TP	COMPLEXES	MATHEMATIQUES	BTS2

Exercice 1

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$

On considère la fonction H définie, pour tout nombre complexe p distinct de 0 et de -1 par : $H(p)=\dfrac{1}{p(1+p)}$

Dans toute la suite de l'exercice, on prend $p=j\omega$, où ω désigne un nombre réel strictement positif.

l) On note $r(\omega)$ le module du nombre complexe $H(j\omega)$ et on considère la fonction G définie, pour tout réel ω strictement positif, par : $G(\omega)=\dfrac{20}{\ln 10}\ln r(\omega)$. Montrer que : $G(\omega)=-\dfrac{20}{\ln 10}\ln\left(\omega\sqrt{1+\omega^2}\right)$.

2) a)Déterminer les limites de la fonction G en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que la fonction G est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

3) a) Montrer qu'un argument $\phi(\omega)$ de $H(j\omega)$ est : $\phi(\omega)=-\dfrac{\pi}{2}-Arc\tan\omega$

b) Étudier les variations de la fonction ϕ sur $]0\,;+\infty[$ (on précisera les limites en 0 et en $+\infty$).

4. On considère la courbe C définie par la représentation paramétrique : $\begin{cases} x(\omega)=-\dfrac{\pi}{2}-\arctan\omega \\ y(\omega)=-\dfrac{20}{\ln 10}\ln\left(\omega\sqrt{1+\omega^2}\right)\end{cases}$ $\omega>0$

a. Dresser le tableau des variations conjointes des fonctions x et y.

b. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant : on donnera des valeurs décimales arrondies au centièmes .

ω	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,786	0,9	1,5	2
$x(\omega)$						-2 ,24			
$y(\omega)$						0			

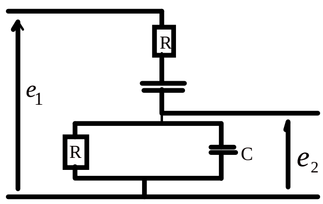
c. Tracer la courbe C dans un repère orthogonal , on prendra pour unités graphiques 5 cm sur l'axe de abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées .

Exercice 2

On note j le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\pi/2$. On considère le filtre suivant :

Les constantes R et C sont des réels strictement positifs caractéristiques du circuit. A l'entrée de ce filtre, on applique une tension sinusoïdale e_1 de pulsation ω. En sortie, on recueille une tension sinusoïdale e_2 de même pulsation ω. On désigne par $\omega \mapsto T(\omega)$ la fonction de transfert en tension. L'application des lois de l'électricité permet d'écrire alors :

$T(\omega)=\dfrac{1}{1+\dfrac{Z_1(\omega)}{Z_2(\omega)}}$ .où $Z_1(\omega)=R+\dfrac{1}{jc\omega}$ et $Z_2(\omega)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{R}+jc\omega}$



1° Montrer que: $T(\omega)=\dfrac{1}{3+j\left(RC\omega-\dfrac{1}{RC\omega}\right)}$

2° a)On considère la fonction h, définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $h(\omega)=RC\omega-\dfrac{1}{RC\omega}$.

Etudier les variations de la fonction h .Préciser les limites en 0 et $+\infty$.

b) Quel est l'ensemble (D) décrit par le point M d'affixe $z=3+jh(\omega)$, lorsque ω parcourt $]0\,;+\infty[$.

3°. soit $T(\omega)=\dfrac{1}{3+jh(\omega)}$. On munit le plan d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ d'unité graphique 12 cm.

a. Quel est l'ensemble (C)des points M d'affixe $T(\omega)=\dfrac{1}{3+jh(\omega)}$ lorsque ω décrit l'intervalle $]0;+\infty[$?

b. On prend $RC=1$. Représenter, dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ les ensembles (Γ) et (C).

Exercice 3

On rappelle que $h(p)=\dfrac{4\alpha^2}{(p+\alpha)^2+(\alpha\sqrt{3})^2}$. j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$

1. On considère la fonction r définie pour tout réel $\omega>0$ par : $r(\omega=\left|H(j\omega)\right|$. Montrer que $r(\omega)=\dfrac{4\alpha^2}{\sqrt{\omega^4-4\alpha^2\omega^2+16\alpha^4}}$

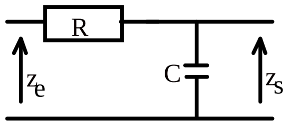
2. On considère la fonction f définie pour tout réel $\omega > 0$ par : $f(\omega) = \omega^4 - 4\alpha^2\omega^2 + (2\alpha)^4$

Montrer que $f'(\omega) = 4\omega(\omega - \alpha\sqrt{2})(\omega + \alpha\sqrt{2})$

3. Montrer que $r'(\omega)$ est du signe de $-f'(\omega)$.(on pourra calculer la dérivée de $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ *et* $\left(\frac{k}{\sqrt{u}}\right)' = \frac{-k\left(\sqrt{u}\right)'}{\left(\sqrt{u}\right)^2} = \frac{-ku'}{2u\sqrt{u}}$).

4. En déduire que $r(\omega)$ est maximal pour une valeur de ω_0 de ω .Donner la valeur de ω_0 et calculer $r(\omega_0)$ avec $\alpha = 250$.

Exercice 4



Le quadripôle représenté ci-contre est constitué d'un résistor de résistance R exprimée en Ω et d'un condensateur de capacité C exprimée en μ F . On associe respectivement à la tension d'entrée et à la tension de sortie les nombres complexes z_s et z_e .

On appelle transmit-tance le nombre complexe Z défini par : $Z = \frac{z_s}{z_e}$.

On admet que: $Z = \frac{1}{1 + jRC\omega}$ où ω désigne la pulsation exprimée en radians par seconde et j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$ .On pose $R = 50\Omega$; $C = 2\mu F$ et $\omega = 0{,}01\, rd/s$

1. Vérifier que $Z = \frac{1}{1 + j}$. Ecrire le nombre complexe Z sous forme algébrique puis déterminer le module et un argument de Z .
2. Le module de z_S peut-il être le double de celui de z_e ? Justifier la réponse fournie.
3. Dans cette question seulement, on suppose qu'un argument de z_s est $\pi/2$; déterminer alors un argument de z_e .
4. On suppose dans cette question que $z_e = 150\left(-\sqrt{3} + j\right)$.

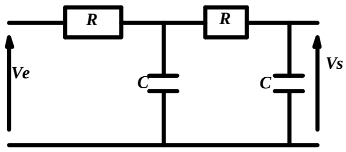
a. Déterminer l'écriture du nombre complexe z_e Sous la forme exponentielle $re^{i\alpha}$.

b. Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe z_s correspondant.

c. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\,)$ de telle manière qu'un centimètre représente 100 unités.

Placer les points M_e et M_s images respectives des nombres complexes z_e et z_s .

Exercice 5



Le circuit ci-dessus est alimenté par un courant alternatif de pulsation ω ; $\omega \in [0;+\infty[$.

La fonction de transfert H en tension est donnée par : $H(j\omega) = \frac{1}{jRC\omega + (1 + jRC\omega)^2}$

1. Montrer que le module de $H(j\omega)$ est $r(\omega) = \frac{1}{\sqrt{9R^2C^2\omega^2 + (1 - R^2C^2\omega^2)^2}}$
2. En prenant $RC = 1$. Etudier les variations de la fonction r lorsque $\omega \in [0;+\infty[$. Donner l'allure de sa courbe représentative.
3. Montrer qu'un argument de $H(j\omega)$ est $\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{3RC}{1 - R^2C^2\omega^2}\right)$. En prenant RC = 1.

Etudier les variations de la fonction φ lorsque $\omega \in [0;+\infty[$. Donner l'allure de sa courbe représentative

Exercice 6

On désigne par j le nombre complexe de module 1 dont un argument est $\pi/2$.

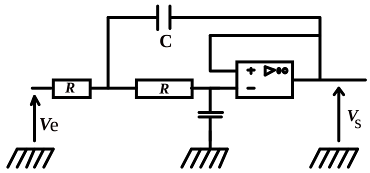
Le but de cet exercice est le tracé du "lieu de transfert" du filtre passe-bas représenté ci- dessous :

La fonction de transfert H de ce filtre est définie par $H(p) = \frac{1}{R^2C^2p^2 + 2RCp + 1} = \frac{1}{(RCp + 1)^2}$.

On suppose que RC = 1. On a donc: $H(p) = \frac{1}{(1 + p)^2}$. Soit ω un nombre réel positif.

1° a) Calculer, en fonction de ω , le module du nombre complexe $H(j\omega)$ .Ce module sera noté $\left|H(j\omega)\right|$.

b) Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par: $f(\omega) = \left|H(j\omega)\right|$.



Préciser $f(0)$ et la limite de f en $+\infty$.

Etudier les variations de f . Dresser son tableau de variation.

2° a) Montrer qu'on peut trouver un argument du nombre complexe $1 + j\omega$ dans l'intervalle $[0\,;\pi/3[$. Exprimer cet argument en utilisant la fonction arctangente .

En déduire qu'on peut trouver un argument du nombre complexe $H(j\omega)$ dans l'intervalle $]-\pi;0]$;

on le notera $g(\omega)$ .On définit ainsi, sur $[0\,;+\infty[$ une fonction g.

b) Préciser $g(0)$ et la limite de g en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3° Le "lieu de transfert" du filtre est la courbe décrite, dans le plan rapporté à un repère orthonormal , (10 cm pour pour une unité sur les axes) par le point d'affixe $H(j\omega)$, lorsque ω parcourt $[0\,;+\infty[$. C'est donc la courbe définie par la représentation polaire $\omega \mapsto f(\omega)e^{jg(\omega)}$ où f et g sont les fonctions introduites précédemment.

En s'aidant des questions 1° et 2°, tracer le "lieu de transfert" de ce filtre.

Exercice 7

En électronique on utilise la fonction T de la pulsation ω définie sur $]0;+\infty[$ [par : $T(\omega)=\dfrac{K}{R+j\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)}$

où j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$. K est une constante complexe, R, L et C sont des constantes réelles strictement positives. La pulsation ω est exprimée en radian/seconde.

On pose $h(\omega)=\dfrac{1}{R}\left[L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right]$ où $\omega\in\left]0;+\infty\right[$. Dans ces conditions $T(\omega)=\dfrac{K}{R}\times\dfrac{1}{1+jh(\omega)}$

1° Étudier les variations de la fonction h. Déterminer, en fonction de L et C, la valeur de ω qui annule h.

2° On se propose d'étudier l'ensemble (E) du plan complexe décrit par le point d'affixe T(ω) quand ω parcourt $]0;+\infty[$.

a) Représenter dans le plan complexe l'ensemble (D) des points d'affixe $1+j\,h(\omega)$

b) En utilisant les propriétés de l'inversion complexe, en déduire l'ensemble (G) des points d'affixe $\dfrac{1}{1+jh(\omega)}$

c) Préciser enfin la nature de l'ensemble (E).

d) Avec les données numériques fournies à la fin du texte, représenter graphiquement l'ensemble (E) lorsque $\alpha=0$ et colorier la partie de (E) correspondant aux valeurs de la fréquence f comprises entre 50 Hz et 100 Hz.

e) En utilisant les résultats précédents, traiter de même le cas où $\alpha=\pi/6$.

Données numériques :

La fréquence $f=\omega/2\pi$ est exprimée en Hertz. L = 0,05 ; $C=20\times10^{-6}$; R = 50 ; $K=220e^{j\alpha}$.

Pour les représentations graphiques, le choix du repère et des unités est laissé à l'initiative du candidat.

Exercice 8

L'objet de cet exercice est l'étude de la phase d'un "filtre à avance de phase".

Les constantes R, C et k sont des réels caractéristiques du circuit avec : R > 0, C > 0 et k > 1.

La fonction de transfert iso chrome d'un tel filtre est donnée par : $H(j\omega)=\dfrac{1+jRC\omega}{k+jRC\omega}$ où $\omega\in\left[0;+\infty\right[$

Dans toute la suite on pose $x=RC\omega$.

1° a) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $H\left(j\dfrac{x}{RC}\right)$

b) Montrer que le nombre complexe $H\left(j\dfrac{x}{RC}\right)$ admet un argument q(x) dans l'intervalle $\left]-\pi/2;\pi/2\right[$

c) En déduire que : $\theta(x)=Arc\tan\left((k-1)\dfrac{x}{x^2+k}\right)$ où $\omega\in\left[0;+\infty\right[$. On dit que $\theta(x)$ est la "phase" de la fonction de transfert iso chrome.

2° a) Étudier les variations de la fonction $x\mapsto\theta(x)$ pour où $\omega\in\left[0;+\infty\right[$.

b) En déduire la valeur numérique de k pour que le maximum de la phase soit égal à $\pi/6$.

Exercice 9

On désigne par j le nombre complexe de module 1 dont un argument est $\pi/2$.

En électronique on utilise la fonction de transfert T de la pulsation ω définie par : $T(\omega)=\dfrac{k}{(1+j\omega\tau)^3}$

Où k et τ sont des nombres réels positifs. Pour améliorer les qualités du filtre, on réalise une contre-réaction sur le montage correspondant et on obtient alors la nouvelle fonction du transfert : $H(\omega)=\dfrac{T(\omega)}{1+T(\omega)}$.

Le but du problème est d’utiliser un diagramme représentant T pour obtenir graphiquement certaines caractéristiques de H . Pour cette étude on se ramène au cas où $\tau=1$ et $k=4$, ce que l’on supposera Dans toute la suite de problème.

1°. Sur le graphique ci-dessous , on donne dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ l’ensemble C des points M du plan d’affixe $T(\omega)$ quand ω décrit l’intervalle $]0\,;+\infty[$.

Calculer $T(0)$; $T\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $T(1)$; $T\left(\sqrt{3}\right)$ et placer leurs images respectives $M_0; M_1; M_2; M_3$ sur la courbe C

2°. Calculer les modules et argument de $H(0)$; $H(1)$; $H\left(\sqrt{3}\right)$.

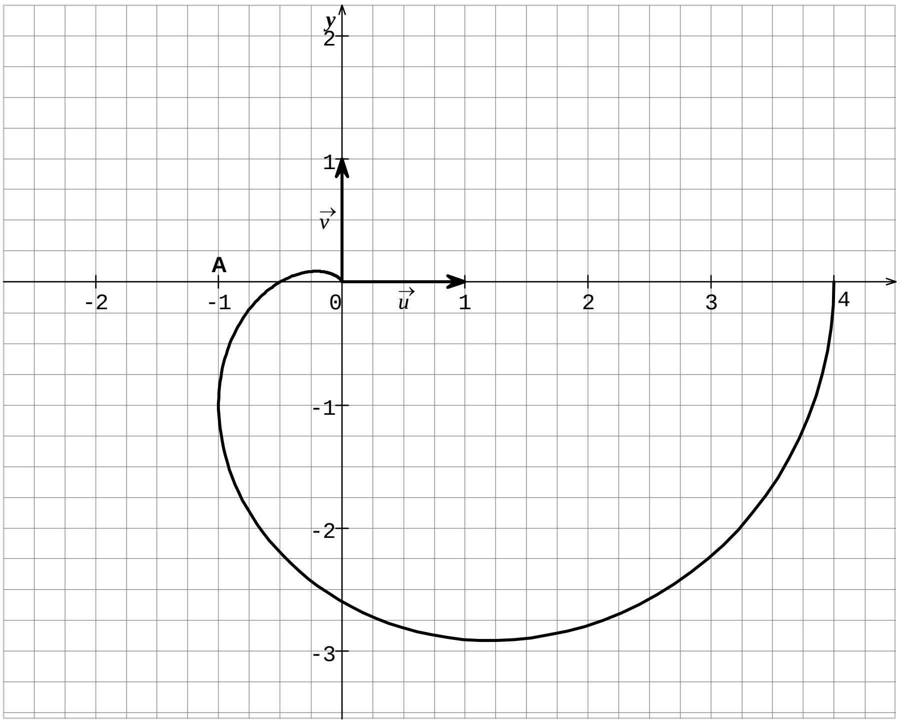
3°. On se propose de déterminer un procédé graphique pour obtenir le module et un argument de $H(\omega)$.

