*) en $C(1;0)$ est parallèle à l'axe des ordonnées.



Exercice 4

1. $\begin{cases} f(-t)=\cos(-2t)-2\cos\left(-t\right)=\cos(2t)-2\cos\left(t\right)=f(t)\\ g(-t)=\sin(-2t)-2\sin(-t)=-\sin(2t)+2\sin t=-g(t)\end{cases}$, on constate que les points les point M (t) et M(–t) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses pour tout $t\in\left[-\pi;\pi\right]$.la courbe (*C*) admet l'axes des abscisses pour axe de symétrie .on pourra donc étudier les fonctions f et g sur l'intervalle $\left[0;\pi\right]$ et compléter le graphique par symétrie .

2. f est dérivable sur $\left[0;\pi\right]$ et sa dérivée est définie par :

$$f'(t)=-2(\sin(2t)-\sin t)=-4\sin t\cos t+2\sin t=2\sin t(1-2\cos t)\ ;\ \sin p-\sin q=2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

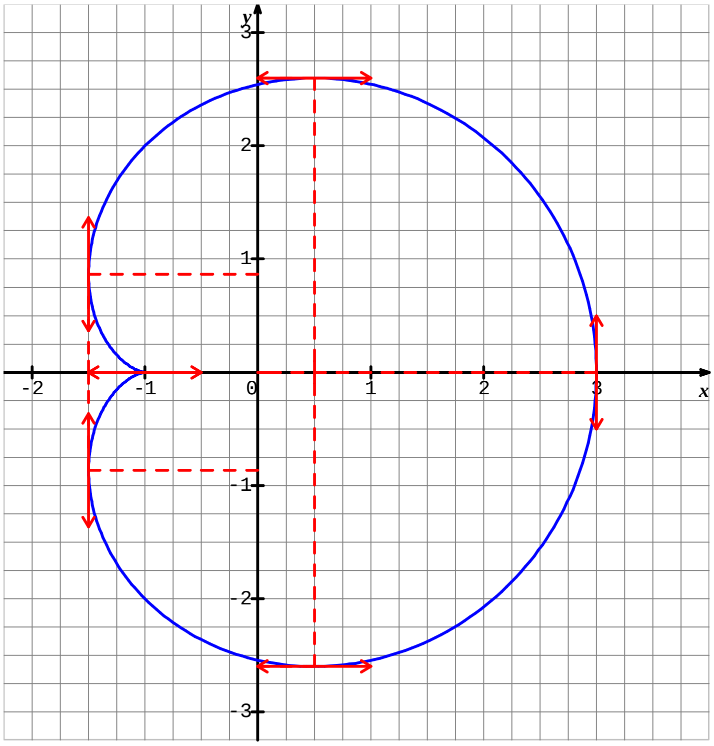
Rappels : $\sin a\sin b=\dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)$ et $\sin a\cos b=\dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$

$$-4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}\right)=-4\times\frac{1}{2}\left(\sin\frac{(t+3t)}{2}+\sin\frac{(t-3t)}{2}\right)=-2\big(\sin 2t+\sin(-t)\big)=-2(\sin 2t-\sin t)=2\sin t-2\sin 2t=f'(t)$$

b. sur $\left[0;\pi\right]$, $\sin t\geq 0$ donc $f'(t)$ est du singe de $1-2\cos t$ .dans l'intervalle $\left[0;\pi\right]$, la fonction cosinus est décroissante

$1-2\cos t\geq 0\Leftrightarrow \cos t\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos t\leq\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\frac{\pi}{3}\leq t\leq\pi$

sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ $f'(t)\leq 0$; f décroit et sur $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$, $f'(t)\geq 0$; f croît .



3. g est dérivable sur $\left[0;\pi\right]$ et sa dérivée vérifie : $g'(t)=2\cos 2t-2\cos t$, on applique La formule $\cos 2t=2\cos^2 t-1$.

$g'(t)=2(2\cos^2 t-1)-2\cos t$

$=2(2\cos^2 t-2\cos t-1)$

La dérivée s'annule si $\cos t=1$,On peut factoriser $g'(t)$ par $\cos t-1$ $g'(t)=2(\cos t-1)(2\cos t+1)$

$-4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{3t}{2}\right)=-4\times\frac{1}{2}\left(\cos(\frac{t}{2}-\frac{3t}{2})-\cos(\frac{t}{2}+\frac{3t}{2})\right)$

$-2\cos-t+2\cos(2t)=-2\cos t+2\cos 2t$

b. Sachant que $-1\leq\cos t\leq 1$, on déduit $\cos t-1\leq 0$, donc $g'(t)$ est du signe Contraire de $2\cos t+1$.

$g'(t)\geq 0\Leftrightarrow 2\cos t+1\leq 0\Leftrightarrow\cos t\leq\frac{1}{2}$.Dans l'intervalle $\left[0;\pi\right]$ la fonction cosinus est décroissante , l'inéquation se traduit par $t\geq 2\pi/3$.Donc sur $\left[0;\pi\right]$: si $t\in\left[2\pi/3;\pi\right]$, $g'(t)\geq 0$; g croît et si $t\in[0;2\pi/3]$, $g'(t)\leq 0$, g décroît.

4.tableau de variation :

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	$2\sqrt{3}$	$+$	0
$f(t)$	-1		$-3/2$		$1/2$		3
$g'(t)$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$	4
$g(t)$	0	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$\frac{-3\sqrt{3}}{2}$	↗	0
Points	A		B		C		D

5. Aux points B et D correspondants respectivement à $t_B=\frac{\pi}{3}$; et $t_D=\pi$,

si $t=\pi/3$,alors $f'(\pi/3)=0$ et $g'(\pi/3)=-4\sin(\pi/6)\sin(\pi/2)=-2\neq 0$

si $t=\pi$,alors $f'(\pi)=0$ et $g'(\pi)=-4\sin(\pi/2)\sin(3\pi/2)=4\neq 0$

la dérivée de f s'annule mais pas la dérivée de g , en chacun de ces points la tangente admet pour vecteur directeur colinéaire au vecteur $\vec{j}$.

En B et D la tangente à ($\mathcal{C}$)est parallèle à l'axe des ordonnées.

si $t=2\pi/3$,alors $f'(2\pi/3)=-4\sin(\pi/3)\cos(\pi)=2\sqrt{3}\neq 0$ et $g'(2\pi/3)=0$ .Au point C correspondant à $t_C=\frac{2\pi}{3}$, la dérivée de g s'annule mais pas celle de f. la tangente en C à la courbe ($\mathcal{C}$) admet pour vecteur directeur colinéaire à $\vec{i}$. En C la tangente à ($\mathcal{C}$)est parallèle à l'axe des abscisses.

6.l'étude précédente permet de tracer l'arc de courbe correspondant à l'intervalle $\left[0;\pi\right]$.la symétrie par Rapport à l'axe des abscisses permettra de tracer la courbe ($\mathcal{C}$) en entier . on a admis , dans le texte , que la tangente en A est confondue avec l'axe de abscisses.

