TP CALCUL INTEGRAL

Exercice 1 :

Soient f et g les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x$ et $g(x) = x\ln x - x$.

1. Calculer g'(x). En déduire les primitives de f sur $]0;+\infty[$.

2. Calculer $\int_1^e f(x)dx$.

Exercice 2

On considère les deux fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ et $g(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

1°/ déterminer une primitive F de f sur [0 ; 1]. En déduire $I_1 = \int_0^1 f(x)dx$.

2°/ On pose $I_2 = \int_0^1 g(x)dx$.

a/ Démontrer que $I_1 + I_2 = \int_0^1 \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_0^1 x\,dx$. Calculer alors : $I_1 + I_2$

b/ En déduire la valeur de I_2.

Exercice 3

le but de l'exercice est le calcul de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx$

Pour cela, on introduit les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0;\pi/2]$;

par : $f(x) = \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}$ et $g(x) = \frac{\cos x}{1+2\sin x}$, ainsi que les intégrales : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx$

1. Montrer que f(x) + g(x) = cos x . En déduire que I + J = 1.
2. a. Calculer la dérivée de la fonction u définie sur l'intervalle $[0;\pi/2]$ par : u(x) = 1+2sinx.
   b. E n déduire une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0;\pi/2]$, puis calculer J.
3. En utilisant les questions précédentes, déterminer la valeur exacte de I.
4. On rappelle que pour tout réel x $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. En déduire le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx$.

Exercice 4 :

On considère les intégrales I et J définies par $I = \int_0^{\pi} x(\cos x)^2 dx$ et $J = \int_0^{\pi} x(\sin x)^2 dx$

Le but de cet exercice est de déterminer les valeurs exactes de ces intégrales sans les calculer.

1) Déterminer la valeur exacte de I + J.

2) On se propose dans cette question de rechercher de la valeur exacte de I – J.

a) Démontrer que $I - J = \int_0^{\pi} x\cos(2x)dx$

b) On appelle f la fonction numérique définie sur l'ensemble R des nombres réels

par : $f(x) = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)$. Démontrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = x\cos(2x)$

c) En déduire la valeur exacte de I – J.

3) A l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs exactes des intégrales I et de J.

Exercice 5 Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

$A = \int_{-1}^{1}(t+1)\cos(\pi t)dt$ $\quad B = \int_0^1 xe^x dx$ $\quad C = \int_1^e \ln t\,dt$ $\quad D = \int_{-3}^{0}(x+1)e^x dx$

$E = \int_1^e x^2 \ln x\,dx$ $\quad F = \int_1^2 (x^2+1)\ln(2x)dx$ $\quad G = \int_0^1 (x^2+3x)e^{-x}dx$ $\quad H = \int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos x\,dx$

$I = \int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$ $\quad J = \int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,dx$ $\quad K = \int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$ $\quad L = \int_0^{\pi/2} x^2\sin x\,dx$

$I_n = \int_0^{\pi}(t-\pi)\sin(nt)dt$ $\quad M = \int_0^1 \arctan x\,dx$ $\quad \int_0^{1/2}\arccos x\,dx$ $\quad \int_0^{1/2}\arcsin x\,dx$

Exercice 6 Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué

$A=\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$, $t=1+\sqrt{x}$ $\quad$ $B=\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x+2}dx$; $t=x+1$ $\quad$ $C=\int_3^4 \frac{t}{\sqrt{t-2}}dt$; $t=x+2$

$D=\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ $\quad t=\ln x$ $\quad$ $E=\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^t}{1+e^{2t}}dt$ $\left(x=e^t\right)$; $\quad$ $F=\int_{-2}^2 \frac{1}{t^2+4}dt$; $t=2x$

$\int_0^{1/2} \sqrt{1-t^2}\,dt$ $\quad t=\sin u$ $\quad$ $H=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$; $u=\arctan x$. $\quad$ $I=\int_0^{1/2} \frac{dt}{1+4t^2}$ $\left(x=2t\right)$

$J=\int_0^1 e^{-x}\ln(1+e^x)dx$ ($t=e^x$) $\quad$ $N=\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$ $\left(t=\sin x\right)$ $\quad$ $L=\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$ $\left(t=\tan x\right)$

Exercice 7

1. Soit $g(x)=\frac{1}{x(x^2-1)}$. Déterminer les réels a, b et c telle que : $g(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}$

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2x}{(x^2-1)^2}$.

   Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

2. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer : $I=\int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln x\,dx$. On donnera le résultat sous la forme $p\ln 2+q\ln 3$ avec p et q rationnels.

Exercice 8

Pour tout entier naturel n, on définit $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x dx$ et $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x dx$.

1. Calculer I_0 et J_0
2. En intégrant par parties I_n puis J_n montrer que $\begin{cases} I_n+nJ_n=1 \\ -nI_n+J_n=e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$.
3. En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de I_n et celle de J_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9

1. Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout u différent de $\frac{1}{2}$, $\frac{u^2-1}{2u-1}=au+b+\frac{c}{2u-1}$.
2. Calculer $\int_{-1}^0 \frac{x^2-1}{2x-1}dx$ .En déduire $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}dx$ ($u=\sin x$).

Exercice 10

On considère les intégrales suivantes :

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}(e^t+e^{-t})\cos nt\,dt \quad ; \quad J=\int_{-\pi}^{\pi}(e^t-e^{-t})\sin nt\,dt \quad \text{et} \quad a_n=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^t+e^{-t})\cos nt\,dt$$

1. démontrer que la fonction f définie par $f(t)=(e^t+e^{-t})\cos nt$ est une fonction paire puis conclure
2. démontrer que la fonction g définie par $g(t)=(e^t-e^{-t})\sin nt$ est une fonction paire, puis conclure
3. En posant $u(t)=e^t-e^{-t}$ et après avoir calculer $u'(t)$, exprimer J en fonction de I à l'aide d'une intégration par parties
4. En posant $u(t)=e^t+e^{-t}$ et après avoir calculer $u'(t)$ à l'aide d'une intégration par parties en déduire la valeur de I
5. Dans le cas où n est entier naturel, démontrer que : $a_n=\frac{\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)(-1)^n}{2\pi(n^2+1)}$

   En déduire la valeur de a_0 , a_1, a_2 et a_3.

Exercice 11

1- Calculer les intégrales suivantes de la manière la plus simple possible

a) $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos 2x \, dx$ b) $F_n = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2nx \, dx$ (n est un entier naturel)

2- Au moyen d'une intégration par parties , calculer les intégrales suivantes :

a) $I_n = \int_0^{\pi/2} x \cos 2nx \, dx$ ($n \in \mathbb{N}$). b) $J_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin 2nx \, dx$ (n est un entier naturel)

(on pourra utiliser la formule $\cos n\pi = (-1)^n$)

3-Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales :

$a_n = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(nx) dx$ et $b_n = \int_0^{\pi/2} x\cos(nx) dx$.

a) Montrer que $a_n = \frac{-1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$.

b)A l'aide d'une intégration par parties , montrer que $b_n = \frac{\pi}{2n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2}$

c) Déterminer $a_1 ; a_2 \; et \; a_3$, puis $b_1 ; b_2 \; et \; b_3$

Exercice 12

A) Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique de période 2π telle que : $f(-\pi) = 0$ et $f(x) = x$ si $-\pi < x < \pi$

1. Construire la courbe C sur l'intervalle $[-3\pi;3\pi]$.

2. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\, dx$ et $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx$ (n est un entier naturel)

B) Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, impaire et périodique de période 4 telle que $\begin{cases} f(x) = x \; si \; 0 \le x \le 1 \\ f(x) = 2 - x \; si \; 1 \le x \le 2 \end{cases}$

1°. Représenter la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[-6; 6]$

2°. on considère la fonction g définie par $g(x) = f(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, montrer que g , impaire et périodique

de période 4 .puis calculer $a_n = \int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx$; puis $b_n = \int_{-2}^{2} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx$

Calculer ensuite b_n pour n = 1 ; 2 ; 3 ; 4

3°. Calculer la valeur efficace de f sur une période

Exercice 13

1-Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales : $I_n = \int_0^{\pi} t\sin(nt)dt$ et $J_n = \int_0^{\pi} t^2\cos(nt)dt$.