On note A le point d'affixe -1 et M le point d'affixe $T(\omega)$.

a. Montrer que le module de $H(\omega)$ est égal à $\frac{MO}{MA}$.

b . Montrer qu'un argument de $H(\omega)$ est égal à l'angle $(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MO})$.

c. En utilisant ce qui précède , expliquer comment on peut retrouver les résultats de la question 2° par une lecture graphique .



<u>Exercice 10</u>

Un système asservi par un régulateur de gain G admet en boucle ouverte, la fonction de transfert suivante : $A(p) = \frac{Gk}{p(\theta p+1)^2}$

dans laquelle C, k, θ sont des constantes positives caractéristiques du système et p le nombre complexe défini par $p = j\omega$ avec $\omega \in \left]\,0\,;+\infty\right[$.(On s'intéresse au lieu de transfert de Nyquist qui est l'ensemble (C) des points M du plan complexe dont l'affixe est $A(j\omega)$, Ce lieu de transfert est donc, suivant le point de vue adopté soit la courbe paramétrée définie par la fonction $\omega \mapsto \mathrm{Re}(A(j\omega)) + j\,\mathrm{Im}(A(j\omega))$ soit, ce qui revient au même, la courbe paramétrée définie par la fonction $\omega \mapsto |A(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$ où $\varphi(\omega)$ représente un argument de $A(j\omega)$.

1. a. Déterminer la partie réelle $X(\omega)$ et la partie imaginaire de $Y(\omega)$ du nombre complexe $A(j\omega)$,

b. Calculer $\lim_{\omega\to 0^+} X(\omega)$ et $\lim_{\omega\to 0^+} Y(\omega)$, En déduire que le lieu de transfert possède une asymptote verticale d'équation $x = -2\theta Gk$.

2. a. Montrer que le module $r(\omega)$ du nombre complexe $A(j\omega)$ est: $r(\omega) = \frac{Gk}{\omega(1+\theta^2\omega^2)}$

b. Montrer qu'un argument $\varphi(\omega)$ du nombre complexe $A(j\omega)$ est : $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2\arctan(\theta\omega)$

3. a. Étudier les variations de la fonction $\omega \mapsto r(\omega)$ pour $\omega \in \left]\,0\,;+\infty\right[$, (On précisera les limites lorsque ω tend vers 0 par valeurs positives et lorsque ω tend vers $+\infty$).

b. Étudier les variations de la fonction $\omega \mapsto \varphi(\omega)$) pour $\omega \in]0\,;+\infty[$ (On précisera les limites lorsque ω tend vers 0 par valeurs positives et1orsque ω tend vers $+\infty$).

4. par un procédé classique d'identification , on a obtenu k = 0,08 et $\theta = 20$ .on prend G = 1 .

a. Déterminer la valeur ω_0 de ω telle que $\varphi(\omega_0) = -\pi$ .En déduire la valeur de $r(\omega_0)$.

b. Tracer sur la feuille jointe au sujet l'allure de la courbe C , lieu de transfert de Nyquist (on n'oubliera pas pour ce tracer d'utiliser le résultat de la question 1b), et on utilisera le tableau suivant dans lequel les données numériques sont de valeurs décimales approchées à 10^{-2} près.

$\varphi(\omega)$	$-2\pi/3$	$-3\pi/4$	$-5\pi/6$	$-\pi$	$-7\pi/6$	$-4\pi/3$
ω						
$r(\omega)$	5 ,57	3,3	2,08	0,80	0,23	0,03
$X(\omega)$				– 0,8		
$Y(\omega)$				0		

Corrigé

Exercice 1

1. le module $r(\omega)$ de $H(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega(1+j\omega)}$ est l'inverse du module du nombre complexe $j\omega(1+j\omega)$.

Pour $z\neq 0$ $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$. O r le module d'un produit $j\omega(1+j\omega)$ est le produit des modules de $j\omega$ et de $(1+j\omega)$.

C'est–à–dire $|j\omega(1+j\omega)|=\omega\sqrt{1+\omega^2}$ car $\omega>0$ .donc $r(\omega)=\dfrac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$.

Remarque on peut aussi obtenir cette expression de $r(\omega)$ en cherchant d'abord la forme algébrique de $H(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega(1+j\omega)}$ Mais les calculs sont plus longs .

En prenant le logarithme népérien du nombre réel strictement positif $r(\omega)$, on obtient :

$\ln(r(\omega))=\ln\left(\dfrac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}\right)=-\ln\left(\omega\sqrt{1+\omega^2}\right)$; pour tout $a>0$: $\ln\dfrac{1}{a}=-\ln a$.

Donc pour tout $\omega>0$, $G(\omega)=\dfrac{20}{\ln 10}\ln r(\omega)$ peut s'écrire : $G(\omega)=-\dfrac{20}{\ln 10}\ln\left(\omega\sqrt{1+\omega^2}\right)$.

B . $\lim\limits_{\omega\to 0}\omega\sqrt{1+\omega^2}=0\sqrt{1+0}=0$, donc $\lim\limits_{\omega\to 0}\left(\omega\sqrt{1+\omega^2}\right)=0$, or $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ et $-\dfrac{20}{\ln 10}<0$,donc $\lim\limits_{\omega\to 0}\ln\left(\omega\sqrt{1+\omega^2}\right)=-\infty$

D'après le théorème sur la limite d'une fonction composée. Comme $-\dfrac{20}{\ln 10}<0$, on a $\lim\limits_{\omega\to 0}G(\omega)=+\infty$ .de même

$\lim\limits_{\omega\to+\infty}\sqrt{1+\omega^2}=+\infty$, donc $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\omega\sqrt{1+\omega^2}=+\infty$, or $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, donc $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\ln\left(\omega\sqrt{1+\omega^2}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{\omega\to+\infty}G(\omega)=-\infty$

La fonction G définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $G(\omega)=-\dfrac{20}{\ln 10}\ln\left(\omega\sqrt{1+\omega^2}\right)$ est dérivable sur cet intervalle comme fonction composée des fonctions dérivables . $G(\omega)=-\dfrac{20}{\ln 10}\ln\left(\omega\sqrt{1+\omega^2}\right)$ où $u(\omega)=\omega\sqrt{1+\omega^2}$;

donc $G'(\omega)=-\dfrac{20}{\ln 10}\dfrac{u'(\omega)}{u(\omega)}$. $u'(\omega)=\sqrt{1+\omega^2}+\dfrac{2\omega^2}{2\sqrt{1+\omega^2}}=\dfrac{\left(\sqrt{1+\omega^2}\right)^2+\omega^2}{\sqrt{1+\omega^2}}=\dfrac{1+\omega^2+\omega^2}{\sqrt{1+\omega^2}}=\dfrac{1+2\omega^2}{\sqrt{1+\omega^2}}$ et

$G'(\omega)=-\dfrac{20}{\ln 10}\dfrac{u'(\omega)}{u(\omega)}=-\dfrac{20}{\ln 10}\dfrac{1+2\omega^2}{\omega(1+\omega^2)}$, donc pour tout $\omega>0$, on a : $\dfrac{1+2\omega^2}{\omega(1+\omega^2)}>0$, donc $G'(\omega)<0$, par conséquent la fonction G est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

2. a. $H(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega(1+j\omega)}$ est l'inverse de $j\omega(1+j\omega)$, $\arg j\omega=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ car $\omega>0$ (ω est un réel positif).

La partie réelle de $(1+j\omega)$ est 1 et sa partie imaginaire ω est un réel positif donc $\arg(1+j\omega)=\alpha+2k\pi$ est dans l'intervalle $]0;\pi/2[$, donc $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}=\dfrac{\omega}{1}=\omega$ .par définition de la fonction arctan , $\tan\alpha=\omega$ avec $0<\alpha<\pi/2$ se traduit par $\alpha=\arctan\omega$. Donc $\arctan\omega$ est un argument de $(1+j\omega)$

un argument de $j\omega(1+j\omega)$ est donc $\frac{\pi}{2}+\arctan\omega$ .Pour tout z et z' $\arg zz'=\arg z+\arg z'+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$ et $\arg\frac{1}{z}=-\arg z+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$. Un argument de $\varphi(\omega)$ de $H(j\omega)$ est donc $\varphi(\omega)=-\frac{\pi}{2}-\arctan\omega$.

b. $\lim\limits_{\omega\to 0}\arctan\omega=0$, donc $\lim\limits_{\omega\to 0}\left(-\frac{\pi}{2}-\arctan\omega\right)=-\frac{\pi}{2}-0=-\frac{\pi}{2}$ et on a : $\lim\limits_{\omega\to 0}\varphi(\omega)=-\pi$.

$\lim\limits_{\omega\to+\infty}\arctan\omega=-\frac{\pi}{2}$, donc $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\left(-\frac{\pi}{2}-\arctan\omega\right)=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\pi$ et on a : $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\varphi(\omega)=-\pi$.

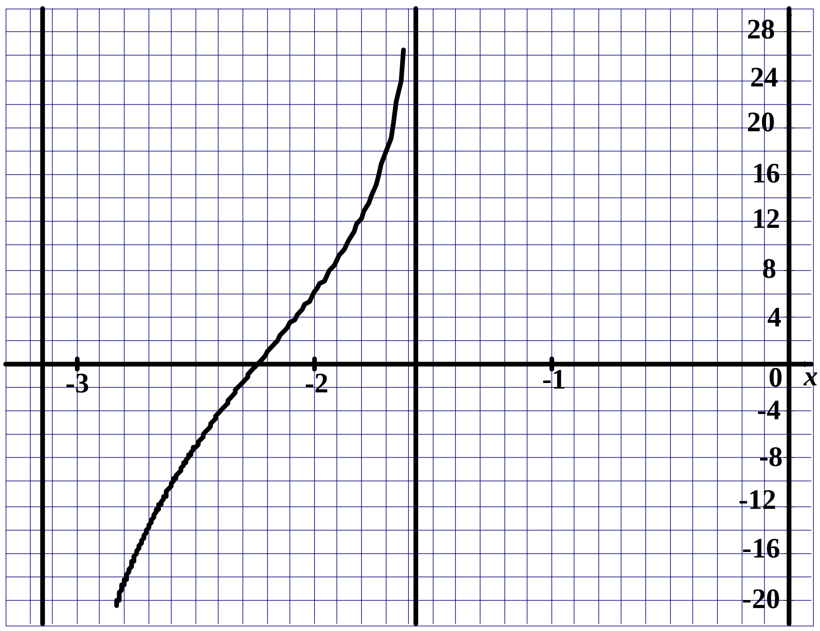
Puisque la fonction arctan est dérivable sur $]0;+\infty[$, on déduit que la fonction φ est dérivable sur cet intervalle.

pour tout $\omega>0$, on a : $\varphi'(\omega)=-\frac{1}{1+\omega^2}$: On a donc $\varphi'(\omega)<0$, donc la fonction $\omega\mapsto\varphi(\omega)$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

ω	0	$+\infty$
$r'(\omega)=y'(\omega)$		$-$
$r(\omega)=y(\omega)$		$+\infty \searrow -\infty$
$\varphi'(\omega)=x'(\omega)$		$-$
$\varphi(\omega)=x(\omega)$		$-\pi/2 \searrow -\pi$

$$\begin{cases} x(\omega)=-\frac{\pi}{2}-\arctan\omega \\ y(\omega)=-\frac{20}{\ln 10}\ln\left(\omega\sqrt{1+\omega^2}\right) \end{cases} \quad \omega>0$$

ω	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,786	0,9	1,5	2
$x(\omega)$	–1,67	–1,7682	–1,862	–2,03	–2,18	–2 ,24	–2,3	–2,55	–2,678
$y(\omega)$	19,956	13,81	10,083	5,05	1,37	0	–1,66	–8,64	-13,01



Exercice 2 .

1. $z_1(\omega)=R+\frac{1}{jC\omega}$ et $z_2(\omega)=\frac{1}{\frac{1}{R}+jC\omega}$ donc $\frac{1}{z_2(\omega)}=\frac{1}{R}+jC\omega$ et $\frac{z_1(\omega)}{z_2(\omega)}=\left(\frac{1}{R}+jC\omega\right)\left(R+\frac{1}{jC\omega}\right)$

$\frac{z_1(\omega)}{z_2(\omega)}=1+\frac{1}{jRC\omega}+jRC\omega+1=2+j\left(RC\omega-\frac{1}{RC\omega}\right)$, donc $1+\frac{z_1(\omega)}{z_2(\omega)}=3+j\left(RC\omega-\frac{1}{RC\omega}\right)$ et, puisque

$T(\omega)=\frac{1}{1+\frac{z_1(\omega)}{z_2(\omega)}}=\frac{1}{3+j\left(RC\omega-\frac{1}{RC\omega}\right)}$.

2. a la fonction h ,définie sur $]0;+\infty[$ par $h(\omega)=RC\omega-\dfrac{1}{RC\omega}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $h'(\omega)=RC+\dfrac{1}{RC\omega^2}>0$

la fonction h est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$\lim\limits_{\omega\to 0} RC\omega=0$ et $\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{1}{RC\omega}=+\infty$ donc $\lim\limits_{\omega\to 0} h(\omega)=-\infty$. $\lim\limits_{\omega\to+\infty} RC\omega=+\infty$ et $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{1}{RC\omega}=0$ donc $\lim\limits_{\omega\to+\infty} h(\omega)=+\infty$.

b. lorsque ω parcourt $]0;+\infty[$, $z=3+jh(\omega)$ a une partie réelle fixe égale à 3 ; sa partie imaginaire parcourt $\mathbb{R}$.

Donc l'ensemble (D) décrit par le point M d'affixe z lorsque ω parcourt $]0;+\infty[$ est la droite d'équation $x=3$.

1. $T(\omega)=\dfrac{1}{3+jh(\omega)}$. lorsque ω décrit l'intervalle $]0\,;+\infty[$; $z=3+jh(\omega)$ a une partie réelle fixe et égale à 3, sa partie imaginaire ω parcourt $\mathbb{R}$. Donc l'ensemble Γ des points m du plan $\boldsymbol{P}$, d'affixe $z=3+jf(\omega)$ lorsque ω décrit l'intervalle $[0;+\infty[$ est la droite d'équation : $x=3$.