Exercice 5

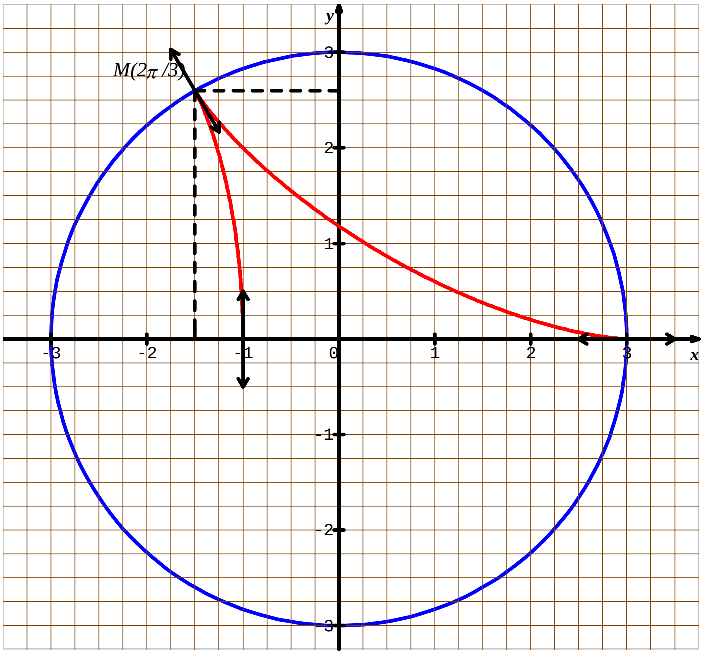
$$\begin{cases} f(t)=2\cos(t)+\cos 2t \\ g(t)=2\sin t-\sin 2t \end{cases}.$$

1. $\begin{cases} f(t+2\pi)=2\cos(t+2\pi)+\cos(2t+4\pi)=2\cos(t)+\cos(2t)=f(t) \\ g(t+2\pi)=2\sin(t+2\pi)-\sin(2t+4\pi)=2\sin(t)-\sin(2t)=g(t) \end{cases}$, donc f et g sont périodiques de période 2π . On limitera à l'étude à l'intervalle $\left[-\pi;\pi\right]$.

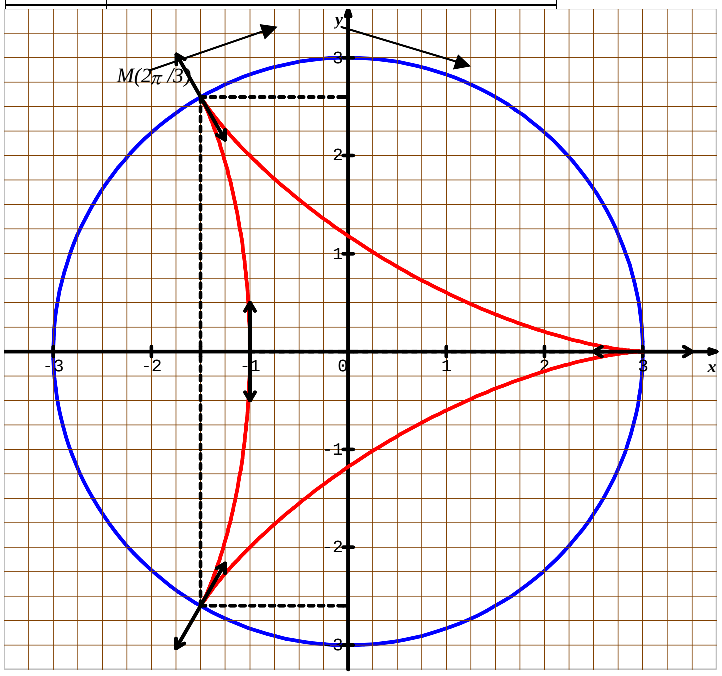
b. $\begin{cases} f(-t)=2\cos\left(-t\right)+\cos(-2t)=2\cos\left(t\right)+\cos(2t)=f(t) \\ g(-t)=2\sin(-t)-\sin(-2t)=-2\sin t+\sin(2t)=-g(t) \end{cases}$, on constate que les points les point $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses pour tout $t\in\left[-\pi;\pi\right]$.la courbe ($\mathcal{C}$) admet l'axes des abscisses pour axe de symétrie .on pourra donc étudier les fonctions f et g sur l'intervalle $\left[0;\pi\right]$ et compléter le graphique par symétrie.

$\begin{cases} f'(t)=-2\sin(t)-2\sin(2t)=-2\sin t(1+2\cos t) \\ g(t)=2\cos t-2\cos 2t=2(1-\cos t)(1+2\cos t) \end{cases}$

t	0		$2\pi/3$		π
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(t)$	3	↘	$-3/2$	↗	-1
$g'(t)$	0	$+$	0	$-$	0



Graphique sur l'intervalle $[0;\pi]$



Graphique sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$

Exercice 6

1. f est périodique , de période $T_1=\dfrac{2\pi}{3}$. g est périodique de période $T_2=\pi$ .le plus multiple commun à T_1 et T_2 est $T=2\pi$, il suffit de faire l'étude sur un intervalle d'amplitude 2π soit $\left[-\pi;\pi\right]$.

2. D'autre part $\begin{cases} f(-t)=2\cos(-3t)=2\cos(3t) \\ g(-t)=\sin(-2t)=-\sin(2t) \end{cases}$, f est paire et g est impaire ; les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses .La courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses ; on peut donc étudier f et g sur l'intervalle $\left[0;\pi\right]$.

3. $\begin{cases} f(\pi+t)=2\cos(3\pi+3t)=2\cos(\pi+3t)=-2\cos 3t=-f(t) \\ g(\pi+t)=\sin(2\pi+2t)=\sin(2t)=g(t) \end{cases}$. Les points $M(t)$ et $M(\pi+t)$ sont symétriques Par rapport à l'axe des ordonnées .donc la courbe est symétrique par rapport à O

Quand $t\in\left[0;\pi/2\right]$, $\pi+t\in\left[\pi;3\pi/2\right]$. Il suffira donc d'étudier f et g sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. on a : $f'(t) = -6\sin 3t$. $f'(t) = 0$ équivaut à $\sin 3t = 0$ c'est-à-dire $3t = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), d'où $t = \dfrac{k\pi}{3}$.

Les solutions à retenir dans le domaine de définition sont donc $t_0 = 0$ et $t_1 = \pi/3$.

Si $t \in [0;\pi/3]$, alors $3t \in [0;\pi]$ et $\sin 3t \geq 0$, on a donc $f'(t) \leq 0$ et par conséquent f est décroissante sur $[0;\pi/3]$.

Si $t \in [\pi/3;\pi/2]$,alors $3t \in [\pi;3\pi/2]$ et $\sin 3t \leq 0$, on a donc $f'(t) \geq 0$ et par conséquent f est croissante sur $[\pi/3;\pi/2]$.

$g'(t) = 2\cos 2t$. $g'(t) = 0$ équivaut à $\cos 2t = 0$ c'est-à-dire $2t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), d'où $t = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$.