Calculer I_n et J_n

2- on considère les intégrales : $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\sin t \, dt$ et $a_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\sin t\cos(2t)dt$.

a)Calculer a_0 .

b) Montrer que $a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} t(\sin 3t - \sin t)dt$. En déduire que $a_1 = -\frac{20}{9\pi}$.

c) On pose $a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\sin t\cos(2nt)dt$. Montrer que $a_n = \frac{2}{\pi}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n-1)^2}\right]$

Exercice 14

On considère les intégrales suivantes :

$b_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)\sin(2t)\,dt$; $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)\sin(nt)\,dt$ et $V_{eff} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)^2\,dt$

1. Vérifier que $(1-\cos 2t)^2 = \frac{3}{2} - 2\cos 2t + \frac{1}{2}\cos 4t$.

2. Calculer b_2 ; b_n et V_{eff}

3. Dans le cas où n est entier naturel impair,

démontrer que : $b_n = -\dfrac{16}{\pi n(n^2-4)}$. En déduire la valeur de b_1 et b_3

Exercice 15:

On pose : $C_n = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t(\pi - t)e^{-2int}\,dt$,(n est un entier naturel)

1. Calculer C_0
2. Calculer C_n pour tout $n \neq 0$ à l'aide de deux intégrations par parties successives
3. En déduire la valeur de $\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t(\pi - t)\cos(2nt)\,dt$.
4. calculer $b_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t(\pi - t)\sin(nt)\,dt$

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur R, de période 2π , paire , telle que : $\begin{cases} f(t) = -t + \dfrac{\pi}{2} & si\ t \in [0\,;\dfrac{\pi}{2}] \\ f(t) = 0 & si\ t \in [\dfrac{\pi}{2};\pi] \end{cases}$.

1. Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi\,;4\pi\,]$
2. Calculer les intégrales suivants : $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(-t + \dfrac{\pi}{2}\right)dt$ $\quad a_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(t)\cos(nt)\,dt$

   et $b_n = \int_0^{2} f(t)\sin(nt)\,dt$.
3. Calculer la valeur moyenne et la valeur efficace de f sur une période .

$\cos(2n-1)\pi = \cos(2n+1)\pi = -1$ et	$\sin(2n-1)\dfrac{\pi}{2} = (-1)^{n+1}$;	$\sin(2n+1)\dfrac{\pi}{2} = (-1)^n$
$\sin(2n-1)\pi = \sin(2n+1)\pi = 0$ et	$\cos(2n-1)\dfrac{\pi}{2} = \cos(2n+1)\dfrac{\pi}{2} = 0$;	$\cos 2n\pi = 1$
$\cos(n\pi) = (-1)^n$; $\sin n\pi = 0$ et	$\cos(n-1)\pi = \cos(n+1)\pi = (-1)^{n+1}$	

1°. Calculer : $I = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t(\pi + t)\,dt$; $J = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\,dt$ conclure .

Calculer : $A_1 = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(nt)\,dt$ et $A_2 = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)\,dt$

En déduire que : $I_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t(t+\pi)\cos(nt)\,dt = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)\,dt = \dfrac{4(-1)^n}{n^2}$

2°. Calculer $B_1 = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\sin(nt)\,dt$ et $B_2 = \int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt$

En déduire que : $J_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t(t+\pi)\sin(nt)\,dt = 2\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt = \dfrac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 17

Soit la fonction f de la variable réelle t définie par : $\begin{cases} f(t) = t - 1 \ pour\ t \in [0;2] \\ f\ est\ paire \\ f\ est\ périodique\ de\ période\ 4 \end{cases}$

1° Représenter graphiquement f sur [– 2, 6[.

2° Calculer f_e la valeur efficace de f.

4° soit $a_n = \dfrac{1}{2}\int_{-2}^{2}(t-1)\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}t\right)dt$ et $b_n = \dfrac{1}{2}\int_{-2}^{2}(t-1)\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}t\right)dt$

a) Donner la valeur de b_n .

b) Calculer a_0 et, pour $n \geq 1$, a_n (Préciser les valeurs de a_{2p} et de a_{2p+1}).

Corrigé

Exercice n°5

1) $I = \int_0^{\pi/2} x \sin x\, dx = \int_0^{\pi/2} u(x)v'(x)\, dx$ où $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$ et $v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$I = \int_0^{\pi/2} u(x)v'(x)\, dx = [u(x)v(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'(x)v(x) = [-x\cos x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos x dx = 0 + [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$

2) $J = \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx = \int_0^{\pi/2} u(x)v'(x)\, dx$ où $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$J = [u(x)v(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'(x)v(x) = [x^2 \cos x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x(-\cos x)dx = 0 + \int_0^{\pi/2} 2x\cos x dx$

On calcule l'intégrale $J = \int_0^{\pi/2} 2x \cos x\, dx$ en effectuant une deuxième intégration par parties :