2. $T(\omega)-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3+jh(\omega)}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{6-3-jh(\omega)}{1+jh(\omega)}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{3-jf(\omega)}{3+jf(\omega)}$, $T(\omega)-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{\overline{z}}{z}$. donc $\left|T(\omega)-\dfrac{1}{6}\right|=\left|\dfrac{\overline{z}}{6z}\right|=\dfrac{1}{6}\dfrac{|\overline{z}|}{|z|}=\dfrac{1}{6}$,

on sait que l'ensemble du point M d'affixe Z tel que $|Z-a|=r$ est le cercle C de centre A d'affixe a et de rayon r .donc l'ensemble du point M d'affixe $Z=H(j\omega)$ est le cercle C de centre A d'affixe $\dfrac{1}{6}$ et de rayon $r=\dfrac{1}{6}$ privé de l'origine du repère O .

Exercice 3

On rappelle que $h(p)=\dfrac{4\alpha^2}{(p+\alpha)^2+(\alpha\sqrt{3})^2}$. $|h(j\omega)|=\left|\dfrac{4\alpha^2}{(j\omega+\alpha)^2+(\alpha\sqrt{3})^2}\right|=\dfrac{4\alpha^2}{\left|(j\omega+\alpha)^2+(\alpha\sqrt{3})^2\right|}$;

$$|h(j\omega)|=\frac{4\alpha^2}{\left|j^2\omega^2+\alpha^2+2\alpha j\omega+3\alpha^2\right|}=\frac{4\alpha^2}{\left|\left(4\alpha^2-\omega^2\right)+2\alpha j\omega\right|}=\frac{4\alpha^2}{\sqrt{\left(4\alpha^2-\omega^2\right)^2+4\alpha^2\omega^2}}$$

$$|h(j\omega)|=\frac{4\alpha^2}{\sqrt{16\alpha^4+\omega^4-8\alpha^2\omega^2+4\alpha^2\omega^2}}=\frac{4\alpha^2}{\sqrt{16\alpha^4+\omega^4-4\alpha^2\omega^2}}.$$

On considère la fonction r définie pour tout réel $\omega>0$ par $r(\omega)=|h(j\omega)|$

$r(\omega)=\dfrac{4\alpha^2}{\sqrt{16\alpha^4+\omega^4-4\alpha^2\omega^2}}$. On sait que $f(\omega)=\omega^4-4\alpha^2\omega^2+16\alpha^4$,calculons $f'(\omega)$

$$f'(\omega)=4\omega^3-8\alpha^2\omega=4\omega\left(\omega^2-2\alpha^2\right)=4\omega\left(\omega-\alpha\sqrt{2}\right)\left(\omega+\alpha\sqrt{2}\right).$$

On sait que $r(\omega)=\dfrac{4\alpha^2}{\sqrt{f(\omega)}}$; donc $r'(\omega)=-\dfrac{4\alpha^2 f'(\omega)}{2f(\omega)\sqrt{f(\omega)}}$, donc $r'(\omega)$ est bien du signe de $-f'(\omega)$

Car $f(\omega)>0$ et $\sqrt{f(\omega)}>0$ .de même $f'(\omega)$ est du signe de $\left(\omega-\alpha\sqrt{2}\right)$, d'où le tableau de variation :

ω	0		$\omega_0=\alpha\sqrt{2}$		$+\infty$
$\left(\omega-\alpha\sqrt{2}\right)$		$-$	0	$+$	
$f'(\omega)$		$-$	0	$+$	
$r'(\omega)$		$+$	0	$-$	
$r(\omega)$		$\nearrow$	$r(\omega_0)$	$\searrow$	

Avec $\omega_0=\alpha\sqrt{2}=250\sqrt{2}$ et $\alpha=250$. Donc on a :

$$r(\omega_0)=\frac{4\times 250^2}{\sqrt{16\times 250^4+\left(250\sqrt{2}\right)^4-4(250)^2\left(250\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{500^2}{\sqrt{16\times 250^4+4(250)^4-8(250)^2(250)^2}}$$

$$r(\omega_0)=\frac{500^2}{\sqrt{16\times 250^4+4(250)^4-8(250)^4}}=\frac{500^2}{\sqrt{12\times 250^4}}=\frac{500^2}{\sqrt{12}\times 250^2}=\frac{4}{\sqrt{12}}=\frac{8\sqrt{3}}{12}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Exercice 4

On sait que : $Z=\dfrac{1}{1+jRC\omega}$ avec $R=50\Omega$; $C=2\mu F$ et $\omega=\dfrac{1}{100}$, donc $RC\omega=50\times 2\times\dfrac{1}{100}=1$

On a donc $Z=\dfrac{1}{1+j}$ et on peut écrire $Z=\dfrac{1}{1+j}=\dfrac{1-j}{(1+j)(1-j)}=\dfrac{1-j}{1-j^2}=\dfrac{1-j}{2}$

La forme algébrique de Z est donc $Z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}j$.

On a $|Z|=\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}j\right|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On peut alors écrire : $Z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}j=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}j\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+j\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4}$

On a donc $|Z|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg Z=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ *où* $k\in\mathbb{Z}$ de plus $Z=\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{-\pi}{4}\right]$

2. $|Z|=\left|\dfrac{z_s}{z_e}\right|=\dfrac{|z_s|}{|z_e|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}<1$ donc $|z_s|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|z_e|$. Le module de z_s ne peut pas être le double de celui de z_e.

3. on a : $Z=\dfrac{z_s}{z_e}$, donc $\arg Z=\arg\left(\dfrac{z_s}{z_e}\right)=\arg z_s-\arg z_e$, on en déduit que $\arg z_e=\arg z_s-\arg Z$

On a vu que $\arg Z=-\dfrac{\pi}{4}$ et on suppose que $\arg z_s=\dfrac{\pi}{2}$, on en déduit : $\arg z_e=\dfrac{\pi}{2}-\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$.

Donc $\arg z_e=\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

4. a. $|z_e|=\left|150\left(-\sqrt{3}+j\right)\right|=150\left|-\sqrt{3}+j\right|=150\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)+1^2}=150\sqrt{3+1}=150\sqrt{4}=300$

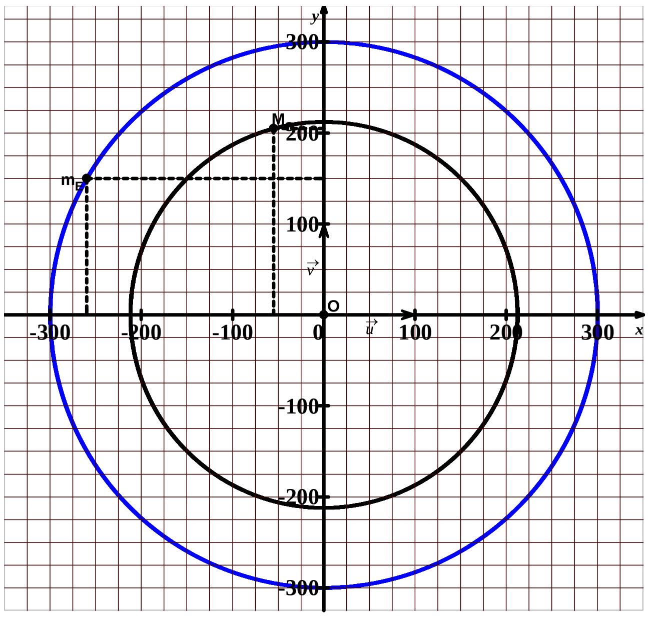
On peut donc écrire $z_e=300\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}j\right)=300\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+j\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)=300e^{j5\pi/6}$. Donc $z_e=300e^{j5\pi/6}$.

b. on a : $Z=\dfrac{z_s}{z_e}$,donc on a : $z_s=z_e\times Z$,on a vu que $Z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+j\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4}$.

et $z_e=300e^{j5\pi/6}$, donc

$z_s=300e^{j5\pi/6}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4}=150\sqrt{2}e^{j(5\pi/6-\pi/4)}$.

$z_s=150\sqrt{2}e^{j(10\pi/12-3\pi/12)}=150\sqrt{2}e^{j7\pi/12}$



c. on a $z_e=150\left(-\sqrt{3}+j\right)$ et $Z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}j$, donc

$z_s=150\left(-\sqrt{3}+j\right)\times\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}j\right)=75\left(-\sqrt{3}+\sqrt{3}j+j+1\right)$.

$z_s=75\left(\left(1-\sqrt{3}\right)+j\left(1+\sqrt{3}\right)\right)$

Donc M_e a pour coordonnées

$x_e=-150\sqrt{3}\approx-259{,}80$ et $y_e=150$

Et M_s a pour coordonnées

$x_s=75\left(1-\sqrt{3}\right)\approx-54{,}9$ et $y_s=75\left(1+\sqrt{3}\right)\approx 204{,}90$.

Exercice 5

1. $jRC\omega+(1+jRC\omega)^2=1-R^2C^2\omega^2+3jRC\omega$. $\left|1-R^2C^2\omega^2+3jRC\omega\right|=\sqrt{(1-R^2C^2\omega^2)^2+9R^2C^2\omega^2}$

$$\left|H(j\omega)\right| = r(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-R^2C^2\omega^2)^2+9R^2C^2\omega^2}}.$$

2. $RC=1$: $r(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+9\omega^2}}$ avec $\omega\in[0;+\infty[$. $\lim\limits_{\omega\to+\infty} r(\omega)=0$ et $r(0)=1$.

$r(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2\omega^2+\omega^4+9\omega^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\omega^4+7\omega^2+1}}$ $v=\dfrac{1}{u}$ et $v'=-\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u=\sqrt{\omega^4+7\omega^2+1}$;

$u'=\dfrac{4\omega^3+14\omega}{2\sqrt{\omega^4+7\omega^2+1}}=\dfrac{2\omega^3+7\omega}{\sqrt{\omega^4+7\omega^2+1}}$. donc $r'(\omega)=\dfrac{-(2\omega^3+7\omega)}{(\omega^4+7\omega^2+1)\sqrt{\omega^4+7\omega^2+1}}$.

3. $jRC\omega+(1+jRC\omega)^2=1-R^2C^2\omega^2+3jRC\omega$, un argument de $1-R^2C^2\omega^2+3jRC\omega$ est $\arctan\left(\dfrac{3RC\omega}{1-R^2C^2\omega^2}\right)$.

$\arg H(j\omega)=\varphi(\omega)=-\arctan\left(\dfrac{3RC\omega}{1-R^2C^2\omega^2}\right)$.

ω	0 $\qquad$ $+\infty$
$r'(\omega)$	$-$
$r(\omega)$	1 $\searrow$ 0

4. $RC=1$: $\arg H(j\omega)=\varphi(\omega)=-\arctan\left(\dfrac{3\omega}{1-\omega^2}\right)$ avec $\omega\in[0;+\infty[$.

$\lim\limits_{\omega\to1^-}\left(\dfrac{3\omega}{1-\omega^2}\right)=+\infty$, donc $\lim\limits_{\omega\to1^-}\varphi(\omega)=-\dfrac{\pi}{2}$

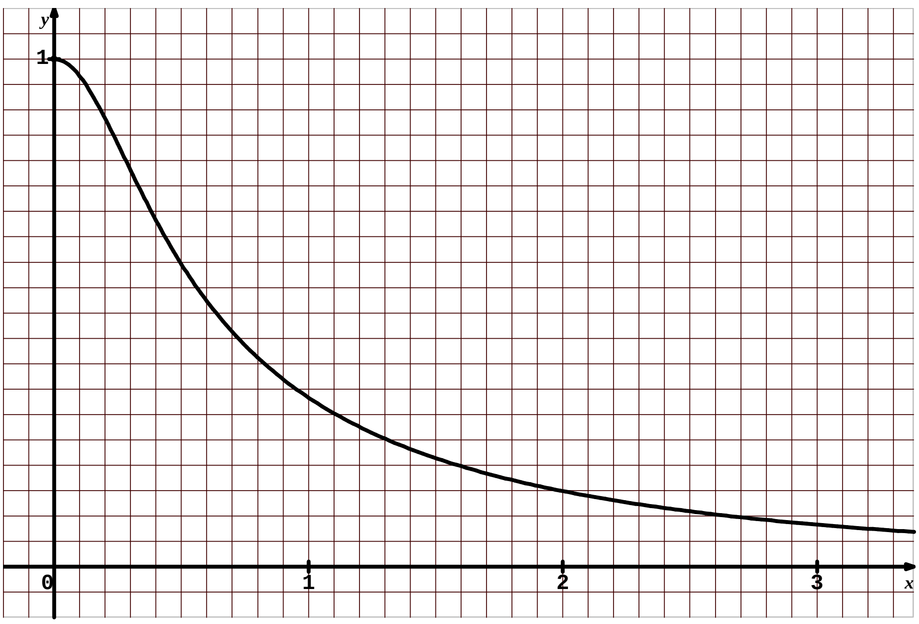
$\lim\limits_{\omega\to1^+}\left(\dfrac{3\omega}{1-\omega^2}\right)=-\infty$, donc $\lim\limits_{\omega\to1^+}\varphi(\omega)=\dfrac{\pi}{2}$

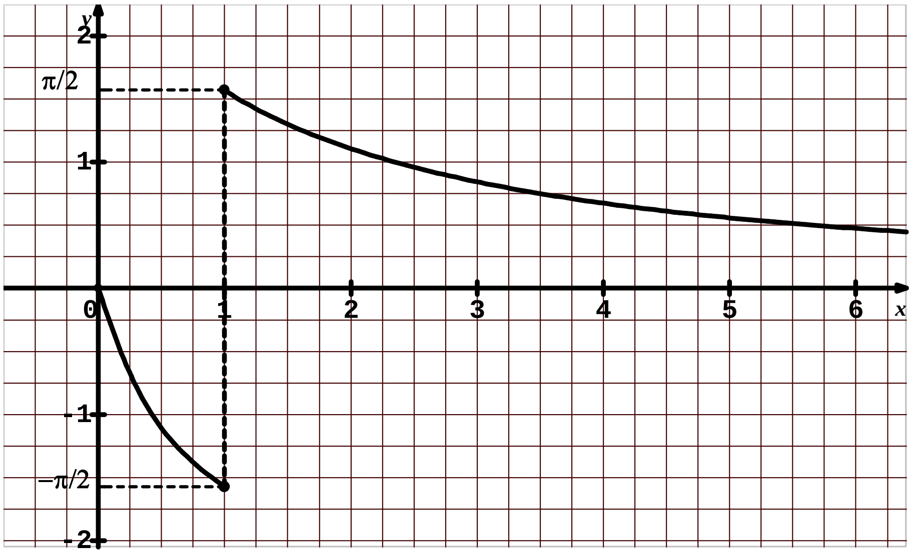
$\lim\limits_{\omega\to+\infty}\left(\dfrac{3\omega}{1-\omega^2}\right)=0$ et on a : $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\varphi(\omega)=0$.

$$\varphi'(\omega)=-\frac{u'}{1+u^2}=-\frac{\dfrac{3(1-\omega^2)-(-2\omega\times3\omega)}{(1-\omega^2)^2}}{1+\left(\dfrac{3\omega}{1-\omega^2}\right)^2}=-\frac{3(1-\omega^2)+6\omega^2}{(1-\omega^2)^2+9\omega^2}$$

$$\varphi'(\omega)=-\frac{3(1+\omega^2)}{\omega^4+7\omega^2+1}$$

ω	0	1	$+\infty$
$\varphi'(\omega)$	-3 $\quad -$		$-$
$\varphi(\omega)$	0 $\searrow$ $-\pi/2$		$\pi/2$ $\searrow$ 0





