

PARTIEL N°2

MATHEMATIQUES

Exercice 1 : Les questions ci-dessous sont indépendantes 8 points

On note j le nombre complexe de module 1, dont un argument est $\pi/2$

Soit le plan complexe rapporté à un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormal. (unité graphique : 2 cm sur les axes)

1°) Déterminer et représenter l'ensemble des images des nombres complexes z tels que :

a. $|z - 4 - 3j| = 5$

b. $\operatorname{Re}(z + 3 + j) = 1$

c. $\operatorname{Im}(z - 1 - j) = 3$

d. $\arg(z - z_A) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2°) a. Soit $c = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2})j$. Calculer c^2 .

b. Calculer le module et un argument de c^2

c. En déduire le module et un argument de c

3°) Soit $d = 2\sqrt{3} + 2j$.

a. Déterminer un couple de réels x et y tels que : $(x + yj)^2 = 2\sqrt{3} + 2j$. (méthode algébrique)

b. Donner la forme trigonométrique et exponentielle de d

c. En utilisant la méthode trigonométrique, résoudre l'équation : $z^2 = 2\sqrt{3} + 2j$.

Exercice 2 : 5 points

On se propose dans cette question de déterminer le « lieu de transfert » associé à la fonction de transfert H .

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$ et on pose $p = j\omega$ avec $\omega \in]0; +\infty[$

On a alors : $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$

Dans ce qui suit, les représentations graphiques demandées sont à réaliser sur une feuille de papier millimétré avec un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 10centimètres

On appelle M_ω le point d'affixe $z = 1 + j\omega$ et N_ω le point d'affixe $H(j\omega)$ pour tout $\omega \in]0; +\infty[$

1. Vérifier en écrivant les calculs intermédiaires que les valeurs de $H(j\omega)$ pour $\omega = \frac{3}{4}$, $\omega = 1$ et $\omega = \sqrt{3}$

sont successivement : $H\left(\frac{3}{4}j\right) = \frac{16}{25} - \frac{12}{25}j$; $H(j) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j$; $H(\sqrt{3}j) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}j$.

Placer sur une figure les points M_ω et N_ω pour $\omega = 3/4$, $\omega = 1$ puis $\omega = \sqrt{3}$.

2. Tracer sur la figure du 1°, l'ensemble C_1 des points M_ω du plan $\mathcal{P}$, d'affixe $z = 1 + j\omega$ quand ω décrit l'intervalle $[0; +\infty[$.

3. Soit A le point d'affixe $\frac{1}{2}$. Calculer $\left|H(j\omega) - \frac{1}{2}\right|$. En déduire que le « lieu de transfert » du filtre est inclus

dans un demi-cercle C dont on précisera le centre et le rayon.

Représenter graphiquement sur la figure du 1°. l'ensembles C décrit par le point N_ω lorsque $\omega \in [0; +\infty[$.

Exercice 3 - 7 pts

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - \arctan x$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 10 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées).

1. Montrer que f est une fonction impaire. En déduire que l'étude peut se faire sur $[0; +\infty[$.
2. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
3. a. Montrer que la dérivée est définie par : $f'(x) = \frac{1 - 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$
b. En déduire le tableau de variation de f .
4. a. Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
b. soit φ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = x - f(x)$.
Etudier les variations de la fonction φ (les limites ne sont pas demandées).
c. Calculer $\varphi(0)$. Donner le signe de $\varphi(x)$.
En déduire la position de la courbe (C) par rapport à sa tangente (T).
d. Construire dans le même repère annexe1 la courbe (C) et la tangente (T).

Corrigé

1°. a) l'ensemble des points d'affixe z tel que $|z - 4 - 3j| = 5$ est le cercle de centre $A(4;3)$ et de rayon 5.

b. $z + 3 + j = x + 3 + jy = x + 3 + jy = 1$, $\operatorname{Re}(z + 3 + j) = 1$ si et seulement si $x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = -2$, donc l'ensemble des points d'affixe z tel que $\operatorname{Re}(z + 3 + j) = 1$ est la droite d'équation $x = -2$.

c. $x + jy - 1 - j = x - 1 + j(y - 1)$ $\operatorname{Im}(z - 1 - j) = 3 \Leftrightarrow y - 1 = 3 \Leftrightarrow y = 3 + 1 = 4$, donc l'ensemble des points d'affixe z tel que $\operatorname{Im}(z - 1 - j) = 3$ est la droite d'équation $y = 4$

d. $\arg(z - z_A)$ est une mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{AM})$

la ligne de niveau définie par $\arg(z - z_A) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ est la demi-droite d'extrémité $A(-3;2)$