Dans l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ la seule solution à retenir est $t_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

Si $t \in \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$, alors $2t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\cos 2t \geq 0$, on a donc $g'(t) \geq 0$ et par conséquent g est croissante sur $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Si $t \in \left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $2t \in \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ et $\cos 2t \leq 0$, on a donc $g'(t) \leq 0$ et par conséquent g est décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

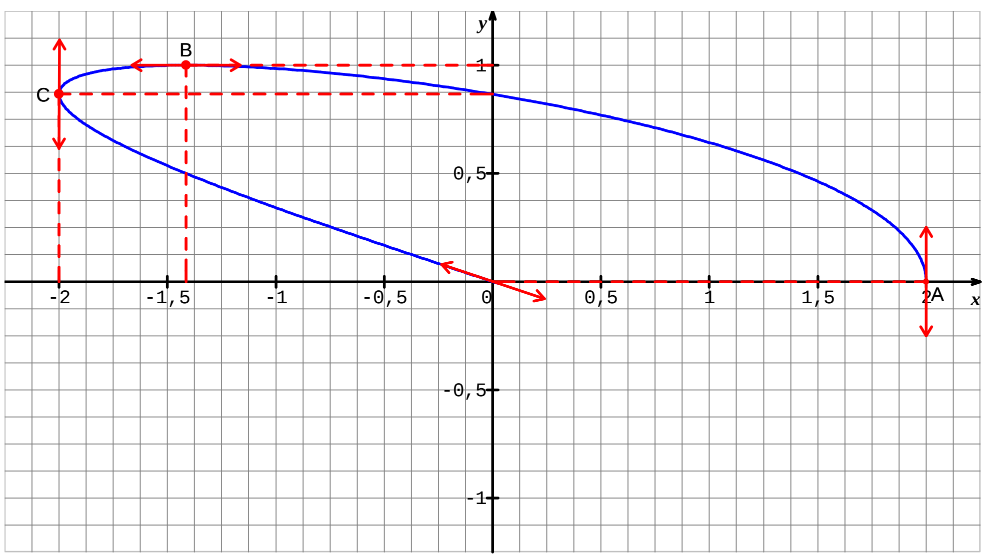
t	0		$\dfrac{\pi}{4}$		$\dfrac{\pi}{3}$		$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(t)$	0	$-$	$-3\sqrt{2}$	$-$	0	$+$	6
$f(t)$	2	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$g'(t)$	2	$+$	0	$-$	-1	$-$	-2
$g(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

5. En A de paramètre $t_0 = 0$: $f'(0) = 0$ et $g'(0) = 2$, la tangente à ($\mathcal{C}$) en $A(2;0)$ est parallèle à l'axe des ordonnées. En B de paramètre $t_2 = \dfrac{\pi}{4}$: $f'(\dfrac{\pi}{4}) = -6\sin\dfrac{3\pi}{4} = -6\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2}$ et $g'(\dfrac{\pi}{4}) = 2\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, la tangente à ($\mathcal{C}$) en $B(-\sqrt{2};1)$ est parallèle à l'axe des abscisses. En C de paramètre $t_1 = \dfrac{\pi}{3}$:

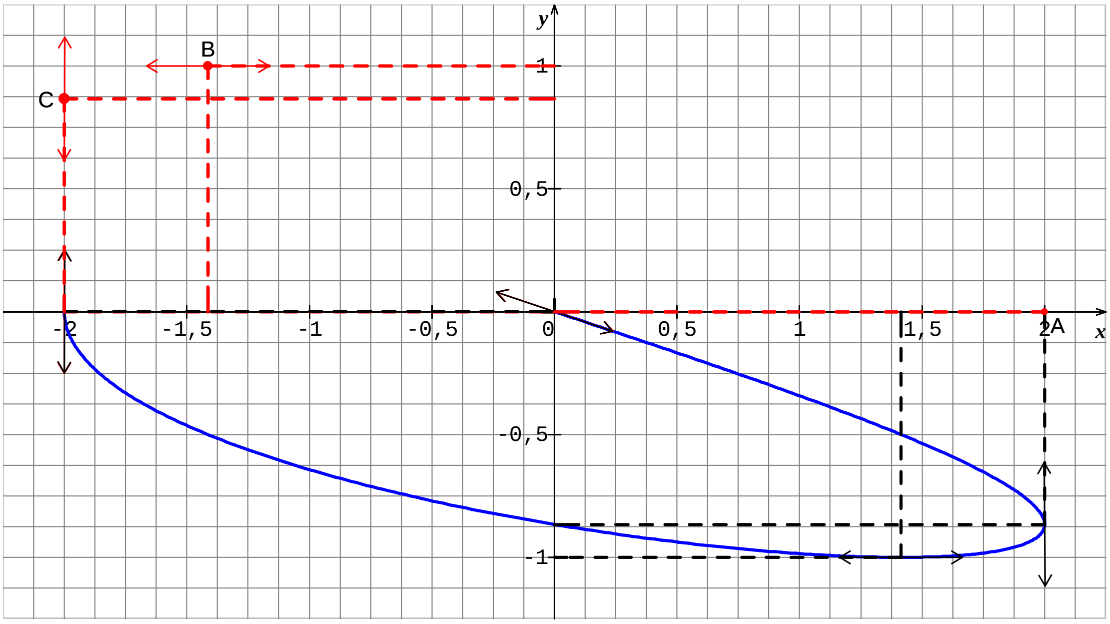
$f'(\dfrac{\pi}{3}) = -6\sin\pi = 0$ et

$g'(\dfrac{\pi}{3}) = 2\cos\dfrac{2\pi}{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1$

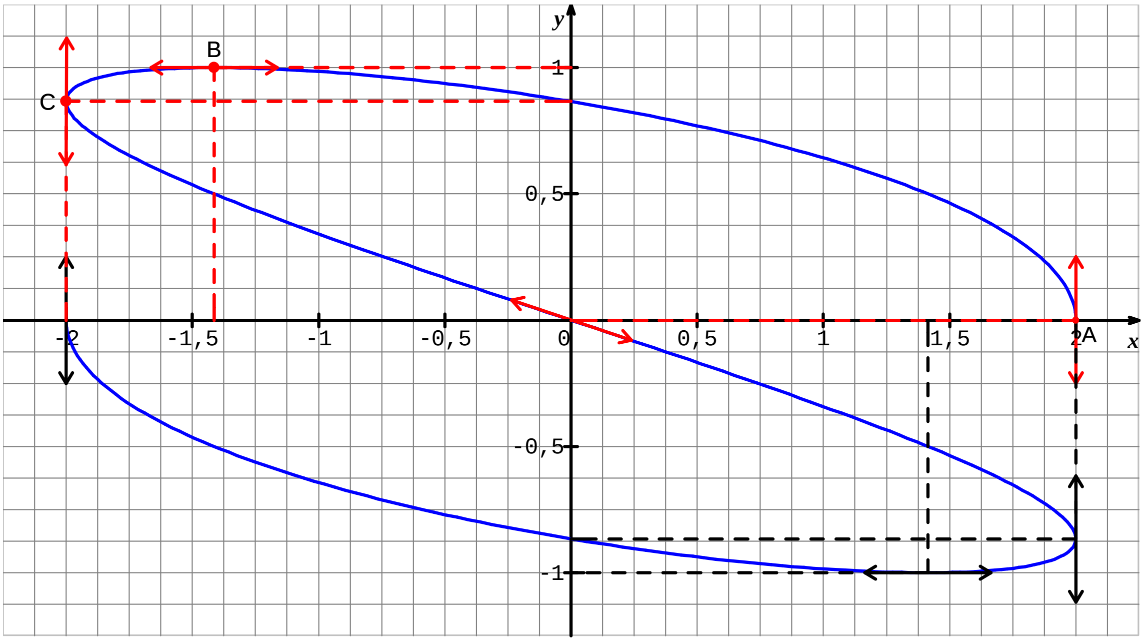
la tangente à ($\mathcal{C}$) en $C(-1;\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ est parallèle à l'axe des ordonnées. Sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on obtient un arc de courbe C_1



Sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, on obtient un arc de courbe $\mathcal{C}_2$

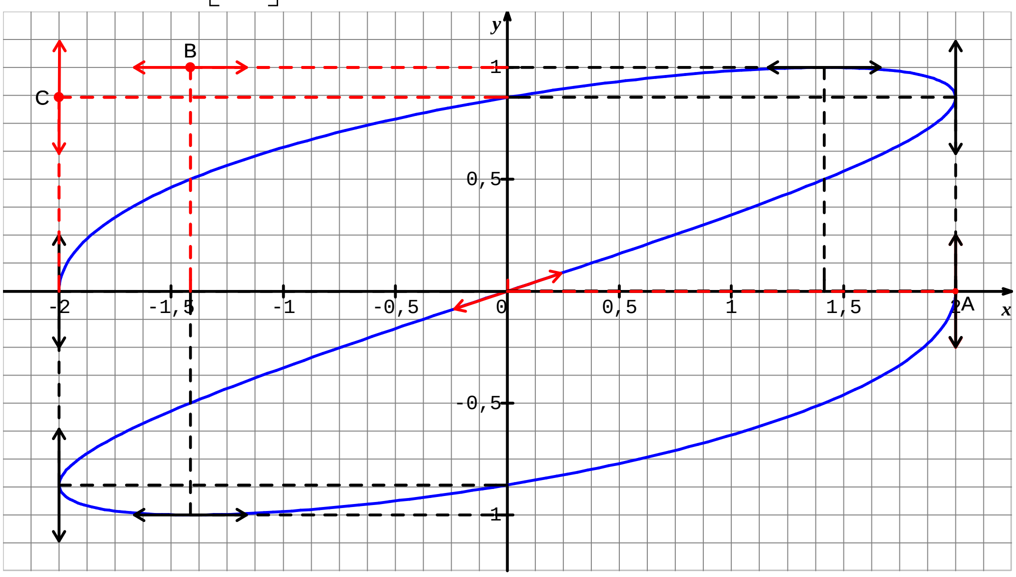


Sur l'intervalle $\left[0;\pi\right]$,la représentation est constituée de $\mathcal{C}_1$ et de son symétrique par rapport à O

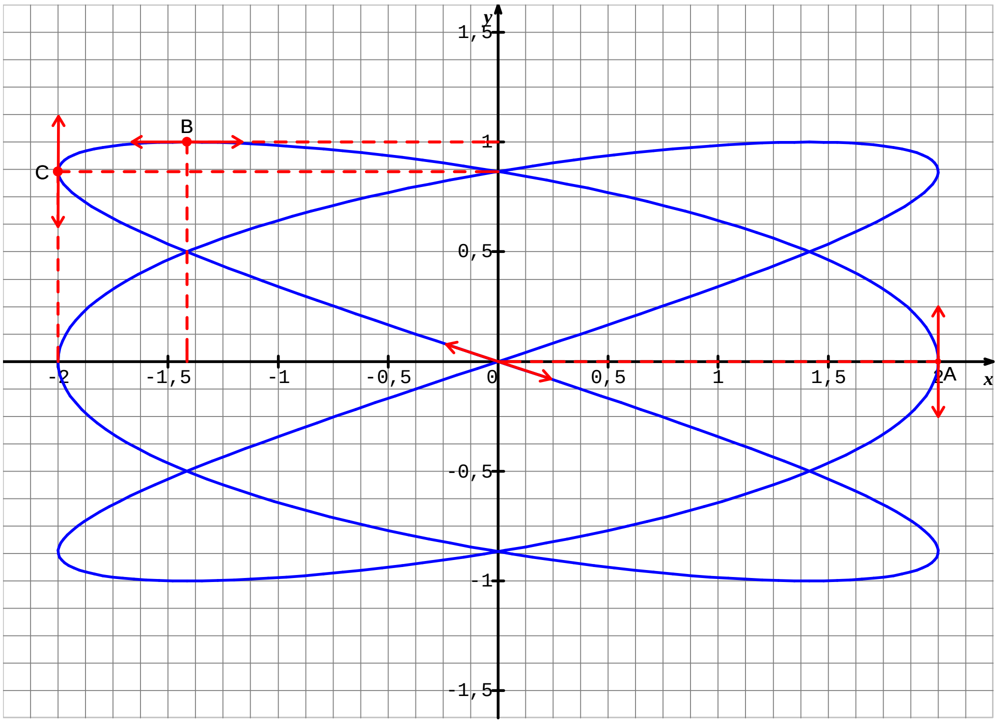


La courbe ci-dessus est $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

Sur l'intervalle $\left[0;\pi\right]$, on obtient un arc de courbe C '' symétrique de C ' par rapport à l'axe des abscisses



La courbe $\mathcal{C}$ est la réunion $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \cup \mathcal{C}''$



$M(\pi/6)\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\overrightarrow{v_M}(-3;1)$.

Exercice 7

$$\begin{cases} x(t) = f(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = g(t) = \sin 2t \end{cases}.$$

1. $\begin{cases} f(t+2\pi) = 2\cos(t+2\pi) + \cos(2t+4\pi) = 2\cos(t) + \cos(2t) = f(t) \\ g(t+2\pi) = \sin(2t+4\pi) = \sin(2t) \end{cases}$, donc f et g sont périodiques de période 2π . On limitera à l'étude à l'intervalle $\left[-\pi;\pi\right]$.

b. $\begin{cases} f(-t) = 2\cos(-t) + \cos(-2t) = 2\cos(t) + \cos(2t) = f(t) \\ g(-t) = \sin(-2t) = -\sin 2t = -g(t) \end{cases}$, on constate que les points les point $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses pour tout $t \in \left[-\pi;\pi\right]$ .la courbe ($\mathcal{C}$) admet l'axes des abscisses pour axe de symétrie .on pourra donc étudier les fonctions f et g sur l'intervalle $\left[0;\pi\right]$ et compléter le graphique par symétrie.