$J = \int_0^{\pi/2} 2x\cos x\, dx = \int_0^{\pi/2} u(x)v'(x)\, dx$ où $u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = 2$ et $v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$J = [u(x)v(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'(x)v(x) = [2x\sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2\cos x dx = \pi - 0 - 2[\sin x]_0^{\pi/2} = \pi - 2$

3) $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx = \int_0^{\pi} u(x)v'(x)\, dx$ où $u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = 2e^x$ et $v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$I = [u(x)v(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x)v(x) = [-e^x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x(-\cos x)dx = e^{\pi} + 1 + \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$

On calcule $J = \int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx$ en effectuant une deuxième intégration par parties :

$I = \int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx = \int_0^{\pi} u(x)v'(x)\, dx$ où $u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = e^x$ et $v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$J = [u(x)v(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x)v(x) = [e^x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx = 0 - \int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx$

On aboutit donc à l'équation $I = e^{\pi} + 1 - I$ c'est-à-dire $2I = e^{\pi} + 1$ et on conclut ainsi que $I = \frac{e^{\pi} + 1}{2}$

4) $I = \int_0^{\pi} e^{2x} \cos x\, dx = \int_0^{\pi} u(x)v'(x)\, dx$ où $u(x) = e^{2x} \Rightarrow u'(x) = 2e^{2x}$ et $v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x$ sont continument dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$I = [u(x)v(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x)v(x) = [e^{2x} \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2e^{2x} \sin x dx = 0 - \int_0^{\pi} 2e^{2x} \sin x dx$

On calcule $J = \int_0^{\pi} 2e^{2x} \sin x\, dx$ en effectuant une deuxième intégration par parties :

$J = \int_0^{\pi} 2e^{2x} \sin x\, dx = \int_0^{\pi} u(x)v'(x)\, dx$ où $u(x) = 2e^{2x} \Rightarrow u'(x) = 4e^{2x}$ et $v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$J = [u(x)v(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x)v(x) = [-2e^{2x} \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 4e^{2x}(-\cos x)dx = 2e^{2\pi} + 4\int_0^{\pi} 4e^{2x} \cos x dx = 2e^{2\pi} + 4I$

On aboutit donc à l'équation $I=-2e^{2\pi}-2-4I \Leftrightarrow 5I=2e^{2\pi}-2 \Leftrightarrow I=\frac{-2}{5}\left(e^{2\pi}+1\right)$

5. $\int_0^{1/2}\arcsin x\,dx$: $\begin{array}{lll} f(x)=\arcsin x & \rightarrow & f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g'(x)=1 & \rightarrow & g(x)=x \end{array}$ d'où

$$I=x\arcsin x-\int_0^{1/2}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\arcsin x-\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{1/2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\left[x\arcsin x+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right]_0^{1/2}.$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin(1/2)+\frac{\sqrt{3}}{4}-1=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}-2}{4}$$

Une primitive pour Arccosinus.

Pour tout réel x de cet intervalle, on peut écrire que : $\arccos x=\arccos x\times 1$.

Les deux fonctions f et g requises pour une intégration par parties sont donc définies par :

$f(x)=\arccos x$. f est dérivable sur [-1 ; 1] et $f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$. $g'(x)=1$. $g(x)=x$.

$$I=x\arccos x+\int_0^{1/2}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\arcsin x+(-1)\int_0^{1/2}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx=\left[x\arccos x-\sqrt{1-x^2}\right]_0^{1/2}$$

$$=\frac{1}{2}\arccos(1/2)-\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Une primitive pour Arctangente.

$f(x)=\arctan x$. f est dérivable sur R et $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. $g'(x)=1$ et $g(x)=x$.

Une primitive de $x\times\frac{1}{1+x^2}$ est donc $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. $M=\int_0^1\arctan x\,dx=\left[x\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

Exercice 6

$\int_0^{1/2}\sqrt{1-t^2}dt$ on pose : $t=\sin u \Leftrightarrow u=\arcsin t$. Il s'agit d'écrire une nouvelle intégrale du type $\int_a^b f(u)du$.

– Le changement de variable provoque un changement de bornes de l'intégrale : la variable t varie de 0 à 2 , donc la variable u varie de $0=\arcsin 0$ à $\pi/6=\arcsin(1/2)$.

– On calcule la dérivée de u par rapport à t à l'aide de la notation différentielle : $\frac{du}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

A partir de cette égalité, on exprime dt en fonction de u et du.