(A non comprise) faisant un angle de $-\frac{\pi}{4}$ avec la parallèle à l'axe des abscisses passant par A.

$$2. c^2 = \left[(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2})j \right]^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})j = 8\sqrt{3} + 8j$$

$$|c^2| = |8\sqrt{3} + 8j| = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + 8^2} = \sqrt{162 + 64} = \sqrt{226} = 16, \text{ donc } |c| = \sqrt{16} = 4$$

$$\alpha = \arctan \frac{b}{a} = \arctan \frac{8}{8\sqrt{3}} = \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{\pi}{6}. \text{ Donc } \alpha = \arg c^2 = \arg(8\sqrt{3} + 8j) = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{et on a : } \theta = \arg c = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ donc } c = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2})j = 4e^{j\pi/12} = 4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right).$$

$$\text{D'où } 4\cos(\pi/12) = \sqrt{2} + \sqrt{6} \Leftrightarrow \cos(\pi/12) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \text{ et } 4\sin(\pi/12) = \sqrt{6} - \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

3. Soit $d = 2\sqrt{3} + 2j$.

a. Déterminer un couple de réels x et y tels que: $(x + yj)^2 = 2\sqrt{3} + 2j$

$$(x + yj)^2 = 2\sqrt{3} + 2j \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2jxy = 2\sqrt{3} + 2j, \text{ donc } \begin{cases} x^2 - y^2 = 2\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 4 \\ 2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 2\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 4 \\ xy = 1 \end{cases}$$

par addition on obtient : $2x^2 = 4 + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

et par soustraction on obtient : $2y^2 = 4 - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow y^2 = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

donc $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}j$ ou $z = -\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}j$

$$|d| = |2\sqrt{3} + 2j| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 4} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4 \text{ et } d = 2\sqrt{3} + 2j = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j \right) = 4e^{j\pi/6}$$

$$\text{donc } z^2 = 4e^{j\pi/6} \Leftrightarrow z = 2 \times e^{j\pi/12} = 2[\cos(\pi/12) + j\sin(\pi/12)].$$

$$z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}j = 2[\cos(\pi/12) + j\sin(\pi/12)]. \quad \cos(\pi/12) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

Exercice 2

$$1. H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} \text{ pour } \omega = 3/4, \omega = 1 \text{ et } \omega = \sqrt{3} : z_{3/4} = 1 + \frac{3}{4}j ; z_1 = 1 + j \text{ et } z_{\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}j$$

$$H\left(\frac{3}{4}j\right) = \frac{1}{1 + \frac{3}{4}j} = \frac{4}{4 + 3j} = \frac{4(4 - 3j)}{(4 + 3j)(4 - 3j)} = \frac{16 - 12j}{25} = \frac{16}{25} - \frac{12}{25}j. \quad H(j) = \frac{1}{1 + j} = \frac{1 - j}{(1 + j)(1 - j)} = \frac{1 - j}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j$$

$$H(\sqrt{3}j) = \frac{1}{1+\sqrt{3}j} = \frac{1}{1+\sqrt{3}j} \cdot \frac{(1-\sqrt{3}j)}{(1+\sqrt{3}j)(1-\sqrt{3}j)} = \frac{1-\sqrt{3}j}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}j$$