$\begin{cases} f'(t) = -2\sin(t) - 2\sin(2t) \\ g'(t) = 2\cos 2t \end{cases}$

$f'(t) = -2\left(\sin(t) + \sin(2t)\right)$

$f'(t) = -4\sin\left(3t/2\right)\cos\left(t/2\right)$

$t \in [0;2\pi/3]$: $\dfrac{3t}{2} \in [0;\pi]$

$t/2 \in [0;\pi/3]$

Donc $\sin\left(3t/2\right) \geq 0$

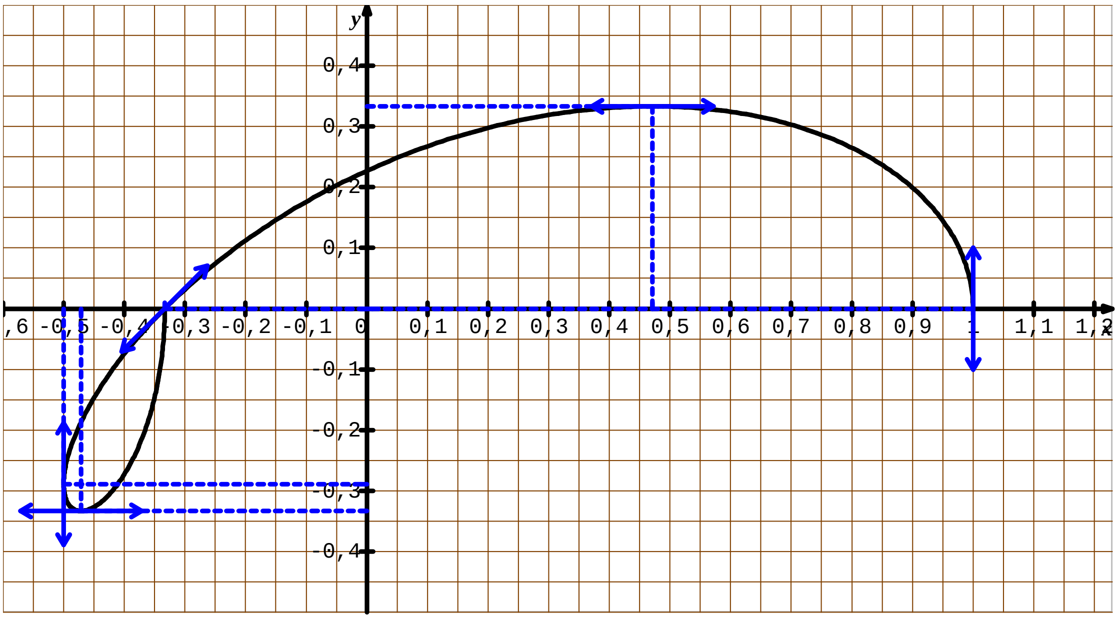
t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$2\pi/3$		$3\pi/4$		π
$f'(t)$	0	$-$	$-\sqrt{2}$	$-$	-2	$-$	0	$+$		$+$	
$f(t)$	3	↘	$\sqrt{2}$	↘	-1	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	$-\sqrt{2}$	↗	-1
$g'(t)$	2	$+$	0	$-$	-2		-1	$-$	0	$+$	2
$g(t)$	0	↗	1	↘	0	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	-1	↗	0

et $\cos\left(t/2\right) \geq 0$, donc $f'(t) \leq 0$, pour tout $t \in [0;2\pi/3]$ et $f'(t) \geq 0$.

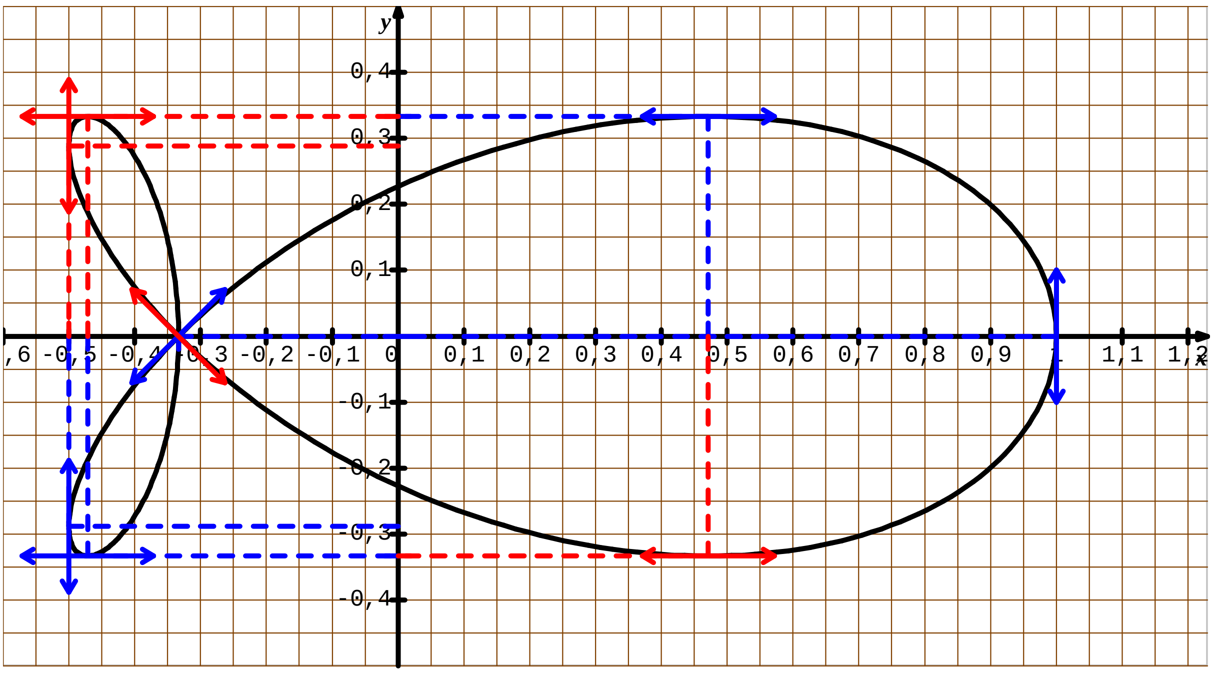
$g'(t) = 2\cos 2t$: $t \in [0;\pi/4]$: $2t \in [0;\pi/2]$, donc $g'(t) = 2\cos 2t \geq 0$ et $t \in [\pi/4;3\pi/4]$ alors $2t \in [\pi/2;3\pi/2]$

Donc $g'(t) = 2\cos 2t \leq 0$ sur$[\pi/4 ; 3\pi/4]$ et enfin $g'(t) = 2\cos 2t \geq 0$ sur$[3\pi/4;\pi]$.