$dt=\sqrt{1-t^2}du=\sqrt{1-sin^2u}du=\sqrt{\cos^2 u}du=|\cos u|du$ .Puisque $0\le u\le\frac{\pi}{6}$, $\cos u\ge 0$, donc $dt=\cos u du$.

On exprime la fonction à intégrer en fonction de u : $\sqrt{1-t^2}=\sqrt{1-sin^2u}=\sqrt{\cos^2 u}=|\cos u|=\cos u$

D'où $\int_0^{1/2}\sqrt{1-t^2}dt=\int_0^{\pi/6}\sqrt{1-sin^2u}\cos u du=\int_0^{\pi/6}\cos^2 u\,du=\int_0^{\pi/6}\frac{1+\cos 2u}{2}du=\left[\frac{u}{2}+\frac{1}{4}\sin 2u\right]_0^{\pi/6}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$

correction7

1. $g(x)=\frac{1}{x(x^2-1)}$.

a. $g(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}=\frac{a(x+1)(x-1)+bx(x-1)+cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{(a+b+c)x^2+(c-b)x-a}{x(x+1)(x-1)}$ d'où on tire par

identification : $\begin{cases}a+b+c=0\\ c-b=0\\ -a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+c=1\\ c-b=0\\ a=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1/2\\ c=1/2\\ a=-1\end{cases}$. On a donc $g(x)=\frac{-1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}$.

b. $\int g(x)dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| \Rightarrow G(x) = -\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1)$ (ne pas oublier les valeurs absolues au départ, on les supprime par la suite car on est sur $]1\,;+\infty[$).

2. Pour trouver une primitive de $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$, il suffit d'utiliser $\int u'u^n dx = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$ avec $u = x^2-1$ et

$n = -2$: $\int f(x)dx = \frac{1}{-2+1}(x^2-1)^{-2+1} = \frac{-1}{x^2-1}$.

3. il faut intégrer par parties : $u = \ln x, v' = \frac{2x}{(x^2-1)^2} \Rightarrow u' = \frac{1}{x}, v = \frac{-1}{x^2-1}$, ce qui donne

$$I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln x\,dx = \left[\frac{-\ln x}{x^2-1}\right]_2^3 + \int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)}dx = -\frac{1}{8}\ln 3 + \frac{1}{3}\ln 2 + \left(-\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 4 + \frac{1}{2}\ln 2\right) - \left(-\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 1\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\ln 3 + \frac{1}{3}\ln 2 - \ln 3 + \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 + \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3 = -\frac{13}{8}\ln 3 + \frac{17}{6}\ln 2.$$

Correction8

1. $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

2. On pose par exemple $\begin{cases} u = e^{-nx} \\ v' = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -ne^{-nx} \\ v = -\cos x \end{cases}$ d'où

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x dx = \left[-e^{-nx}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} ne^{-nx}\cos x dx = 1 - nJ_n \Leftrightarrow I_n + nJ_n = 1.$$

On procède de même pour la deuxième intégrale en posant . $\begin{cases} u = e^{-nx} \\ v' = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -ne^{-nx} \\ v = \sin x \end{cases}$

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x dx = \left[e^{-nx}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} ne^{-nx}\sin x dx = e^{-n\frac{\pi}{2}} + nI_n$$

3. Il ne reste plus qu'à résoudre le système linéaire: $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$. En multipliant la première ligne par n et en l'ajoutant à la deuxième on obtient : $\begin{cases} nI_n + n^2J_n = n \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases} \Rightarrow (1+n^2)J_n = n + e^{-n\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow J_n = \frac{n + e^{-n\frac{\pi}{2}}}{1+n^2}$.

En multipliant la deuxième ligne par $-n$ et en l'ajoutant à la première, on obtient :

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ n^2I_n - nJ_n = -ne^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases} \Rightarrow (1+n^2)I_n = 1 - e^{-n\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow I_n = \frac{1 - ne^{-n\frac{\pi}{2}}}{1+n^2}.$$

4. L'exponentielle l'emporte toujours, donc $\lim_{n\to+\infty} ne^{-\frac{n\pi}{2}} = 0$, car $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{n\pi}{2}} = 0$; de plus $\lim_{n\to+\infty}(1+n^2) = \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$. Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ (limite d'un quotient)

$$J_n = \frac{1 + \frac{1}{n}e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n + 1/n} = \left(1 + \frac{1}{n}e^{-n\frac{\pi}{2}}\right) \times \frac{1}{n+1/n}.\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{2}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{n\pi}{2}}e^{\ln\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{n\pi}{2}+\ln\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{n\pi}{2}-\ln n} = \lim_{n\to+\infty} e^{-(\frac{n\pi}{2}+\ln n)}$$