Exercice 6

1.a. $H(p)=\dfrac{1}{(RCp+1)^2}$, avec $RC=1$ et $p=j\omega$, donc on a : $H(j\omega)=\dfrac{1}{(j\omega+1)^2}$

$\left|H(j\omega)\right|=\left|\dfrac{1}{(j\omega+1)^2}\right|=\dfrac{1}{\left|(j\omega+1)^2\right|}=\dfrac{1}{1+\omega^2}$, puisque $\left|1+j\omega\right|=\sqrt{1+\omega^2}$

ω	$0 \qquad\qquad +\infty$
$f'(\omega)$	$-$
$f(\omega)$	$1 \searrow 0$

b. $f(\omega)=\dfrac{1}{1+\omega^2}$; $f(0)=1$ $\lim\limits_{\omega\to+\infty} f(\omega)=\lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{1}{1+\omega^2}=\lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{1}{\omega^2}=0$

$f'(\omega)=\dfrac{-2\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}<0$, par conséquent la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$

2°.a. Argument du nombre complexe $H(j\omega)$. Dans l'intervalle $[0;\pi/2[$: $\arg\left(1+j\omega\right)=\theta$

$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{1+\omega^2}\\ \sin\theta=\dfrac{\omega}{1+\omega^2}\end{cases}$ $donc\ \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\omega$ et par conséquent $\theta=\arctan\omega$

$\arg\left(1+j\omega\right)^2=2\arg\left(1+j\omega\right)=2\theta=2\arctan\omega$ et $\arg H(j\omega)=\arg\left[\dfrac{1}{(j\omega+1)^2}\right]=-\arg\left(1+j\omega\right)^2=-2\theta$

$\theta\in[0\,;\pi/2[\Leftrightarrow -2\theta\in]-\pi;0]$.et on a $g(\omega)=-2\arctan\omega$

ω	$0 \qquad\qquad +\infty$
$g'(\omega)$	$-$
$g(\omega)$	$0 \searrow -\pi$

b. Variation de la fonction g : $g'(\omega)=\dfrac{-2}{1+\omega^2}<0$ par conséquent la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

$g(0)=-2\arctan 0=0$ $\lim\limits_{\omega\to+\infty} g(\omega)=\lim\limits_{\omega\to+\infty}-2\arctan\omega=-2\lim\limits_{\omega\to+\infty}\arctan\omega=-2\times\pi/2=-\pi$

3. $\phi(\omega)=\dfrac{1}{1+\omega^2}e^{-2j\arctan\omega}$ sur la calculatrice on remplace ω par t et on utilise les coordonnées paramétriques

et on obtient : $\begin{cases}x(\omega)=\left(\dfrac{1}{1+\omega^2}\right)\cos\left(-2\arctan\omega\right)\\ y(\omega)=\left(\dfrac{1}{1+\omega^2}\right)\sin\left(-2\arctan\omega\right)\end{cases}$ Pour trouver les valeurs exacte des $x(\omega)$ et $y(\omega)$.

on détermine la forme algébrique de chacun des nombres du tableau.

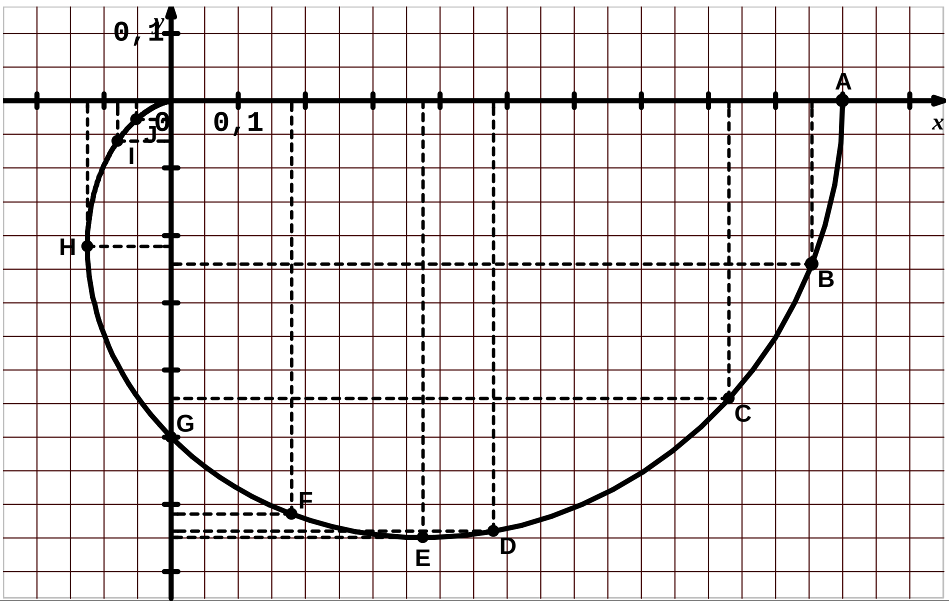
$H(0)=\dfrac{1}{(0+1)^2}=1$; $H\left(\dfrac{j}{2}\right)=\dfrac{4}{(j+2)^2}=\dfrac{4}{4+4j-1}=\dfrac{4}{3+4j}=\dfrac{4\left(3-4j\right)}{25}=\dfrac{12-16j}{25}=\dfrac{12}{25}-\dfrac{16}{25}j$.

$$H\left(\frac{\sqrt{3}j}{3}\right)=\frac{9}{(\sqrt{3}j+3)^2}=\frac{9}{9+6\sqrt{3}j-3}=\frac{4}{6+6\sqrt{3}j}=\frac{9\left(1-\sqrt{3}j\right)}{24}=\frac{9-9\sqrt{3}j}{24}=\frac{3}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}j\,.$$

$$H\left(\sqrt{3}j\right)=\frac{1}{(\sqrt{3}j+1)^2}=\frac{1}{1+2\sqrt{3}j-3}=\frac{1}{-2+2\sqrt{3}j}=\frac{\left(-1-\sqrt{3}j\right)}{8}=\frac{-1-\sqrt{3}j}{8}=-\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}j\,.\quad H\left(j\right)=\frac{1}{(j+1)^2}=\frac{1}{2j}=-\frac{j}{2}\,.$$

Sur la calculatrice on utilise les coordonnées paramétriques :

$$\begin{cases} x(t)=\left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)\cos\left(-2\arctan t\right) \\ y(t)=\left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)\sin\left(-2\arctan t\right) \end{cases}$$



ω	0	1/8	1/4	1/2	$\sqrt{3}/3$	$3/4$	1	$\sqrt{3}$	3	4	5
$r(\omega)$	1	$64/65$	$16/17$	$4/5$	$3/4$	$16/25$	1/2	$1/4$	$1/10$		
$x(\omega)$	1	$\frac{4032}{4225}\approx 0{,}95$	$\frac{240}{289}\approx 0{,}83$	$\frac{12}{25}=0{,}48$	$\frac{3}{8}=0{,}375$	$\frac{112}{625}\approx 0{,}18$	0	$\frac{-1}{8}=-0{,}125$	$\frac{-2}{25}$	$\frac{-15}{289}$	$\frac{-24}{676}$
$y(\omega)$	0	$-\frac{1024}{4225}=-0{,}24$	$-\frac{128}{289}\approx -0{,}44$	$-\frac{16}{25}=-0{,}64$	$\frac{-3\sqrt{3}}{8}\approx -0{,}65$	$-\frac{384}{625}\approx -0{,}62$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{8}\approx -0{,}26$	$\frac{-3}{50}$	$\frac{-8}{289}$	$\frac{-10}{676}$
Points	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K

Exercice 7

1. $h(\omega)=\dfrac{1}{R}\left[L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right]$ où $\omega\in\left]0;+\infty\right[$. $\lim\limits_{\omega\to 0^+}h(\omega)=-\infty$ et $\lim\limits_{\omega\to+\infty}h(\omega)=+\infty$

$h'(\omega)=\dfrac{1}{R}\left[L+\dfrac{1}{C\omega^2}\right]>0$ et

$h(\omega)=0\Leftrightarrow h(\omega)=L\omega-\dfrac{1}{C\omega}=0\Leftrightarrow LC\omega^2=1\Leftrightarrow\omega^2=\dfrac{1}{LC}\Leftrightarrow\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

ω	0		$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$+\infty$
$r'(\omega)$			+	
$r(\omega)$		$-\infty$	0	$+\infty$

2. a m d'affixe $1+j\,h(\omega)$ on a $R_e(z)=1$ et $\mathrm{Im}(z)\in\mathbb{R}$, donc m appartient à la droite (D) d'équation $x=1$.

b. la transformation qui à m d'affixe z associe M d'affixe $Z=\dfrac{1}{z}$ est l'inversion complexe .l'image de la droite (D) qui ne passe pas par O est un cercle © passant par O et privé du point O .(C) de centre $\left(1/2;0\right)$ et de rayon $1/2$.

c. l'ensemble E est l'image de C\{0}par la transformation $z\mapsto\dfrac{k}{R}z$.

Si $\dfrac{k}{R}=\rho e^{i\theta}$, alors E est l'image de C\{0}par la similitude de centre O , de rapport ρ et d'angle θ.

E est donc un cercle de rayon $\dfrac{|k|}{R}$.

3. L = 0,05 ; $C=20\times10^{-6}$

a. $\alpha=0$, donc $K=220e^{j0}=220$, donc $\dfrac{|k|}{50}=\dfrac{220}{50}=\dfrac{22}{5}=4{,}4$, donc E est le cercle image de C\{0}par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{22}{5}$. C' est donc le cercle de centre $A\left(\dfrac{22}{10};0\right)$ et de rayon $\dfrac{22}{10}$.

$h(100\pi)=\frac{1}{50}\left[0,05\times100\pi-\frac{1}{20\times10^{-6}\times100\pi}\right]=\frac{1}{50}\left[5\pi-\frac{500}{\pi}\right]\approx-2,869$ .de même $h(200\pi)=-0,9$

$50\le f\le100\Leftrightarrow100\pi\le\omega\le200\pi$, donc $h(100\pi)=-2,87$ et $h(200\pi)=-0,9$.

b. $\alpha=\pi/6$. Donc E est l'image du cercle précédent par la rotation de centre O et d'angle $\alpha=\pi/6$ prive du point O.

Exercice 8

1. $H\left(j\frac{x}{RC}\right)=H(j\omega)$ puisque $x=RC\omega$. Il s'agit donc de trouver la partie réelle et la partie imaginaire de $H(j\omega)$:

$$H(j\omega)=\frac{1+jx}{k+jx}=\frac{(1+jx)(k-jx)}{(k+jx)(k-jx)}=\frac{k+kjx-jx+x^2}{k^2+x^2}=\frac{k+x^2}{k^2+x^2}+j\frac{x(k-1)}{k^2+x^2}$$

Donc $Re\left(H\left(j\frac{x}{RC}\right)\right)=\frac{k+x^2}{k^2+x^2}$ et $Im\left(H\left(j\frac{x}{RC}\right)\right)=\frac{x(k-1)}{k^2+x^2}$. Comme les partie réelle et imaginaire de $H\left(j\frac{x}{RC}\right)$ sont toutes deux positives , on en déduit que l'on peut choisir un argument de $H\left(j\frac{x}{RC}\right)$ dans l'intervalle $[0;\pi/2]$, et même sur $[0;\pi/2[$ puisque la partie réelle ne s'annule pas.

Comme $\tan\theta(x)=\frac{\sin\theta(x)}{\cos\theta(x)}=\frac{Im\left(H\left(j\frac{x}{RC}\right)\right)}{Re\left(H\left(j\frac{x}{RC}\right)\right)}=\frac{\frac{x(k-1)}{k^2+x^2}}{\frac{k+x^2}{k^2+x^2}}=\frac{x(k-1)}{k+x^2}$, on en déduit $\theta(x)=\arctan\left((k-1)\frac{x}{k+x^2}\right)$,où $x\in[0;+\infty[$.

2. $\theta'(x)=\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$ avec $u(x)=(k-1)\frac{x}{k+x^2}$:

x	0	$\sqrt{k}$	$+\infty$
$\theta'(x)$	$+$	0	
$\theta(x)$	0	θ_{Max}	0

$$u(x)=(k-1)\frac{k+x^2-2x^2}{\left(k+x^2\right)^2}=(k-1)\frac{k-x^2}{\left(k+x^2\right)^2}$$

$$\theta'(x)=\frac{(k-1)\frac{k-x^2}{\left(k+x^2\right)^2}}{1+(k-1)^2\frac{x^2}{\left(k+x^2\right)^2}}=\frac{(k-1)(k-x^2)}{\left(k+x^2\right)^2+(k-1)^2x^2}$$

Le signe de $\theta'(x)$ dépend du signe de $k-x^2$ puisque R > 0, C > 0 et $k>1$. D'où le tableau de variation de θ.

Avec $\theta_{Max}=\arctan\left((k-1)\frac{\sqrt{k}}{2k}\right)=\arctan\left(\frac{(k-1)}{2\sqrt{k}}\right)$;

$\theta(0)=\arctan\left((k-1)\frac{0}{k+0^2}\right)=\arctan0=0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan\left((k-1)\frac{x}{k+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan\left(\frac{(k-1)}{x}\right)=\arctan0=0$.

b. pour que le maximum de la phase soit égal à $\pi/6$, on doit avoir

$\arctan\left(\frac{(k-1)}{2\sqrt{k}}\right)=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\frac{(k-1)}{2\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$3(k-1)=2\sqrt{3k}\Leftrightarrow9(k-1)^2=12k$

$\Leftrightarrow3k^2-10k+3=0$

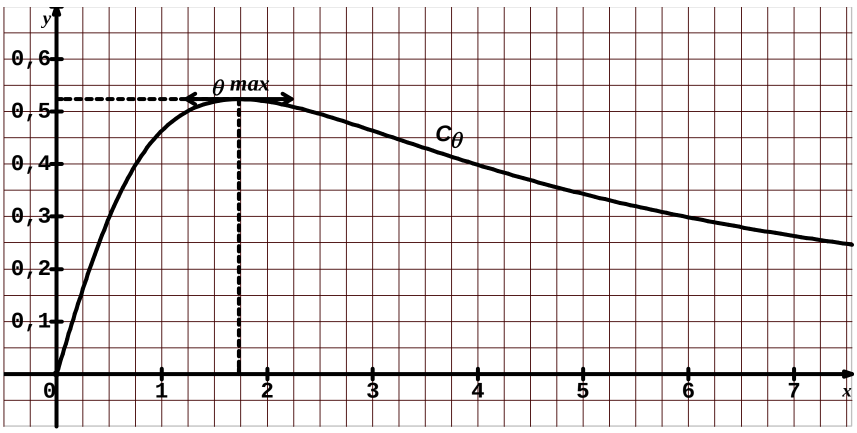
$\Delta=b^2-4ac=100-4\times3\times3=64$,

donc $k_1=\frac{10-8}{2\times3}=\frac{1}{3}$ ou

$k_2=\frac{10+8}{2\times3}=\frac{18}{6}=3$.

comme $k>1$ seul $k=3$ convient .