Graphique sur l'intervalle $[0;\pi]$



Graphique sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$



<u>Exercice 8</u>

Soit la courbe définie par $\begin{cases} f(t) = -6t^3 + 6t^2 \\ g(t) = -6t^2 + 6t \end{cases}$; $t \in [0;1]$

Déterminer les tangentes à la courbe ($\mathcal{C}$) aux points A ,B et E de paramètres respectifs $t_0 = 0$; $t_1 = \dfrac{1}{2}$ $t_2 = 1$ et $t_3 = 1$. **<u>Pour</u>** $M(0)$: $t_0 = 0$ Tangente au point $O(0;0)$: $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ g'(0) = 6 \end{cases}$

La tangente à (C) au point O a pour vecteur directeur $\vec{j}$. **Pour** $M\left(\frac{2}{3}\right)$: $t_1=\frac{2}{3}$ .Tangente au point $B(\frac{8}{9};\frac{4}{3})$: $\left\{ f'\left(\frac{2}{3}\right)=0 \quad et \quad g'\left(\frac{2}{3}\right)=-2 \right.$.La tangente à ($\mathcal{C}$) au point B a pour vecteur directeur $\vec{j}$. **Pour** $M\left(\frac{1}{2}\right)$: $t_2=\frac{1}{2}$: Tangente au point $E(\frac{3}{4};\frac{3}{2})$: $\left\{ f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2} \quad et \quad g'\left(\frac{1}{2}\right)=0 \right.$. La tangente à ($\mathcal{C}$) au point E a pour vecteur directeur $\vec{i}$. **Pour** $M(1)$: $t_3=1$ Tangente au point $O(0;0)$: $\begin{cases} f'(1)=-6 \\ g'(1)=-6 \end{cases}$. La tangente à ($\mathcal{C}$) au point O a pour vecteur directeur colinéaire à $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$, donc le coefficient directeur de l'autre tangente en O est 1 . Le point O est un point double

Variations de f et g

Dérivées : $\begin{cases} f'(t)=6t(-3t+2) \\ g'(t)=6(-2t+1) \end{cases}$. $f'(t)>0 \Leftrightarrow -3t+2>0 \Leftrightarrow t<\frac{2}{3}$ et $g'(t)>0 \Leftrightarrow -2t+1>0 \Leftrightarrow t<\frac{1}{2}$

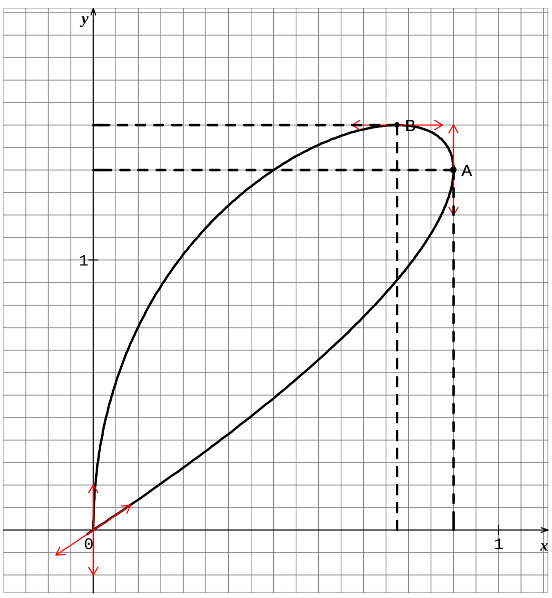
Représentation graphique

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$,On place les points remarquables et leurs Tangentes , puis la courbe sachant que :

Du point $M(0)$ au point $M\left(\frac{1}{2}\right)$ de coordonnées $E(\frac{3}{4};\frac{3}{2})$,on se déplace en montant et vers la droite car f et g sont croissantes .

Du point $M\left(\frac{1}{2}\right)$ de coordonnées $E(\frac{3}{4};\frac{3}{2})$ au point $M\left(\frac{2}{3}\right)$ de coordonnées $B(\frac{8}{9};\frac{4}{3})$,on se déplace en descendant et vers la droite car f est croissantes et g est décroissante ..

Du point $M\left(\frac{2}{3}\right)$ de coordonnées $B(\frac{8}{9};\frac{4}{3})$ au point $M(1)$ de coordonnées $O(0;0)$,on se déplace en descendant et vers la gauche car f et g sont décroissantes .



t	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
Signe de $f'(t)$	0	+	$\frac{3}{2}$	+	0		-6
Variation de $f(t)$	0		$\frac{3}{4}$		$\frac{8}{9}$		0
Signe de $g'(t)$	6	+	0		-2		-6
Variation de $g(t)$	0		$\frac{3}{2}$		$\frac{4}{3}$		0

Exercice 9

Soit la courbe définie par $\begin{cases} f(t)=-t^2+t+1/2 \\ g(t)=t^2/2 \end{cases}$

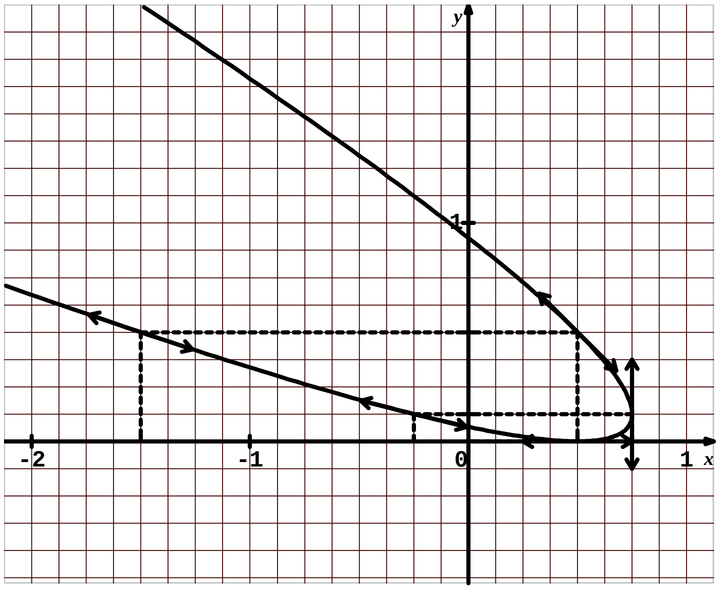
Dérivées : $\begin{cases} f'(t)=-2t+1 \\ g'(t)=t \end{cases}$

Déterminer les tangentes à la courbe ($\mathcal{C}$) aux points A ,B et E de paramètres respectifs $t_0 = 0$; $t_1 = 1/2$ et $t_2 = 1$.

$t_0 = 0$: Tangente au point $A(1/2;0)$: $\begin{cases} f'(0) = 1 \\ g'(0) = 0 \end{cases}$. La tangente à ($\mathcal{C}$) au point A a pour vecteur directeur $\vec{i}$

$t_1 = 1/2$ .Tangente au point $B(3/4;1/8)$: $\begin{cases} f'(1/2) = 0 \\ g'(1/2) = 1/2 \end{cases}$. La tangente à ($\mathcal{C}$) au point B a pour vecteur directeur $\vec{j}$.

$t_2 = 1$: Tangente au point $E(1/2;1/2)$: $\begin{cases} f'(1) = -1 \\ g'(1) = 1 \end{cases}$.La tangente à ($\mathcal{C}$) au point E a pour vecteur directeur $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j}$.