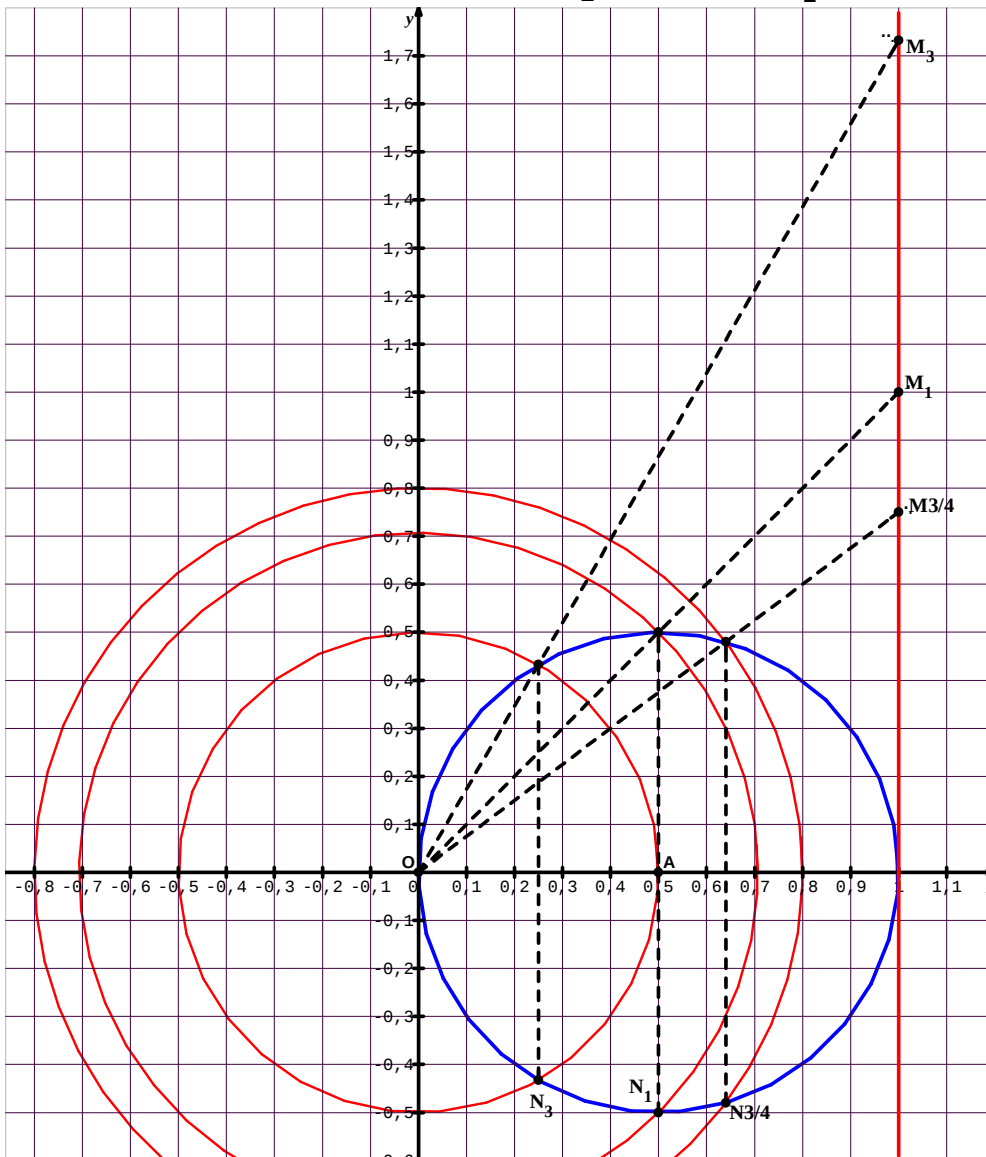
2. $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$, puisque $p = j\omega$. lorsque ω décrit l'intervalle $]0; +\infty[$; $z = 1 + j\omega$ a une partie réelle fixe et égale à 1, sa partie imaginaire ω parcourt $]0; +\infty[$. Donc l'ensemble Γ des points m du plan $\mathcal{P}$, d'affixe $z = 1 + j\omega$ lorsque ω décrit l'intervalle $[0; +\infty[$ est la droite d'équation : $x = 1$.

3. $H(j\omega) - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2-1-j\omega}{1+j\omega} = \frac{1}{2} \times \frac{1-j\omega}{1+j\omega}$, $H(j\omega) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\bar{z}}{z}$. donc $\left| H(j\omega) - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{\bar{z}}{2z} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{\bar{z}}{z} \right| = \frac{1}{2}$,

on sait que l'ensemble du point M d'affixe Z tel que $|Z - a| = r$ est le cercle $\mathcal{C}$ de centre A d'affixe a et de rayon r. donc l'ensemble du point M d'affixe $Z = H(j\omega)$ est le cercle $\mathcal{C}$ de centre A d'affixe $\frac{1}{2}$ et de rayon $r = \frac{1}{2}$ privé de l'origine du repère O.

$\left| H(j) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$; $\left| H(j\sqrt{3}) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$; $\left| H(j\sqrt{2}) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$ et $\left| H(2j) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$, et tous les points correspondants

appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre A d'affixe $\frac{1}{2}$ et de rayon $r = \frac{1}{2}$.