Le dessin ci-dessous est fait avec $k=3$



Exercice 9

En électronique on utilise la fonction de transfert T de la pulsation ω définie par : $T(\omega)=\frac{k}{(1+j\omega\tau)^3}$

Où k et τ sont des nombres réels positifs. Pour améliorer les qualités du filtre, on réalise une contre-réaction sur le montage correspondant et on obtient alors la nouvelle fonction du transfert : $H(\omega)=\dfrac{T(\omega)}{1+T(\omega)}$.

Pour cette étude on se ramène au cas où $\tau=1$ et $k=4$, ce que l'on supposera Dans toute la suite de problème.

1°. $T(0)=\dfrac{k}{(1+j0)^3}=k=4$;

$$T\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{k}{(1+j\frac{1}{\sqrt{3}})^3}=\frac{3k\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+j)^3}=\frac{3k\sqrt{3}}{\left(2+2\sqrt{3}j\right)\left(\sqrt{3}+j\right)}=\frac{3k\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+2j+6j-2\sqrt{3}}=\frac{3k\sqrt{3}}{8j}=-\frac{3\sqrt{3}j}{2}$$

$$T(1)=\frac{k}{(1+j)^3}=\frac{k}{(1+j)^2(1+j)}=\frac{k}{2j(1+j)}=\frac{k}{2j-2}=\frac{k\left(-2-2j\right)}{\left(-2+2j\right)\left(-2-2j\right)}=\frac{-4(2+2j)}{8}=-1-j$$

$$T(\sqrt{3})=\frac{k}{(1+j\sqrt{3})^3}=\frac{k}{(1+j\sqrt{3})(1+j\sqrt{3})^2}=\frac{k}{(1+j\sqrt{3})(-2+2j\sqrt{3})}=\frac{k}{-2+2j\sqrt{3}-2j\sqrt{3}-6}=\frac{-k}{8}=\frac{-1}{2}.$$

2 °. $H(0)=\dfrac{T(0)}{1+T(0)}=\dfrac{4}{5}$; $H(1)=\dfrac{T(1)}{1+T(1)}=\dfrac{-1-j}{1-1-j}=j\left(-1-j\right)=1-j$ $H(\sqrt{3})=\dfrac{T(\sqrt{3})}{1+T(\sqrt{3})}=\dfrac{-1/2}{1-1/2}=-1$.

3°. On se propose de déterminer un procédé graphique pour obtenir le module et un argument de $H(\omega)$.

On note A le point d'affixe -1 et M le point d'affixe $T(\omega)$.

a. Montrer que le module de $H(\omega)$ est égal à $\dfrac{MO}{MA}$.

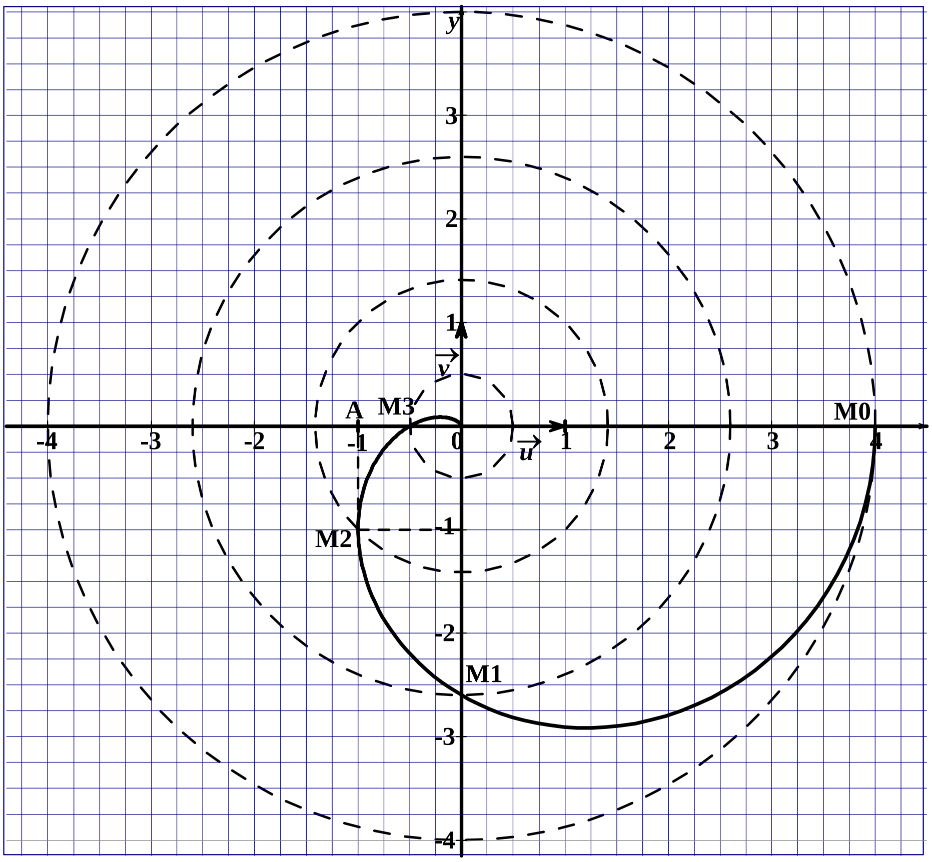
$H(\omega)=\dfrac{T(\omega)}{1+T(\omega)}=\dfrac{T(\omega)-0}{T(\omega)-(-1)}=\dfrac{z_M-z_0}{z_M-z_A}$. Donc $\left|H(\omega)\right|=\left|\dfrac{T(\omega)}{1+T(\omega)}\right|=\left|\dfrac{T(\omega)-0}{T(\omega)-(-1)}\right|=\left|\dfrac{z_M-z_0}{z_M-z_A}\right|=\dfrac{MO}{MA}$

b . Montrer qu'un argument de $H(\omega)$ est égal à l'angle $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO})$.

$$\arg\left[H(\omega)\right]=\arg\left[\frac{T(\omega)}{1+T(\omega)}\right]=\arg T(\omega)-\arg\left[1+T(\omega)\right]=\arg z_M-\arg\left(z_M-z_A\right)=\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)-\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)=\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)+\left(\overrightarrow{AM};\vec{u}\right)$$

$$\arg\left[H(\omega)\right]=\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{OM}\right)=\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO}\right)$$

c. En utilisant ce qui précède , expliquer comment on peut retrouver les résultats de la question 2° par une lecture graphique



<u>Exercice 10</u>

1.a .Ecrivons le nombre complexe $A(j\omega)$ sous forme complexe :

$A(j\omega)=\dfrac{Gk}{j\omega(j\theta\omega+1)^2}=\dfrac{Gk}{j\omega(j^2\theta^2\omega^2+2j\omega\theta+1)}=\dfrac{Gk}{j\omega(1-\theta^2\omega^2)-2\omega^2\theta}$ .Multiplions le numérateur par le complexe conjugué de dénominateur

$$A(j\omega)=\frac{Gk}{j\omega(1-\theta^2\omega^2)-2\omega^2\theta}=Gk\frac{-j\omega(1-\theta^2\omega^2)-2\omega^2\theta}{4\omega^4\theta^2+\omega^2(1-\theta^2\omega^2)^2}=Gk\frac{-j\omega(1-\theta^2\omega^2)-2\omega^2\theta}{4\omega^4\theta^2+\omega^2(1+\theta^4\omega^4-2\omega^2\theta^2)}$$

$$A(j\omega)=Gk\frac{-2\omega^2\theta-j\omega(1-\theta^2\omega^2)}{4\omega^4\theta^2+\omega^2+\theta^4\omega^6-2\omega^4\theta^2}=Gk\frac{-2\omega^2\theta-j\omega(1-\theta^2\omega^2)}{2\omega^4\theta^2+\omega^2+\theta^4\omega^6}=Gk\frac{-2\omega^2\theta-j\omega(1-\theta^2\omega^2)}{\omega^2(2\omega^2\theta^2+1+\theta^4\omega^4)},$$

en réduisant , on obtient : $A(j\omega)=Gk\left[\dfrac{-2\theta}{(1+\theta^2\omega^2)^2}+\dfrac{(\theta^2\omega^2-1)}{\omega(1+\theta^2\omega^2)^2}j\right]=\dfrac{-2Gk\theta}{(1+\theta^2\omega^2)^2}+\dfrac{Gk(\theta^2\omega^2-1)}{\omega(1+\theta^2\omega^2)^2}j$, d'où :

$Re(A(j\omega))=X(\omega)=\dfrac{-2Gk\theta}{(1+\theta^2\omega^2)^2}$ et $Im(A(j\omega))=Y(\omega)=\dfrac{Gk(\theta^2\omega^2-1)}{\omega(1+\theta^2\omega^2)^2}$.

b. comme $\lim\limits_{\omega\to0^+}(1+\theta^2\omega^2)=1$, on a $\lim\limits_{\omega\to0^+}X(\omega)=-2\theta Gk$, $\lim\limits_{\omega\to0^+}(-1+\theta^2\omega^2)=-1$ et $\lim\limits_{\omega\to0^+}\omega(1+\theta^2\omega^2)^2=0$,donc $\lim\limits_{\omega\to0^+}Y(\omega)=-\infty$. Les deux conditions $\lim\limits_{\omega\to0^+}X(\omega)=-2\theta Gk$ et $\lim\limits_{\omega\to0^+}Y(\omega)=-\infty$ montre que la représentation graphique de la courbe paramétrée définie par la fonction $\omega\mapsto X(\omega)+Y(\omega)j$ admet la droite d'équation $X(\omega)=-2\theta Gk$ comme asymptote verticale .

2 a) Utilisons les propriétés du module d'un nombre complexe :

$r(\omega)=|A(j\omega)|=\left|\dfrac{Gk}{j\omega(1+j\theta\omega)^2}\right|=\dfrac{|Gk|}{|j\omega||(1+j\theta\omega)|^2}=\dfrac{Gk}{\omega(1+\theta^2\omega^2)}$. $|j\omega|=|j||\omega|=\omega$ et $|(1+j\theta\omega)|^2=\left(\sqrt{1+\theta^2\omega^2}\right)^2=1+\theta^2\omega^2$.

3°) étude des variations de la fonction $\omega\mapsto r(\omega)=\dfrac{Gk}{\omega(1+\theta^2\omega^2)}$, pour $\omega>0$.Calculons les limites aux bornes

$\lim\limits_{\omega\to0^+}\omega(1+\omega^2\theta^2)=0^+$, donc $\lim\limits_{\omega\to0^+}r(\omega)=+\infty$ et $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\omega(1+\omega^2\theta^2)=\lim\limits_{\omega\to+\infty}\omega^3\theta^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{\omega\to+\infty}r(\omega)=\lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{Gk}{\omega^3\theta^2}=0$.

Calculons la fonction dérivée de $r(\omega)$,et étudions son signe . $r'(\omega)=-\dfrac{Gk(1+3\omega^2\theta^2)}{\omega^2(1+\theta^2\omega^2)^2}$, pour tout $\omega>0$, on a :

$r'(\omega)<0$, donc la fonction $\omega\mapsto r(\omega)$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

ω	0	$+\infty$
$r'(\omega)$	‖	$-$
$r(\omega)$	‖ $+\infty$	$\searrow$ 0

b) de même $\arg(j\omega)=\arg j=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\,;k\in\mathbb{Z}$.

on pose $z=1+j\omega\theta$, la partie réelle de z , qui vaut 1 , est strictement positive , il existe donc un unique argument α de z dans l'intervalle $]-\pi/2;\pi/2[$ et $\arg(1+j\omega\theta)=\alpha+2k\pi$, donc

$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{b}{a}=\dfrac{\omega\theta}{1}=\omega\theta\\ \alpha\in]-\pi/2;\pi/2[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\arctan(\omega\theta)\\ \omega\theta\in\mathbb{R}\end{cases}$ .compte tenu des calculs faits plus haut , il existe un unique argument de $A(j\omega)$,que l'on note $\varphi(\omega)$, tel que

$$\varphi(\omega)=\arg A(j\omega)=\arg\frac{Gk}{j\omega(j\theta\omega+1)^2}=\arg(Gk)-\arg(j\omega(j\theta\omega+1)^2)=0-\arg j\omega-\arg(j\theta\omega+1)^2=-\frac{\pi}{2}-2\arg\arg(j\theta\omega+1).$$

Donc $\varphi(\omega)=-\dfrac{\pi}{2}-2\arg\arg(j\theta\omega+1)=-\dfrac{\pi}{2}-2\arctan(\omega\theta)$.

3°) Etude de variations de la fonction $\omega\mapsto\varphi(\omega)=-\pi/2-2\arctan(\omega\theta)$

$\lim\limits_{\omega\to0^+}\arctan(\omega\theta)=0$, donc $\lim\limits_{\omega\to0^+}\varphi(\omega)=-\pi/2$. $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\arctan(\omega\theta)=\pi/2$, donc $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\varphi(\omega)=-\pi/2-\pi=-3\pi/2$.

Déterminons la fonction dérivée et étude de son signe : $\varphi'(\omega) = -\dfrac{2\theta}{1+\omega^2\theta^2}$ pour tout $\omega > 0$, on a : $\varphi'(\omega) < 0$,

donc la fonction $\omega \mapsto \varphi(\omega)$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

ω	0	$+\infty$
$r'(\omega)$		$-$
$r(\omega)$		$+\infty \searrow 0$
$\varphi'(\omega)$		$-$
$\varphi(\omega)$		$+\infty \searrow -3\pi/2$

4°) a) $\varphi(\omega_0) = -\pi \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} - 2\arctan 20\omega_0 = -\pi$,

$-2\arctan 20\omega_0 = -\pi + \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}$, donc $\arctan 20\omega_0 = \dfrac{\pi}{4}$

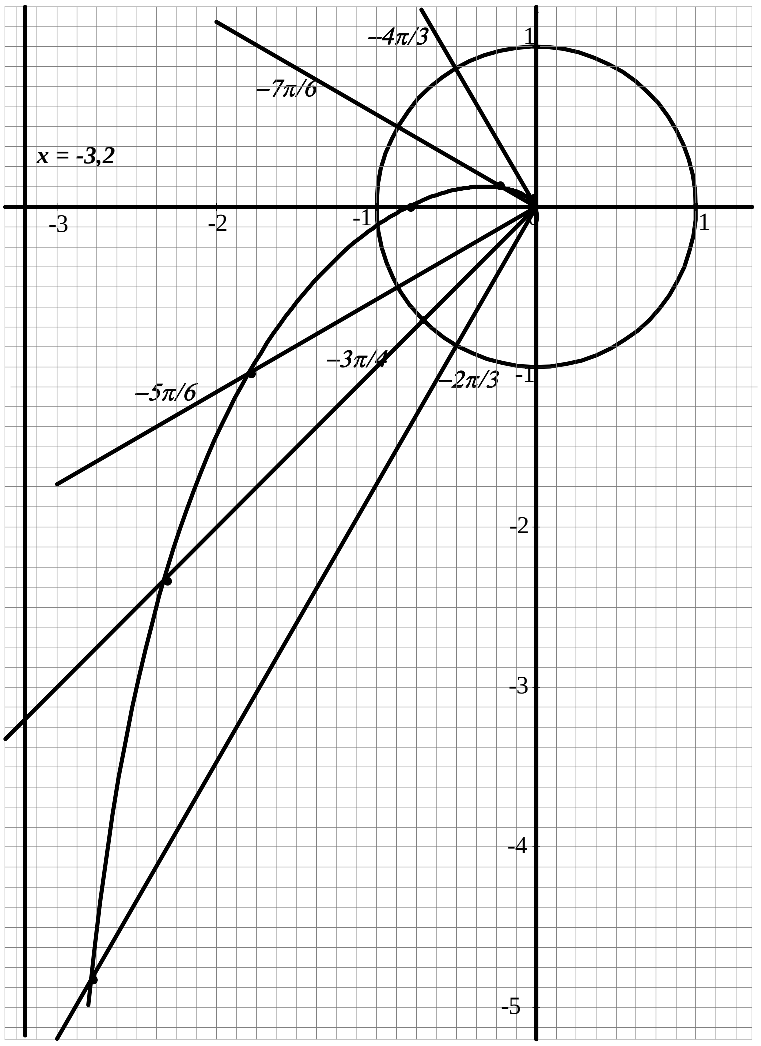
et on a : $20\omega_0 = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$, donc $\omega_0 = \dfrac{1}{20} = 0,05$