$\lim_{n\to+\infty}\left(n\frac{\pi}{2} + \ln n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \lim_{n\to+\infty}(\ln n) = +\infty$, on posant $x = n\frac{\pi}{2} + \ln n$, on a donc $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, et en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{2}} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{2}}\right) = 1$, puis $\lim_{n\to+\infty} n + \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} n + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = +\infty + 0 = +\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1/n}=0$, en appliquant le théorème (limite d'un produit), on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}J_n=0$

en peut aussi écrire $\lim\limits_{n\to+\infty}J_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n^2}=0$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-n\frac{\pi}{2}}=0$)

Correction 9

$$\frac{u^2-1}{2u-1}=au+b+\frac{c}{2u-1}=\frac{2au^2-au+2bu-b+c}{2u-1}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=1\\2b-a=0\\c-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1/2\\b=1/4\\c=-3/4\end{cases}\Rightarrow f(u)=\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}-\frac{3/4}{2u-1}.$$

2. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{x^2-1}{2x-1}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\frac{2}{2x-1}dx=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}\ln|2x-1|\right]_{-1}^{0}=0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\ln|-2-1|\right)=\frac{3}{8}\ln 3$

3. La fonction à intégrer ressemble un peu à la précédente en prenant $u=\sin x$:

$f(u)=\dfrac{u^2-1}{2u-1}\Rightarrow f(\sin x)=\dfrac{\sin^2x-1}{2\sin x-1}=\dfrac{\cos^2x}{1-2\sin x}$; pour pouvoir intégrer $f(\sin x)$, il faut que ce soit sous la forme $(\sin x)'F'(\sin x)=(\cos x)F'(\sin x)$ où F est une primitive de f. Or on a à intégrer

$\dfrac{\cos^3x}{1-2\sin x}=\cos x\left[\dfrac{\cos^2x}{1-2\sin x}\right]=\cos x\left[\dfrac{1-\sin^2x}{1-2\sin x}\right]=\cos x\left[\dfrac{\sin^2x-1}{2\sin x-1}\right]$ donc tout va bien.

On a finalement $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^3x}{1-2\sin x}dx=\left[\frac{1}{4}\sin^2x+\frac{1}{4}\sin x-\frac{3}{8}\ln|2\sin x-1|\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{3}{8}\ln 3$.

4. $\displaystyle\int\cos^3x\,dx=\int\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3dx=\frac{1}{8}\int e^{3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-3ix}dx=\frac{1}{8}\int e^{3ix}+e^{-3ix}+3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)dx$,

soit $\displaystyle\frac{1}{8}\int 2\cos 3x+6\cos x\,dx=-\frac{1}{12}\sin 3x-\frac{3}{4}\sin x+C$.

Exercice 10.

1. $f(-t)=(e^{-t}+e^{+t})\cos-nt=(e^t+e^{-t})\cos nt=f(t)$ et $g(-t)=(e^{-t}-e^t)\sin(-nt)=(e^{-t}-e^t)\sin(-nt)=(e^t-e^{-t})\sin(nt)=g(t)$. par conséquent les fonctions f et g sont des fonctions paires et admettent l'axe des ordonnées comme axe de symétrie .

2. On pose $J=\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^t-e^{-t}\right)\sin nt\,dt$. Intégration par partie en posant $u'=e^t-e^{-t}$ primitive $u=e^t+e^{-t}$.

$v=\sin nt$; dérivée $v'=n\cos nt$: $J=\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^t-e^{-t}\right)\sin nt\,dt=\left[\left(e^t+e^{-t}\right)\sin nt\right]_{-\pi}^{\pi}-n\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^t+e^{-t}\right)\cos nt\,dt$

Or $\left[\left(e^t+e^{-t}\right)\sin nt\right]_{-\pi}^{\pi}=\left(e^{\pi}+e^{-\pi}\right)\sin n\pi-\left(e^{-\pi}+e^{+\pi}\right)\sin(-n\pi)=0$, Donc $J=-nI$