Exercice 10

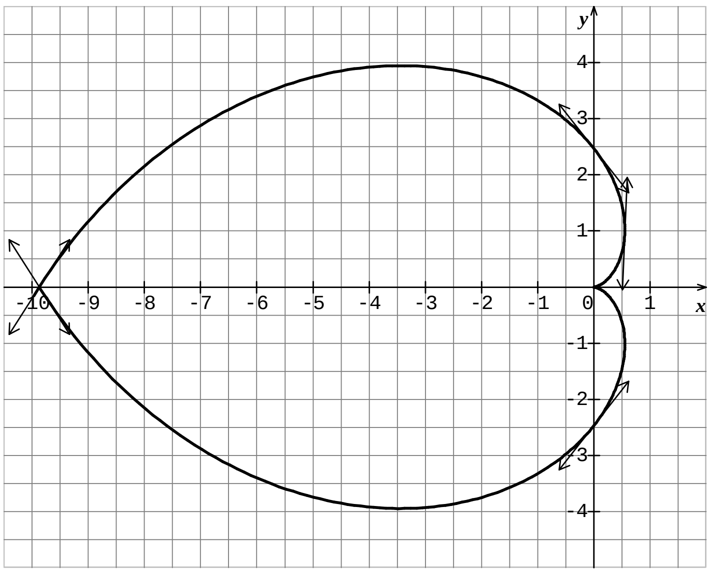
Etude de la fonction $t \mapsto r(t) = t^2$.La fonction dérivée de r est définie par $r'(t) = 2t$. $r'(t) < 0$ sur $[-\pi; 0]$ et $r'(t) > 0$ sur $[0; \pi]$, par conséquent , r est décroissante sur $[-\pi; 0]$ et croissante Sur $[0; \pi]$.

Etude de la fonction $t \mapsto \varphi(t) = t$. φ est une fonction linéaire croissant sur $[-\pi; \pi]$

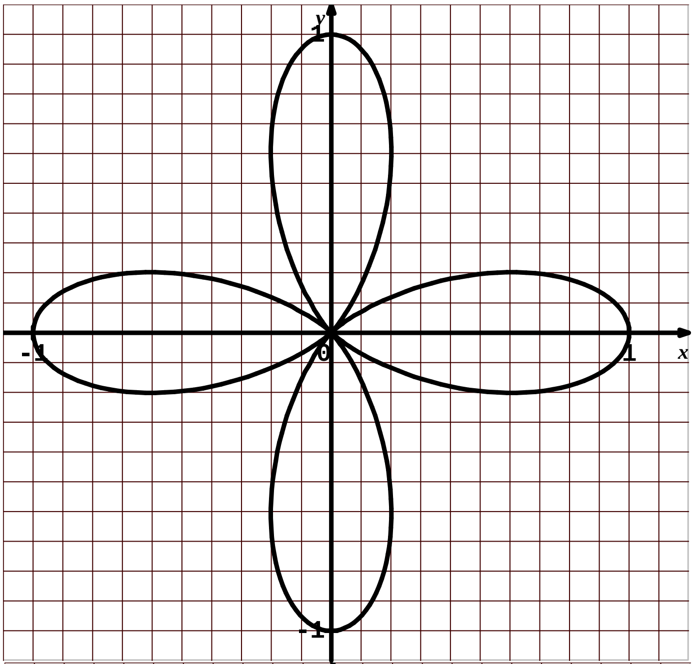
t	$-\pi$	0	π
Signe de $r'(t)$	$-$	0	$+$
Variation de $r(t)$	π^2 ↘	0	↗ π^2
Signe de $\theta'(t)$	$+$		$+$
Variation de $\theta(t)$	$-\pi$ ↗		π

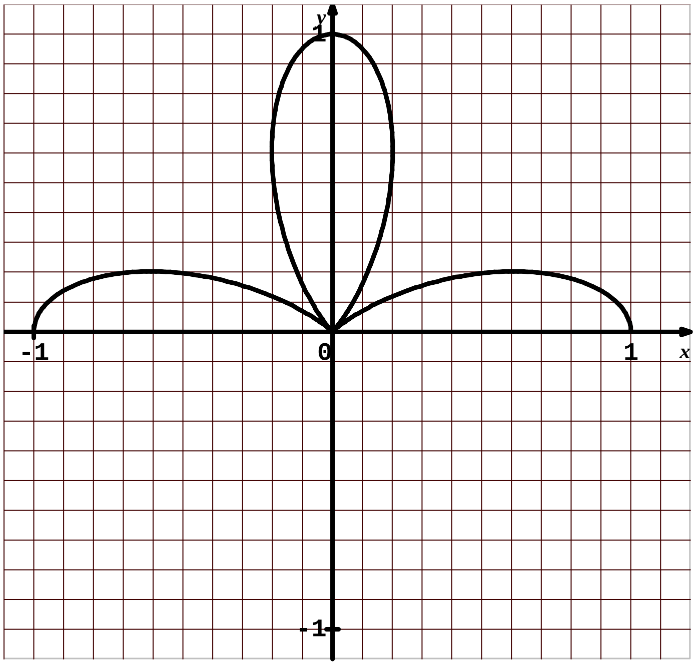
Représentation graphique

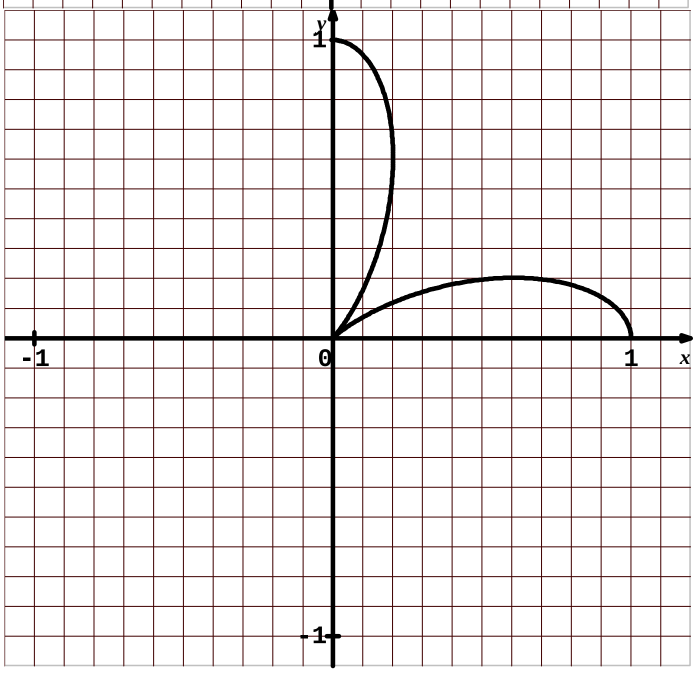
La courbe ($\mathcal{C}$) est l'ensemble des points M de coordonnées : $\begin{cases} x(t) = t^2 \cos t \\ y(t) = t^2 \sin t \end{cases}$; $t \in [-\pi; \pi]$



Exercice 10





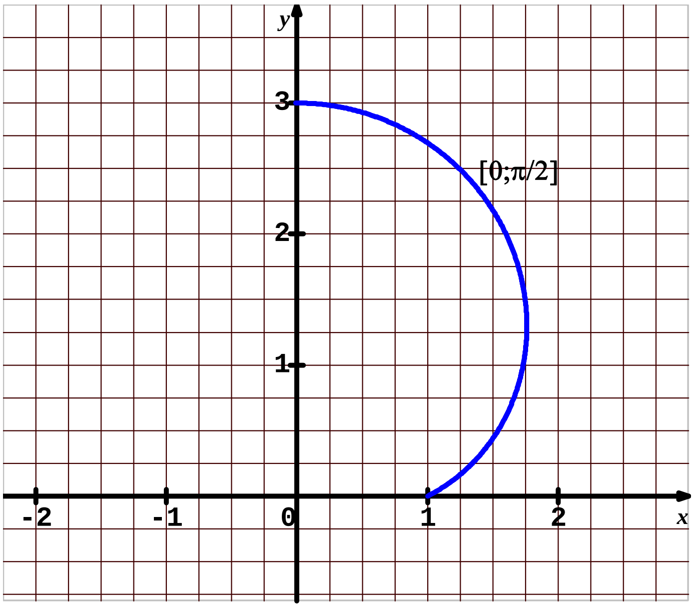


$\begin{cases} \rho(t) = t^2 \\ \theta(t) = \dfrac{1}{2}\arccos t \end{cases}$; $t \in [-1;1]$. $\begin{cases} \rho(t) = 2t \\ \theta(t) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$ $t \in]-1;1[$

t	-1		0		1
$\rho'(t)$	-2	$-$	0	$+$	2
$\rho(t)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1
$\theta'(t)$		$-$		$-$	
$\theta'(t)$	$\pi/2$		$\searrow$		0