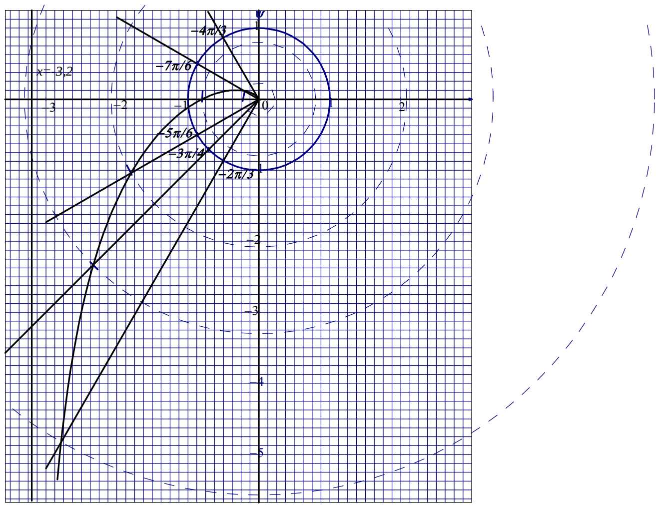
et $r(\omega_0) = \dfrac{Gk}{\omega_0(1+\theta^2{\omega_0}^2)} = \dfrac{0,08}{0,05(1+1)} = \dfrac{8}{2\times 5} = \dfrac{4}{5} = 0,8$

b) l'asymptote verticale a pour équation : $x = -2\times 20\times 1\times 0,08 = -3,2$.

Dans le cas où k = 0,08 et $\theta = 20$ .on prend G = 1 on a : $X(\omega) = \dfrac{-3,2}{(1+400\omega^2)^2}$ et $Y(\omega) = \dfrac{-0,08(1-400\omega^2)}{\omega(1+400\omega^2)^2}$

$\varphi(\omega)$	$-2\pi/3$	$-3\pi/4$	$-5\pi/6$	$-\pi$	$-7\pi/6$	$-4\pi/3$
ω	$\frac{1}{20}\tan\frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{20}$ 0,0134	$\frac{1}{20}\tan\frac{\pi}{8} = \frac{-1+\sqrt{2}}{20}$ 0,021	$\frac{1}{20}\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{60}$ 0,029	$\frac{1}{20}\tan\frac{\pi}{4} = \frac{1}{20}$ 0,05	$\frac{1}{20}\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{20}$ 0,087	$\frac{1}{20}\tan\frac{5\pi}{12} = 2$ 0,187
$r(\omega)$	5 ,57128	3,297	2,08	0,80	0,23	0,03
$X(\omega)$	–2,785	–2,331	–1,8	– 0,8	– 0,2	–0,014
$Y(\omega)$	–4,825	–2,331	$-\frac{1,8}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{0,2}{\sqrt{3}}$	0,346
Points	A	B	C	D	E	F


−4π/3
−7π/6
x = -3,2
1
-3
-2
-1
0
1
−3π/4
−5π/6
−2π/3
-1
-2
-3
-4
-5


−4π/3
−7π/6
x=-3,2
−5π/6
−3π/4
−2π/3

TP MATHEMATIQUES NOMBRES COMPLEXES BTS1-GO 2009-2010

Exercice 1

On se propose dans cette question de déterminer le « lieu de transfert » associé à la fonction de transfert H.
On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$ et on pose $p = j\omega$ avec $\omega \in]0;+\infty[$

On a alors : $H(j\omega) = \dfrac{1}{1+j\omega}$

Dans ce qui suit , les représentations graphiques demandées sont à réaliser sur une feuille de papier millimétré avec un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique cinq centimètres

On appelle M_ω le point d'affixe $z = 1+j\omega$ et N_ω le point d'affixe $H(j\omega)$ pour tout $\omega \in]0;+\infty[$

1.On lit sur l'écran d'une calculatrice que les valeurs de $H(j\omega)$ pour $\omega = \dfrac{3}{4}$. $\omega = 1$ et $\omega = \sqrt{3}$

$$H\left(\frac{3}{4}j\right) = \frac{16}{25} - \frac{12}{25}j \ ; \ H(j) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j \ ; \ H\left(\sqrt{3}j\right) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}j .$$

Placer sur une figure les points M_ω et N_ω pour $\omega = 3/4, \omega = 1$ puis $\omega = \sqrt{3}$.

2. Tracer sur la figure du 1° ,l'ensemble $\mathcal{C}_1$ des points M_ω du plan $\mathcal{P}$, d'affixe $z = 1+j\omega$ quand ω décrit l'intervalle $[0;+\infty[$.

3. Soit A le point d'affixe $\dfrac{1}{2}$. Calculer $\left|H(j\omega) - \dfrac{1}{2}\right|$.En déduire que le « lieu de transfert » du filtre est inclus dans un demi- cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon .
Représenter graphiquement sur la figure du 1°. l'ensembles $\mathcal{C}$ décrit par le point N_ω lorsque $\omega \in [0;+\infty[$.

Exercice 2

Cet exercice porte sur l'étude de la fonction de transfert T, de la variable réelle positive ω (pulsation)définie par : $T(\omega) = \dfrac{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1+2j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$ où ω_0 (pulsation propre) est un réel strictement positive connu et où j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$. A cet effet on pose $t = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ et on considère alors la fonction f , de la variable réelle positive t, définie par $f(t) = \dfrac{1+jt}{1+2jt}$ .On définie $\mathcal{C}$ l'ensemble des points , d'affixe $f(t)$, obtenus lorsque t parcourt $[0;+\infty[$.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. On prendra 12 cm pour unité graphique et l'on présentera une seule figure pour l'exercice .

1. a. Calculer $f(0)$ et $f(1)$. Placer les points images correspondants A et B de $\mathcal{C}$ sur la figure .
   b. Résoudre l'équation $f(t) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}j$. Placer le point C d'affixe $\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}j$ de $\mathcal{C}$ sur la figure.
2. Montrer que, pour tout $t \in [0;+\infty[$, le module de $f(t) - \dfrac{3}{4}$ est égale à $\dfrac{1}{4}$.
   En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ est une partie d'un cercle dont on précisera le centre et le rayon .
3. Vérifier pour tout $t \in [0;+\infty[$: $f(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1+2jt}$.
4. Définir alors et représenter sur la figure successivement :
   a. la demi-droite (D) ensemble des points d'affixe $z = 1+2jt$ lorsque $t \in [0;+\infty[$.
   b. le demi-cercle $\mathcal{C}_1$ ensemble des points d'affixe $z_1 = \dfrac{1}{z}$ en montrant que $\left|z_1 - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$.

c. l'ensemble C_2 des points $z_2 = \frac{1}{2} z_1$.

d. la courbe C .

5. On pose , pour tout $t \in [0;+\infty[$, $\phi(t) = \arctan(t) - \arctan(2t)$.

a. Vérifier alors que $\phi(t) = \arg f(t)$ compris entre $-\pi$ et π

b. Étudier les variations de la fonction $t \mapsto \phi(t)$ pour $t \in [0;+\infty[$.

c. Après avoir calculer $\phi\left(\sqrt{2}/2\right)$ et en utilisant la courbe C , interpréter graphiquement ce résultat .

Exercice 3

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé$\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ (unité graphique 10 cm) .

On note A le point d'affixe 1 . On désigne par j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

La fonction de transfert d'un système est donnée par : $H(j\omega) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + jr(\omega)}$ où r est la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $r(\omega) = \frac{\omega}{2} + \frac{1}{\omega}$ .On se propose de rechercher le lieu (E) des points M du plan P , d'affixe $Z = H(j\omega)$ lorsque le réel ω décrit l'intervalle $]0;+\infty[$.

1°. Etudier les variations de la fonction r et préciser ses limites en 0 et $+\infty$.

2°.Quel est le lieu (E_1) des points m_1 du plan P , d'affixe $Z_1 = 1 + jr(\omega)$ lorsque le réel ω décrit l'intervalle $]0;+\infty[$. ? On précisera la transformation utilisée.

3°. Quel est le lieu (E) des points m_2 du plan P , d'affixe $Z = H(j\omega)$ lorsque le réel ω décrit l'intervalle $]0;+\infty[$. ? On précisera la transformation utilisée.

4°. Tracer , sur une même figure, les ensembles (E_1) et (E).

Exercice 4

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ (unité graphique 10 cm) .

On désigne par j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

La fonction de transfert d'un système est donnée par : $H(p) = \frac{2p}{p^2 + 2p + 1}$. On se propose de rechercher le lieu de transfert (E) associée à la fonction de transfert $H(p)$ .Pour cela , on pose $p = j\omega$ avec $\omega \in]0;+\infty[$.

1°. Montrer que l'on peut écrire : $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\,f(\omega)}$ où f est la fonction numérique définie par $f(\omega) = \frac{\omega}{2} - \frac{2}{\omega}$.

1°. Etudier les variations de la fonction f et préciser ses limites en 0 et $+\infty$.

2°.Quel est le lieu(E_1) des points m_1 du plan P , d'affixe $Z_1 = 1 + j\,f(\omega)$ lorsque le réel ω décrit l'intervalle $]0;+\infty[$.

3°. Quel est le lieu (E) des points m_2 du plan P , d'affixe $Z = H(j\omega)$ lorsque le réel ω décrit l'intervalle $]0;+\infty[$. ? On précisera la transformation utilisée.

4°. Tracer , sur une même figure, les ensembles (E_1) et (E).

Exercice 5

La fonction de transfert H d'un système est définie par : $H(p) = \frac{p}{p^2 + 2p + 2}$

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ (unité graphique 10 cm) .

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

On se propose de rechercher le lieu C des point M du plan P , d'affixe $Z = H(j\omega)$ lorsque le réel ω décrit l'intervalle $[0;+\infty[$.

1°. Montrer que , pour tout réel ω strictement positif , $H(j\omega)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+jr(\omega)}$, où r est la fonction numérique

définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $r(\omega)=\frac{\omega}{2}-\frac{1}{\omega}$.

2°. Etudier les variations de la fonction r et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$ (on ne demande pas le tracé De la courbe représentative de r).

3°.

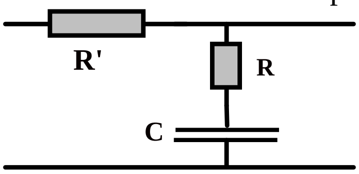
a. Quel est le lieu C_1 des points m_1 du plan P ,d'affixe $Z_1=1+jr(\omega)$ lorsque ω décrit l'intervalle $[0;+\infty[$.

b. Le lieu de transfert du filtre est la courbe décrite , dans un plan rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, par le point M d'affixe $Z=H(j\omega)$ lorsque ω décrit l'intervalle $[0;+\infty[$. Soit A le point d'affixe $\frac{1}{4}$.

Calculer $|H(j\omega)-1/4|$.En déduire que lieu de transfert du filtre est inclus dans un cercle dont on précisera le centre et le rayon . Représenter graphiquement les ensembles C_1 et C

<u>Exercice 6</u>

On considère le quadripôle représenté ci-dessous : R et R' désigne la résistance de deux résistors exprimée En Ohms , C désigne la capacité d'un condensateur exprimé en farads.



En régime harmonique , dans le cas où $R'=3R$, la fonction de transfert complexe de ce quadripôle est

Donnée par : $H(\omega)=\dfrac{R+\frac{1}{jC\omega}}{4R+\frac{1}{jC\omega}}$, où ω désigne un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

On désigne par j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

Dans tout le problème , les nombres strictement positifs R et C sont constants.

1°. Démontrer l'égalité suivante : $H(\omega)=\frac{1+jRC\omega}{1+4jRC\omega}$ et vérifier que $H(\omega)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4(1+4jRC\omega)}$.

2°. Lorsque le réel ω décrit l'intervalle $]0;+\infty[$, le point M d'affixe $H(\omega)$ parcourt un ensemble (E).

L'objet de cette question est de représenter l'ensemble (C), dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

a. On pose $z_1=1+4jR\omega$

Déterminer l'ensemble (Δ_1) décrit par le point M_1 d'affixe z_1 lorsque le réel ω décrit l'intervalle $]0;+\infty[$.

b. Soit $z_2=\frac{1}{1+4jC\omega}$ et M_2 le point d'affixe z_2. Déterminer l'ensemble (C_2) décrit par le point M_2 d'affixe z_2 lorsque le réel ω décrit l'intervalle $]0;+\infty[$.

c. Soit $z_3=\frac{3}{4}z_2$ et M_3 le point d'affixe z_3. Préciser la transformation géométrique qui fait passer du point M_2 au point M_3. En déduire l'ensemble (C_3) des points M_3 obtenus lorsque le réel ω décrit l'intervalle $]0;+\infty[$.

d. Préciser la transformation géométrique qui fait passer du point M_3 au point M d'affixe $z=\frac{1}{4}+z_3$.

En déduire l'ensemble (C) des points M obtenus lorsque le réel ω décrit l'intervalle $]0;+\infty[$.

Cet ensemble de points est une partie d'un cercle dont on indiquera le centre et le rayon .

3. Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ (unité graphique 10 cm) .
   Représenter sur une même figure les ensembles (Δ_1), (C_2) , (C_3) et (C).
4. On note $\phi(\omega)$ la mesure , exprimée en radians , de l'argument du nombre complexe $H(\omega)$ comprise Dans l'intervalle $]-\pi/2;0[$.
   Utiliser la figure obtenue pour déterminer la position du point M pour laquelle $\phi(\omega)$ prend sa valeur minimale ϕ_m . Préciser alors la valeur exacte de $\sin(\phi_m)$.
   Donner une valeur approchée , à 0,01 radian près de ϕ_m .