Exercice 2

1. $f(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2 + 1} - \arctan(-x) = -\frac{2x}{x^2 + 1} + \arctan(x) = -f(x)$. f est donc impaire, la courbe est symétrique par rapport au point O origine du repère. On peut donc étudier la fonction sur $[0; +\infty[$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$.

3. a. $f'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2 - 1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - 3x^2}{(1 + x^2)^2}$. Sur $[0; +\infty[$ on a :

$f'(x) = 0$ signifie $1 - 3x^2 = 0$ équivaut à
 $(1 - \sqrt{3}x)(1 + \sqrt{3}x) = 0$ équivaut à $(1 - \sqrt{3}x) = 0$
 équivaut à $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

b.

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$

4. Equation de la tangente à (C au point d'abscisse 0.

$y = f'(0)x + f(0) = x$. $f'(0) = 1$.

b. $\varphi(x) = x - f(x)$,

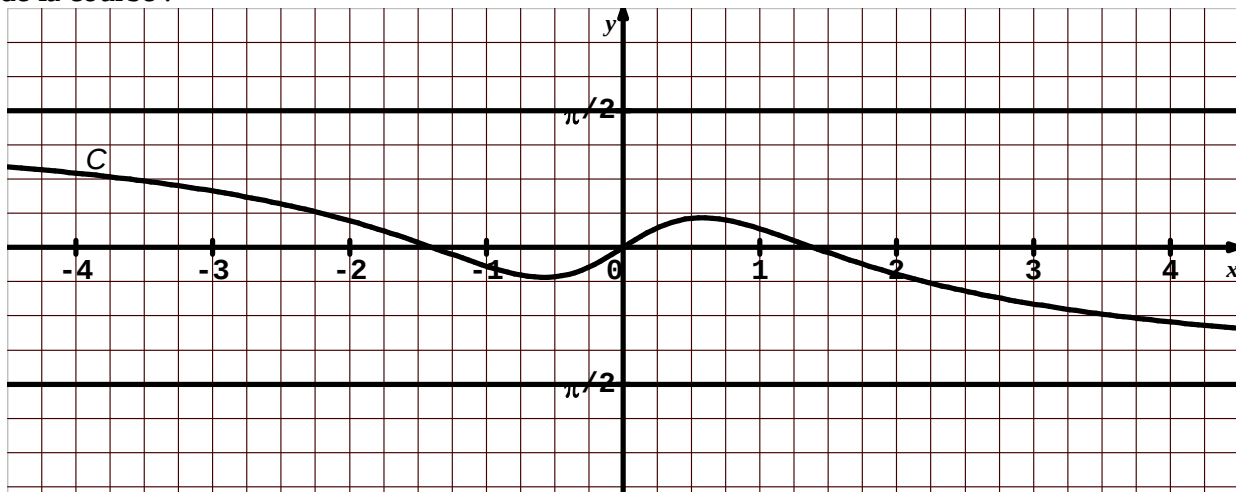
$\varphi'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{1 - 3x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{(1 + x^2)^2 - (1 - 3x^2)}{(1 + x^2)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - 1 + 3x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{x^4 + 5x^2}{(1 + x^2)^2} > 0$.

$\varphi(0) = -f(0) = 0$. On en déduit que :