$r(\theta) = \cos^2(2\theta)$

Exercice 12



$\begin{cases}\rho(t)=2t+1\\ \theta(t)=\arcsin t\end{cases}$; $t\in[-1;1]$. $\begin{cases}\rho'(t)=2\\ \theta'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\end{cases}$ $t\in[0;1]$

t	-1		0		1
$\rho'(t)$	2	+	0	+	2
$\rho(t)$	1	↗			3
$\theta'(t)$		+		+	
$\theta'(t)$	0	↗			$\pi/2$

$r(\theta)=1+2\sin\theta$ en coordonnées polaires ($t=\sin\theta$)

Exercice 13

$\begin{cases}f(t)=2\cos t\\ g(t)=2\sin(2t)\end{cases}$

1.a. $\begin{cases}f(t+2\pi)=2\cos(t+2\pi)=2\cos(t)=f(t)\\ g(t+2\pi)=\sin(2t+4\pi)=\sin(2t)\end{cases}$, donc f et g sont périodiques de période 2π .

On limitera à l'étude à l'intervalle $\left[-\pi;\pi\right]$.

b. $\begin{cases}f(-t)=2\cos\left(-t\right)=2\cos\left(t\right)=f(t)\\ g(-t)=2\sin(-t)=-2\sin t=-g(t)\end{cases}$, on constate que les points les point $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses pour tout $t\in\left[-\pi;\pi\right]$.la courbe (*C*) admet l'axes des abscisses pour axe de symétrie .on pourra donc étudier les fonctions f et g sur l'intervalle $\left[0;\pi\right]$ et compléter le graphique par symétrie.

c. $\begin{cases}f(\pi-t)=2\cos(\pi-t)=-2\cos(t)=-f(t)\\ g(\pi-t)=\sin(2\pi-2t)=\sin(-2t)=-\sin(2t)=-g(t)\end{cases}$ on constate que les points les point $M(t)$ et $M(\pi-t)$ sont symétriques par rapport à O. on déduit que la courbe (C) est symétrique par rapport à O, puis on étudiera la courbe (C) sur l'intervalle $[0;\pi/2]$.

2. $\begin{cases}f'(t)=-2\sin t\\ g'(t)=2\cos(2t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'(t)=0\\ g'(t)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=0\\ t=\pi/4\end{cases}$.

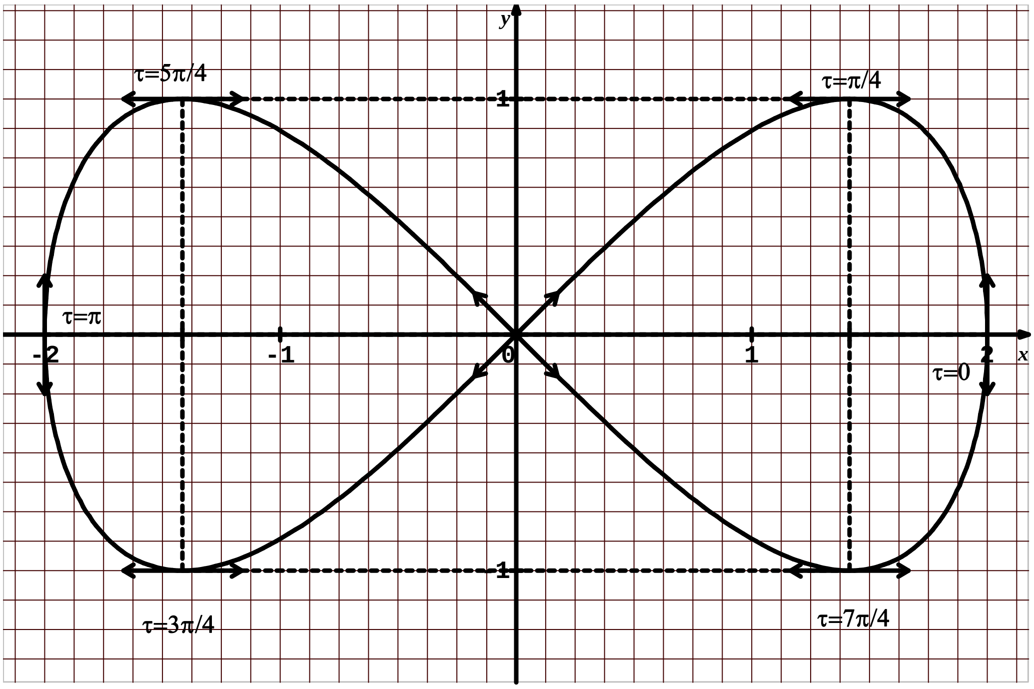
Tableau de variations

Si $t\in[0;\pi/2]$ $\sin t>0$, donc $-2\sin t<0$

Si $t\in[0;\pi/4]$; $2t\in[0;\pi/2]$, alors $2\cos(2t)>0$

et $t\in[\pi/4;\pi/2]$; $2t\in[\pi/2;\pi]$ alors $2\cos(2t)<0$

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$	0	$-$	$-\sqrt{2}$	$-$	-2
$f(t)$	2	↘	$\sqrt{2}$	↘	0
$g'(t)$	2	+	0	$-$	-2
$g(t)$	0	↗	1	↘	0



3. Tangente parallèle à l'axe des abscisses en $M(\pi/4)$; $M(3\pi/4)$; $M(5\pi/4)$; $M(7\pi/4)$.

$M(\pi/4)$ correspond à $M(\sqrt{2};1)$. $M(3\pi/4)$ correspond à $M(-\sqrt{2};-1)$;

$M(5\pi/4)$ correspond à $M(-\sqrt{2};1)$ et $M(7\pi/4)$ correspond à $M(\sqrt{2};-1)$.$\vec{u}=a\vec{i}$

Tangente parallèle à l'axe des ordonnées en $N(0)$; $N(\pi)$

$N(0)$ correspond à $N(2;0)$. $N(\pi)$ correspond à $N(-\sqrt{2};0)$ $\vec{u}=b\vec{j}$

Tangente oblique $P(\pi/2)$ correspond à $P(-0,0)$ de vecteur directeur $\vec{u}=-2\vec{i}-2\vec{j}$ ou $\vec{u}=2\vec{i}+2\vec{j}$