Intégration par partie en posant $u'=e^t+e^{-t}$ primitive $u=e^t-e^{-t}$ $v=\cos nt$; dérivée $v'=-n\sin nt$

$I=\int_{-\pi}^{\pi}(e^t+e^{-t})\cos nt\,dt=\left[\left(e^t-e^{-t}\right)\cos nt\right]_{-\pi}^{\pi}-(-n)\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^t-e^{-t}\right)\sin nt=\left[\left(e^t-e^{-t}\right)\cos nt\right]_{-\pi}^{\pi}+n\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^t-e^{-t}\right)\sin nt$

$\left[\left(e^t-e^{-t}\right)\cos nt\right]_{-\pi}^{\pi}=2\left(\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)\cos n\pi\right)=2\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)(-1)^n$, donc on obtient :

$I=\int_{-\pi}^{\pi}(e^t+e^{-t})\cos nt\,dt=2\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)(-1)^n+n\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^t-e^{-t}\right)\sin nt$, donc $I=2\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)(-1)^n+nJ$.

par conséquent : $I=2\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)(-1)^n-n^2I$, d'où $(n^2+1)I=2\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)(-1)^n$.

C'est -à-dire $I=\dfrac{2\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)(-1)^n}{(n^2+1)}$ et $I=\dfrac{2n\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)(-1)^n}{(n^2+1)}$

Calcul de a_0 : $a_0=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(e^t+e^{-t})dt=\frac{1}{4\pi}\left[e^t-e^{-t}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}$

Calcul de a_n : $a_n = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^t + e^{-t})\cos nt\,dt$. On pose : $I = \int_{-\pi}^{\pi}(e^t + e^{-t})\cos nt\,dt$

et en multipliant I par 1/ (4π) on trouve a_n. et on a : $a_n = \frac{2\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)(-1)^n}{4\pi(n^2+1)} = \frac{\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)(-1)^n}{2\pi(n^2+1)}$

$a_1 = -\frac{\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)}{4\pi}$; $a_2 = \frac{\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)}{10\pi}$; $a_3 = -\frac{\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)}{20\pi}$.

Exercice 11

1°/ a) $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\cos 2x\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(\cos 3x + \cos x\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(\sin 3x) + \sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(\sin 3x) + \sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin 3\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{3}\sin\left(-3\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$$I = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3} + 1 - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \left(\frac{-2}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\times\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

b) $F_n = \int_0^{\pi/2}\sin x\cos 2nx\,dx$, ($n \in \mathbb{N}$). on sait que : $\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\sin((m+n)x + \sin(m-n)x\right]$

$$F_n = \int_0^{\pi/2}\sin x\cos 2nx\,dx = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(\sin(1+2n)x + \sin(1-2n)x\right)dx = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(\sin(1+2n)x - \sin(2n-1)x\right)dx$$

$$F_n = \int_0^{\pi/2}\sin x\cos 2nx\,dx = \frac{1}{2}\left[\left(\left(\frac{-1}{1+2n}\right)\cos(1+2n)x + \left(\frac{1}{2n-1}\right)\cos(2n-1)x\right)\right]_0^{\pi/2}$$

$$F_n = \frac{1}{2}\left[\left(\left(\frac{-1}{1+2n}\right)\cos(1+2n)\frac{\pi}{2} + \left(\frac{1}{2n-1}\right)\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}\right) - \left(\left(\frac{-1}{1+2n}\right)\cos(1+2n)0 + \left(\frac{1}{2n-1}\right)\cos(2n-1)0\right)\right]$$

$$\cos(1+2n)\frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos n\pi - sin\frac{\pi}{2}\sin n\pi = 0 .$$

$$\cos(2n-1)\frac{\pi}{2} = \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos n\pi\cos\frac{\pi}{2} + \sin n\pi\sin\frac{\pi}{2} = 0$$

$$F_n = \frac{1}{2}\left[-\left(\left(\frac{-1}{1+2n}\right) + \left(\frac{1}{2n-1}\right)\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2}\frac{2n-1-(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2}\frac{-2}{4n^2-1} = \frac{1}{1-4n^2} .$$