Exercice 1

1. $H(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega}$ pour $\omega=3/4$. $\omega=1$ et $\omega=\sqrt{3}$

$$H\left(\frac{3}{4}j\right)=\frac{1}{1+\frac{3}{4}j}=\frac{4}{4+3j}=\frac{4(4-3j)}{(4+3j)(4-3j)}=\frac{16-12j}{25}=\frac{16}{25}-\frac{12}{25}j.\quad H(j)=\frac{1}{1+j}=\frac{1-j}{(1+j)(1-j)}=\frac{1-j}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j$$

$$H\left(\sqrt{3}j\right)=\frac{1}{1+\sqrt{3}j}=\frac{1}{1+\sqrt{3}j}=\frac{\left(1-\sqrt{3}j\right)}{\left(1+\sqrt{3}j\right)\left(1-\sqrt{3}j\right)}=\frac{1-\sqrt{3}j}{4}=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}j$$

2. $H(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega}$, puisque $p=j\omega$. lorsque ω décrit l'intervalle $]0;+\infty[$; $z=1+j\omega$ a une partie réelle fixe et égale à 1, sa partie imaginaire ω parcourt $]0;+\infty[$. Donc l'ensemble Γ des points m du plan P , d'affixe $z=1+j\omega$ lorsque ω décrit l'intervalle $[0;+\infty[$ est la droite d'équation : $x=1$.

3. $H(j\omega)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{1+j\omega}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2-1-j\omega}{1+j\omega}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-j\omega}{1+j\omega}$, $H(j\omega)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\bar{z}}{z}$. donc $\left|H(j\omega)-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{\bar{z}}{2z}\right|=\dfrac{1}{2}\dfrac{|\bar{z}|}{|z|}=\dfrac{1}{2}$,
   on sait que l'ensemble du point M d'affixe Z tel que $|Z-a|=r$ est le cercle C de centre A d'affixe a et de rayon r .donc l'ensemble du point M d'affixe $Z=H(j\omega)$ est le cercle C de centre A d'affixe $\dfrac{1}{2}$ et de rayon $r=\dfrac{1}{2}$ privé de l'origine du repère O .

$$H(j)=\frac{1}{1+j}=\frac{1-j}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j\ ;$$

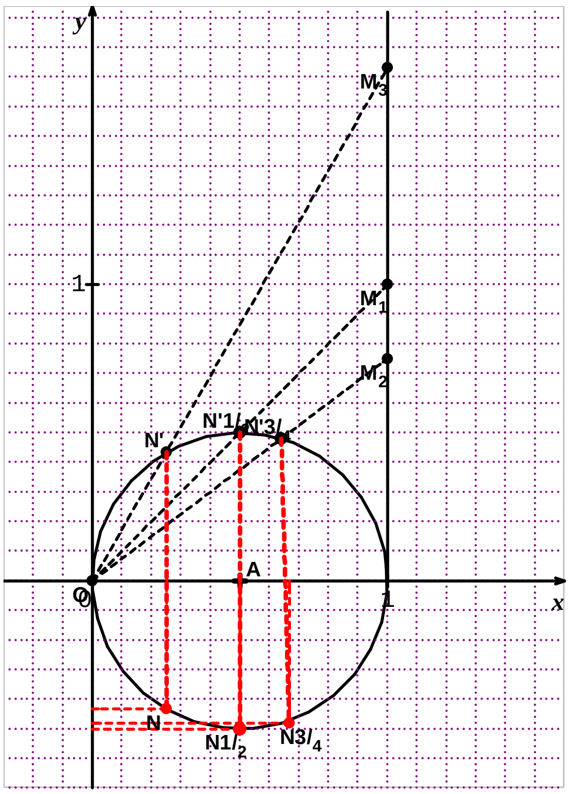
$$H(2j)=\frac{1}{1+2j}=\frac{1-2j}{5}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}j.$$

$$H(j\sqrt{3})=\frac{1}{1+j\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{3}j}{4}=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}j$$

$$H(j\sqrt{2})=\frac{1}{1+j\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}j}{3}=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}j.$$

$\left|H(j)-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$; $\left|H(j\sqrt{3})-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$;

$\left|H(j\sqrt{2})-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$ et $\left|H(2j)-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$, et tous les points correspondants appartiennent au cercle C de centre A d'affixe $\dfrac{1}{2}$ et de rayon $r=\dfrac{1}{2}$.



Exercice 2-Correction

1. $f(t)=\dfrac{1+jt}{1+2jt}$: $f(0)=\dfrac{1+j\times 0}{1+2j\times 0}=\dfrac{1}{1}=1$ et $\left|f(0)-\dfrac{3}{4}\right|=\left|1-\dfrac{3}{4}\right|=\dfrac{1}{4}$

$f(1)=\dfrac{1+j}{1+2j}=\dfrac{(1+j)(1-2j)}{(1+2j)(1-2j)}=\dfrac{1-2j+j+2}{1+4}=\dfrac{3-j}{5}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}j$. $\left|f(1)-\dfrac{3}{4}\right|=\left|\dfrac{-3}{20}-\dfrac{1}{5}j\right|=\sqrt{\dfrac{9}{400}+\dfrac{16}{25}}=\sqrt{\dfrac{25}{400}}=\dfrac{5}{20}=\dfrac{1}{4}$

b. $f(t)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}j \Leftrightarrow \dfrac{1+jt}{1+2jt}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}j \Leftrightarrow \dfrac{(1+jt)(1-2jt)}{(1+2jt)(1-2jt)}=\dfrac{1-2jt+jt+2t^2}{1+4t^2}=\dfrac{1+2t^2-jt}{5}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}j$

Donc $\dfrac{1+2t^2}{5}=\dfrac{3}{5}\Leftrightarrow 5+10t^2=15\Leftrightarrow 10t^2=10\Leftrightarrow t^2=1\Leftrightarrow t=\pm 1$. Or $t>0$, donc $t=1$. et $\dfrac{-t}{5}=-\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow t=1$.

2. $\left|f(t)-\dfrac{3}{4}\right|=\left|\dfrac{1+jt}{1+2jt}-\dfrac{3}{4}\right|=\left|\dfrac{4+4jt-3-6jt}{4(1+2jt)}\right|=\left|\dfrac{1-2jt}{4(1+2jt)}\right|=\dfrac{1}{4}\dfrac{|1-2jt|}{|1+2jt|}=\dfrac{1}{4}$, puisque $|1-2jt|=|1+2jt|=\sqrt{1+4t^2}$.

Par conséquent l'ensemble est une partie d'un cercle de centre I d'affixe $1/4$ et le rayon $1/4$.

3. $f(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1+2jt}=\dfrac{1+2jt+1}{2(1+2jt)}=\dfrac{2+2jt}{2(1+2jt)}=\dfrac{2(1+jt)}{2(1+2jt)}=\dfrac{1+jt}{1+2jt}$.

4. Définir alors et représenter sur la figure successivement :

a. la demi-droite (D) d'équation $x=1$ est l'ensemble des points d'affixe $z=1+2jt$ lorsque $t\in[0;+\infty[$.

b. le demi-cercle C_1 ensemble des points d'affixe $z_1=\dfrac{1}{z}$ en montrant que $\left|z_1-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$.

$\left|z_1-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{1+jt}{1+2jt}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{2-1-2jt}{2(1+2jt)}\right|=\left|\dfrac{1-2jt}{2(1+2jt)}\right|=\dfrac{1}{2}\dfrac{|1-2jt|}{|1+2jt|}=\dfrac{1}{2}$

Donc l'ensemble C_1 est une partie d'un cercle de centre J d'affixe $\dfrac{1}{2}$ et le rayon $\dfrac{1}{2}$.

c. l'ensemble C_2 des points $z_2=\dfrac{1}{2}z_1$. Par définition du transformation définie par $z'=kz$ est l'homothétie de centre O et de rapport k ici $k=\dfrac{1}{2}$. Donc l'ensemble C_2 est une partie d'un cercle de centre I d'affixe $\dfrac{1}{2}$ et de rayon $r'=\dfrac{1}{2}|z_1|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$. ($r'=\dfrac{1}{2}r$).

d. $f(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1+2jt}\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{1}{2}+z_2$, Donc l'ensemble C est une partie d'un cercle de centre O' d'affixe $\dfrac{1}{2}+z_2$ et de rayon $\dfrac{1}{4}$.(translation de vecteur $\vec{m}=\dfrac{1}{2}\vec{u}$).

5. On pose , pour tout $t\in[0;+\infty[$, $\phi(t)=\arctan(t)-\arctan(2t)$. Par définition :

$\arg\left(\dfrac{1+jt}{1+2jt}\right)=\arg(1+jt)-\arg(1+2jt)=(\vec{u};\overrightarrow{OM_1})-(\vec{u};\overrightarrow{OM_2})=(\vec{u};\overrightarrow{OM_1})+(\overrightarrow{OM_2};\vec{u})=(\overrightarrow{OM_2};\overrightarrow{OM_1})$.

Soient $\theta=\arg(1+jt)$, donc $\tan\theta=\dfrac{b}{a}=\dfrac{t}{1}=t\Leftrightarrow\theta=\arctan t$ et $\theta'=\arg(1+2jt)$, donc

$\tan\theta'=\dfrac{b}{a}=\dfrac{2t}{1}=2t\Leftrightarrow\theta'=\arctan 2t$, par conséquent $\arg\left(\dfrac{1+jt}{1+2jt}\right)=\arctan(t)-\arctan(2t)=\phi(t)$.

$\phi'(t)=\dfrac{1}{1+t^2}-\dfrac{2}{1+4t^2}=\dfrac{1+4t^2-2-2t^2}{(1+t^2)(1+4t^2)}=\dfrac{-1+2t^2}{(1+t^2)(1+4t^2)}$

$\phi'(t)=0\Leftrightarrow 2t^2-1=0\Leftrightarrow t=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, puisque $t\in[0;+\infty[$, une seule valeur valable de t est $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

t	0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$\phi'(t)$		$-$	0	$+$	

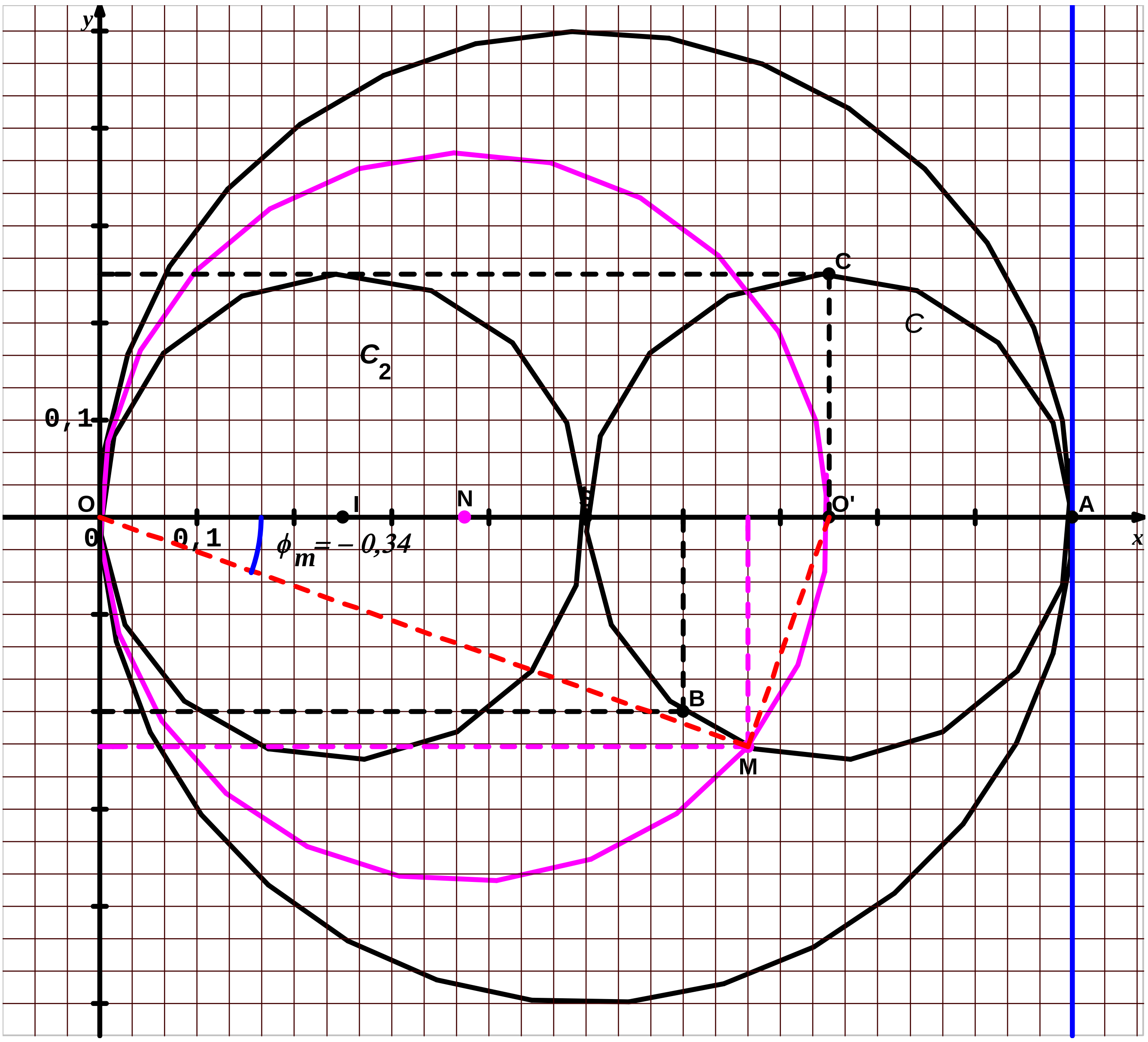
$\phi(t)$	0	$\searrow$ $\approx -0{,}34$	$\nearrow$	0

Donc la fonction ϕ admet un maximum négatif donc $\phi(t)<0$ pour $t\in[0;+\infty[$.

$\phi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arctan\left(\sqrt{2}\right)\approx -0{,}34$ donc et $\phi_m \in]-\pi/2;0[$.

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1+j\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1+2j\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{2+\sqrt{2}j}{2\left(1+\sqrt{2}j\right)}=\frac{\left(2+\sqrt{2}j\right)\left(1-\sqrt{2}j\right)}{2\left(1+\sqrt{2}j\right)\left(1-\sqrt{2}j\right)}=\frac{2-2\sqrt{2}j+\sqrt{2}j+2}{2(1+2)}=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}j$$

$$\left|f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{3}{4}\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}j-\frac{3}{4}\right|=\left|\frac{-1}{12}-\frac{\sqrt{2}}{6}j\right|=\sqrt{\frac{1}{144}+\frac{2}{36}}=\sqrt{\frac{1+8}{144}}=\sqrt{\frac{9}{144}}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$



l'angle ϕ_m prend sa valeur minimale lorsque la droite (OM) est tangente à (C). Dans cette situation

Le triangle OMD est rectangle en M , donc : $|\sin\phi_m|=\frac{DM}{OD}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}$; puisque $\phi_m\in]-\pi/2;0[$

Donc on a $\sin\phi_m=-1/3$, et par conséquent $\phi_m=\arcsin(-1/3)\approx -0{,}34$.

Exercice 3

$H(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\,f(\omega)}$, avec $f(\omega)=\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{1}{\omega}$.

2. la fonction f, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(\omega)=\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{1}{\omega}$, est dérivable sur $]0\,;+\infty[$

et $f'(\omega)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^2-2}{2\omega^2}$. la fonction f admet un minimum positif sur $]0\,;+\infty[$, donc $f(\omega)>0$.

$\lim\limits_{\omega\to0}\dfrac{\omega}{2}=0$ et $\lim\limits_{\omega\to0}\dfrac{1}{\omega}=+\infty$, donc $\lim\limits_{\omega\to0}f(\omega)=+\infty$.