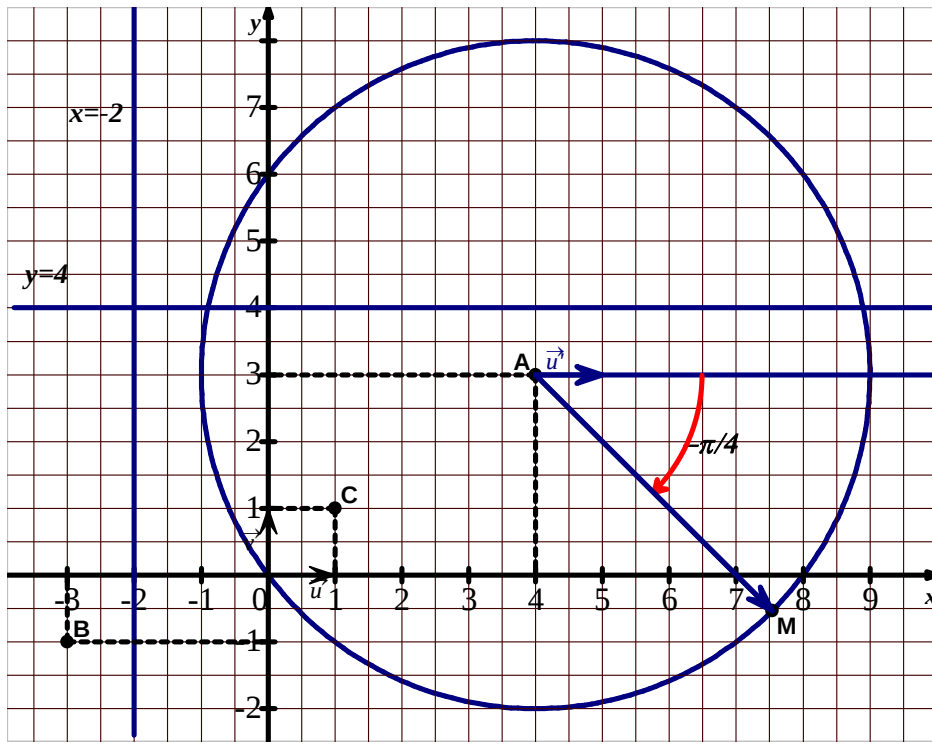
Si $x < 0$, on $\varphi(x) < 0$, donc $x < f(x)$ et la tangente est au dessous de la courbe.

Si $x > 0$, on $\varphi(x) > 0$, donc $x > f(x)$ et la tangente est au dessus de la courbe.

x	0	0	$+\infty$
$\phi'(x)$	+	0	+
$\phi(x)$		0	



Exercise 1



3°) Soient les nombres complexes $z_1 = 1 - i$; $z_2 = 1 + i$ et $Z = \frac{\sqrt{2} + z_1}{\sqrt{2} + z_2}$.

a. Calculer Z en utilisant la forme algébrique.

b. Ecrire z_1 et z_2 sous la forme $r_1 e^{j\theta_1}$, $r_2 e^{j\theta_2}$ où r_1 , r_2 ; θ_1 ; θ_2 sont des constantes réelles à déterminer

c. Vérifier $e^{-j\pi/8}(e^{j\pi/8} + e^{-j\pi/8}) = 1 + e^{-j\pi/4}$ et $e^{j\pi/8}(e^{-j\pi/8} + e^{j\pi/8}) = 1 + e^{j\pi/4}$

d. Ecrire Z sous la forme trigonométrique $r e^{j\alpha}$ où r et α sont des constantes réelles à déterminer.

3. Soient les nombres complexes $z_1 = 1 - i$; $z_2 = 1 + i$ et $Z = \frac{\sqrt{2} + z_1}{\sqrt{2} + z_2}$.

$$Z = \frac{\sqrt{2} + z_1}{\sqrt{2} + z_2} = \frac{\sqrt{2} + 1 - j}{\sqrt{2} + 1 + j} = \frac{(\sqrt{2} + 1 - j)(\sqrt{2} + 1 - j)}{(\sqrt{2} + 1 + j)(\sqrt{2} + 1 - j)} = \frac{(\sqrt{2} + 1)^2 - 1 - 2(\sqrt{2} + 1)j}{(\sqrt{2} + 1)^2 + 1}$$

$$Z = \frac{2 + 1 + 2\sqrt{2} - 1 - 2(\sqrt{2} + 1)j}{4 + 2\sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} + 1)j}{(2 + \sqrt{2})} = \frac{(1 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) - (\sqrt{2} + 1)(2 - \sqrt{2})j}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}$$

$$Z = \frac{(1 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) - (\sqrt{2} + 1)(2 - \sqrt{2})j}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}j}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j.$$

$$z_1 = 1 - j = \sqrt{2}e^{-j\pi/4} \text{ et } z_2 = 1 + i = \sqrt{2}e^{j\pi/4}.$$

$$Z = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}e^{-j\pi/4}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}e^{j\pi/4}} = \frac{1 + e^{-j\pi/4}}{1 + e^{j\pi/4}} = \frac{e^{-j\pi/8}(e^{j\pi/8} + e^{-j\pi/8})}{e^{j\pi/8}(e^{j\pi/8} + e^{-j\pi/8})} = \frac{e^{-j\pi/8}}{e^{j\pi/8}} = e^{-j\pi/8} \times e^{-j\pi/8} = e^{-j\pi/4}.$$