$\lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{\omega}{2}=+\infty$ et $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{1}{2\omega}=0$, donc $\lim\limits_{\omega\to+\infty}f(\omega)=+\infty$.

ω	0		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
$f'(\omega)$		$-$	0	$+$	
$f(\omega)$		$+\infty$ ↘	$\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$	↗ $+\infty$	

3a. lorsque ω décrit l'intervalle $]0\,;+\infty[$; $Z_1=1+j\,f(\omega)$ a une partie réelle fixe et égale à 1, sa partie imaginaire $f(\omega)$ parcourt $\mathbb{R}$. Donc l'ensemble C_1 des points m_1 du plan P, d'affixe $Z_1=1+j\,f(\omega)$ lorsque ω décrit l'intervalle $[0;+\infty[$ est la droite d'équation : $x=1$.

3b. $H(j\omega)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{1+j\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{1}{\omega}\right)}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2-1-j\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{1}{\omega}\right)}{1+j\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{1}{\omega}\right)}=\dfrac{1-j\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{1}{\omega}\right)}{1+j\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{1}{\omega}\right)}$, $H(j\omega)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\overline{Z_1}}{Z_1}$

donc $\left|H(j\omega)-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{\overline{Z_1}}{2Z_1}\right|=\dfrac{1}{2}\dfrac{|\overline{Z_1}|}{|Z_1|}=\dfrac{1}{2}$, on sait que l'ensemble du point M d'affixe Z tel que $|Z-a|=r$ est le cercle C de centre A d'affixe a et de rayon r .donc l'ensemble du point M d'affixe $Z=H(j\omega)$ est le cercle C de centre A d'affixe $1/2$ et de rayon $r=1/2$.

Exercice 4

1. $H(j\omega)=\dfrac{2j\omega}{(j\omega)^2+2j\omega+1}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2j\omega}+1+\dfrac{j\omega}{2}}=\dfrac{1}{1+j\left(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{1}{2\omega}\right)}$, puisque $\dfrac{1}{2j\omega}=-\dfrac{j}{2\omega}$.

Donc $H(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\,f(\omega)}$, avec $f(\omega)=\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{1}{2\omega}$.

2. la fonction f, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(\omega)=\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{1}{2\omega}$, est dérivable sur $]0\,;+\infty[$

et $f'(\omega)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\omega^2}=\dfrac{\omega^2+1}{2\omega^2}>0$ .la fonction f est donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{\omega\to0}\dfrac{\omega}{2}=0$ et $\lim\limits_{\omega\to0}\dfrac{1}{2\omega}=+\infty$, donc $\lim\limits_{\omega\to0}f(\omega)=-\infty$.

$\lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{\omega}{2}=+\infty$ et $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{1}{2\omega}=0$, donc $\lim\limits_{\omega\to+\infty}f(\omega)=+\infty$.

ω	0		$+\infty$
$f'(\omega)$		$+$	
$f(\omega)$		$-\infty$ ↗	$+\infty$

3a. lorsque ω décrit l'intervalle $]0\,;+\infty[$; $Z_1=1+j\,f(\omega)$ a une partie réelle fixe et égale à 1, sa partie imaginaire $f(\omega)$ parcourt $\mathbb{R}$..

Donc l'ensemble C_1 des points m_1 du plan P, d'affixe $Z_1=1+j\,f(\omega)$ lorsque ω décrit l'intervalle $[0;+\infty[$ est la droite d'équation : $x=1$.

3b. $H(j\omega)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{1+j\left(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{1}{2\omega}\right)}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2-1-j\left(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{1}{2\omega}\right)}{1+j\left(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{1}{2\omega}\right)}=\dfrac{1-j\left(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{1}{2\omega}\right)}{1+j\left(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{1}{2\omega}\right)}$, $H(j\omega)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\overline{Z_1}}{Z_1}$

donc $\left|H(j\omega)-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{\overline{Z_1}}{2Z_1}\right|=\dfrac{1}{2}\dfrac{\left|\overline{Z_1}\right|}{\left|Z_1\right|}=\dfrac{1}{2}$, on sait que l'ensemble du point M d'affixe Z tel que $|Z-a|=r$ est le cercle C de centre A d'affixe a et de rayon r .donc l'ensemble du point M d'affixe $Z=H(j\omega)$ est le cercle C de centre A d'affixe $1/2$ et de rayon $r=1/2$.

Exercice 5

$H(p)=\dfrac{p}{p^2+2p+2}$

1. $H(j\omega)=\dfrac{j\omega}{(j\omega)^2+2j\omega+2}=\dfrac{1}{\dfrac{2}{j\omega}+2+j\omega}=\dfrac{1}{2+2j\left(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{1}{\omega}\right)}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1+j\left(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{1}{\omega}\right)}$, puisque $\dfrac{1}{j\omega}=-\dfrac{j}{\omega}$.

Donc $H(j\omega)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1+jr(\omega)}$, avec $r(\omega)=\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{1}{\omega}$

2. la fonction f , définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $r(\omega)=\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{1}{\omega}$, est dérivable sur $]0\,;+\infty[$

et $r'(\omega)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^2+2}{2\omega^2}>0$ .la fonction r est donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{\omega}{2}=0$ et $\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{1}{\omega}=+\infty$, donc $\lim\limits_{\omega\to 0}r(\omega)=-\infty$. $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{\omega}{2}=+\infty$ et $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{1}{\omega}=0$, donc $\lim\limits_{\omega\to+\infty}r(\omega)=+\infty$

ω	0	$+\infty$
$f'(\omega)$		+
$f(\omega)$		$-\infty \nearrow +\infty$

3a. lorsque ω décrit l'intervalle $]0\,;+\infty[$; $Z_1=1+jr(\omega)$ a une partie réelle fixe et égale à 1, sa partie imaginaire $r(\omega)$ parcourt $\mathbb{R}$.
Donc l'ensemble C_1 des points m_1 du plan P , d'affixe $Z_1=1+jr(\omega)$ lorsque ω décrit l'intervalle $[0;+\infty[$ est la droite d'équation : $x=1$.

3b. $H(j\omega)-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1+j\left(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{1}{\omega}\right)}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}\dfrac{2-1-j\left(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{1}{\omega}\right)}{1+j\left(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{1}{\omega}\right)}=\dfrac{1}{4}\dfrac{1-j\left(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{1}{\omega}\right)}{1+j\left(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{1}{\omega}\right)}$, $H(j\omega)-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\overline{Z_1}}{Z_1}$

donc $\left|H(j\omega)-\dfrac{1}{4}\right|=\left|\dfrac{\overline{Z_1}}{4Z_1}\right|=\dfrac{1}{4}\dfrac{\left|\overline{Z_1}\right|}{\left|Z_1\right|}=\dfrac{1}{4}$, on sait que l'ensemble du point M d'affixe Z tel que $|Z-a|=r$ est le cercle C de centre A d'affixe a et de rayon r .donc l'ensemble du point M d'affixe $Z=H(j\omega)$ est le cercle C de centre A d'affixe $1/4$ et de rayon $r=1/4$.

Exercice 6 Correction

1. par réduction on obtient : $H(\omega)=\dfrac{R+\dfrac{1}{jC\omega}}{4R+\dfrac{1}{jC\omega}}=\dfrac{\dfrac{1+RjC\omega}{jC\omega}}{\dfrac{1+4RjC\omega}{jC\omega}}=\dfrac{1+RjC\omega}{1+4RjC\omega}$

$\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4(1+4jRC\omega)}=\dfrac{1+4jRC\omega+3}{4(1+4jRC\omega)}=\dfrac{4(1+jRC\omega+3)}{4(1+4jRC\omega)}=H(\omega)$.

2. a. Le point M_1 d'affixe $z_1=x_1+jy_1=1+4jRC\omega$, c'est-à-dire $x_1=1$ et $y_1=4RC\omega>0$,donc Le point M_1 appartient à la droite d'équation $x=1$ et comme $y>0$, l'ensemble (Δ_1) décrit par le point M_1 d'affixe z_1 lorsque le réel ω décrit l'intervalle $]0;+\infty[$ est la demi- droite située dans le demi-plan des ordonnées strictement positives .

b. Soit $z_2=\dfrac{1}{1+4jC\omega}$ et M_2 le point d'affixe z_2. Calculons le module de $z_2-\dfrac{1}{2}$

$$\left|z_2-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{1+4jC\omega}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2-(1+4jC\omega)}{2(1+4jC\omega)}\right|=\left|\frac{1-4jC\omega}{2(1+4jC\omega)}\right|=\frac{1}{2}\frac{|1-4jC\omega|}{|1+4jC\omega|}=\frac{1}{2}\times\frac{|\overline{Z_1}|}{|Z_1|}=\frac{1}{2}.$$

L'image d'une droite ne passant par O d'équation $x=a$ et qui passe par le point $A(a;0)$ est un cercle de diamètre $[OA']$ privé de O qui passe par le point $A'\left(\frac{1}{a};0\right)$.Ici $a=1$, d'où $A=A'$. L'ensemble (C_2) décrit par le point M_2 d'affixe z_2 lorsque le réel ω décrit l'intervalle $]0;+\infty[$ est cercle de centre $B\left(\frac{1}{2a};0\right)=B\left(\frac{1}{2};0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$. De plus $\arg z_2=\arg\frac{1}{z_1}=-\arg z_1+2k\pi$, donc (C_2) est le demi-cercle de centre $B\left(\frac{1}{2};0\right)$ de rayon $\frac{1}{2}$ située dans le demi-plan des ordonnées strictement négatives .

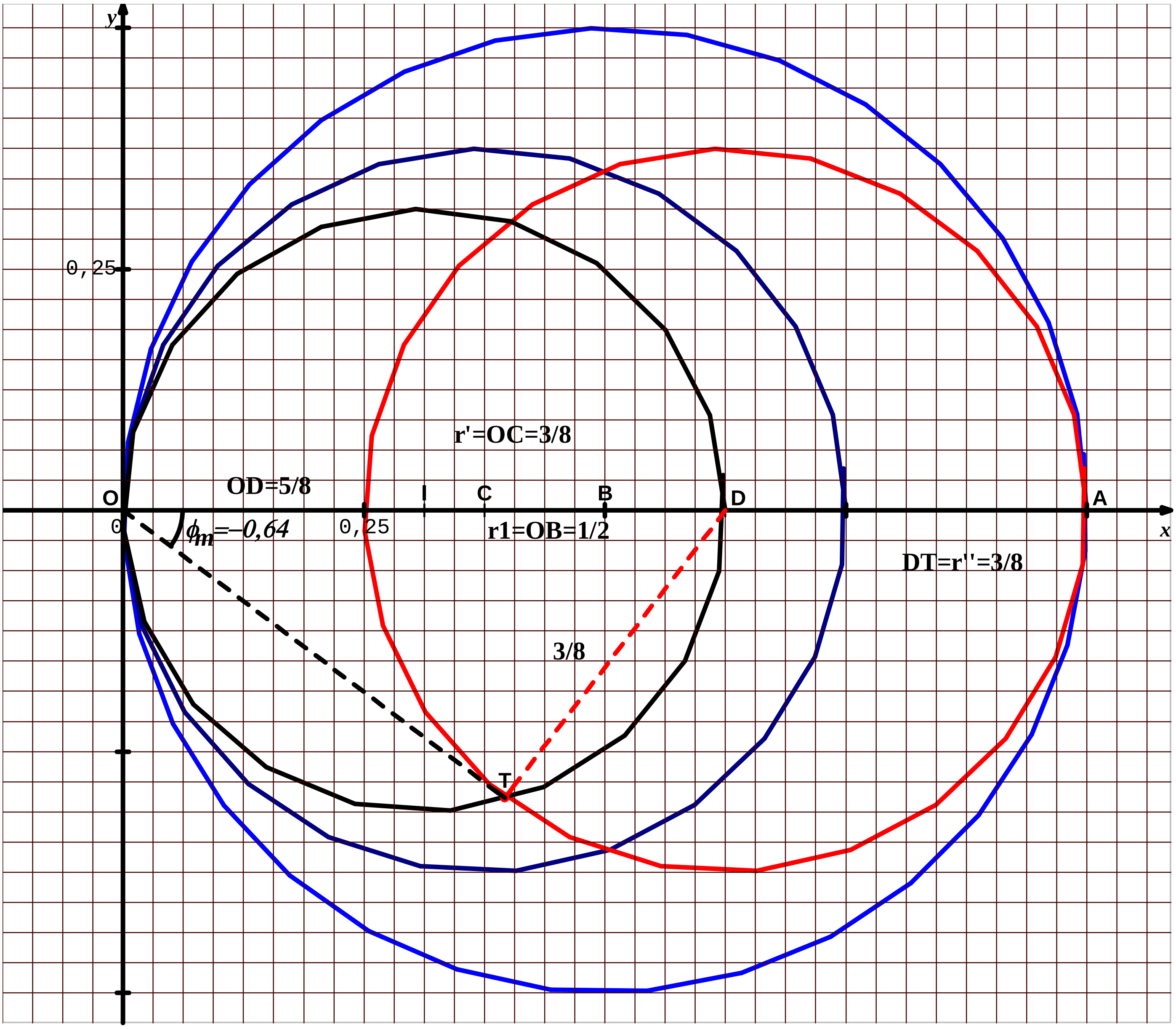
c. M_3 le point d'affixe $z_3=\frac{3}{4}z_2$, on passe de point M_2 au point M_3 par l'homothétie h de centre O et de rapport $k=\frac{3}{4}$.Or l'image d'un cercle par une homothétie est un cercle de rayon $r'=\frac{3}{4}r\,(r'=kr)$ et $h(B)=C$ c'est-à-dire $OC=\frac{3}{4}OB=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$, de plus $k=\frac{3}{4}>0$, l'ensemble (C_3) des points M_3 obtenus lorsque le réel ω décrit l'intervalle $]0;+\infty[$ est le demi-cercle situé dans le demi-plan des ordonnées négatives.

d. le point M a pour d'affixe $z=\frac{1}{4}+z_3$, on passe de point M_3 au point M par une translation de vecteur $\vec{w}=\frac{1}{4}\vec{u}$, donc l'ensemble (C) des points M obtenus lorsque le réel ω décrit l'intervalle $]0;+\infty[$ est le demi-cercle de centre D image du point C par la translation de vecteur $\vec{w}$, une translation est une isométrie) donc $D=T(C)\to D(5/8;0)$ et de rayon $r=3/8$ situé dans le demi-plan des ordonnées négatives.

3. voir graphique ci-dessous.

4. l'angle ϕ_m prend sa valeur minimale lorsque la droite (OM) est tangente à (C). Dans cette situation Le triangle OMD est rectangle en M , donc : $|\sin\phi_m|=\frac{DM}{OD}=\frac{3/8}{5/8}=0,6$; puisque $\phi_m\in]-\pi/2;0[$

On a donc $\sin\phi_m=-0,6$ et par conséquent $\phi_m=\arcsin(-0,6)\approx-0,64\,rad$.


y
0,25
O
0
0,25
I
C
B
D
A
x
r'=OC=3/8
OD=5/8
$\phi_m=-0,64$
r1=OB=1/2
DT=r''=3/8
3/8
T