2°/ a) $I_n = \int_0^{\pi/2}x\cos 2nx\,dx$ (n entier naturel), on pose $u(x) = x$ $u'(x) = 1$; $v'(x) = \cos 2nx$ $v(x) = \frac{1}{2n}\sin(2nx)$

$$I_n = \int_0^{\pi/2}x\cos 2nx\,dx = \left[\frac{x}{2n}\sin(2nx)\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2}\sin 2nx\,dx = \left[\frac{x}{2n}\sin(2nx)\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{1}{4n^2}\cos 2nx\right]_0^{\pi/2} .$$

$$I_n = \int_0^{\pi/2}x\cos 2nx\,dx = \left[\frac{x}{2n}\sin(2nx)\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{1}{4n^2}\cos 2nx\right]_0^{\pi/2}$$

$$I_n = \frac{\pi}{4n}\sin(2n\frac{\pi}{2}) - 0 + \frac{1}{4n^2}\cos 2n\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4n^2}\cos 0 = \frac{\cos n\pi}{4n^2} - \frac{1}{4n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{4n^2}$$

b) $J_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 2nx\,dx$ (n entier naturel)on pose $u(x) = x$ $u'(x) = 1$; $v'(x) = \sin 2nx$ $v(x) = -\frac{1}{2n}\cos(2nx)$

$$J_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}x\sin(2nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{x}{2n}\cos(2nx)\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2}\cos(2nx)\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{x}{2n}\cos(2nx)\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{1}{4n^2}\sin(2nx)\right]_0^{\pi/2}\right)$$

$$J_n = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{4n}\cos n\pi + 0\right) + \frac{1}{4n^2}\sin(n\pi) - \frac{1}{4n^2}\sin(0) = -\frac{1}{2n} + 0 = \frac{-1}{2n}$$

3- $a_n = \int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nx)dx = \left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{n}\sin\pi - \frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$.

$a_1 = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$; $a_2 = -\frac{1}{2}\sin\pi = 0$ et $a_3 = -\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{3}$

$b_n = \int_0^{\pi/2} x\cos 2nx\,dx$ (n entier naturel) , on pose $u(x) = x$ $u'(x) = 1$; $v'(x) = \cos nx$ $v(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$

$$b_n = \int_0^{\pi/2} x\cos nx\,dx = \left[\frac{x}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\sin nx\,dx = \left[\frac{x}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi/2}$$

$$b_n = \int_0^{\pi/2} x\cos nx\,dx = \frac{\pi}{2n}\sin(\frac{n\pi}{2}) - 0 + \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\cos 0 = \frac{\pi}{2n}\sin(\frac{n\pi}{2}) + \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}$$

D'où : $b_n = \frac{\pi}{2n}\sin(\frac{n\pi}{2}) + \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}$. $b_1 = \frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}) + \cos\frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$

$b_2 = \frac{\pi}{4}\sin(\pi) + \frac{1}{4}\cos\pi - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$; $b_3 = \frac{\pi}{6}\sin(\frac{3\pi}{2}) + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{9} = -\frac{\pi}{6} - \frac{1}{9}$.

On calcule $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t(\pi - t)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{t(\pi-t)\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\pi - 2t)\cos(nt)\,dt\right)$

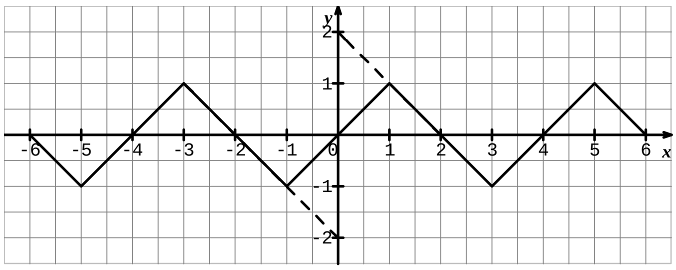
$$= b_n = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{(\pi-2t)\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt\right) = \frac{4}{\pi}\left[-\frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi n^2}\left((-1)^{n+1} + 1\right)$$

Donc pour tout (n entier naturel). $b_{2n} = 0$ et $b_{2n+1} = \frac{8}{\pi(2n+1)^2}$.

Exercice 12

a) $\begin{cases} f(x) = x \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ f(x) = 2 - x \text{ si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$ Sur l'intervalle [0,2],

on obtient le graphique suivant:



Puisque f est impaire, son graphe est symétrique par rapport à l'origine O. On obtient donc le graphique suivant sur [-2,2].

La longueur de cet intervalle est 4 et puisque la période de f est 4, nous avons dessiné le graphe de f sur une période. Pour obtenir le graphe complet, il suffit de reproduire cette portion indéfiniment.

b) calcul de la première intégrale

Pour un calcul efficace, nous utilisons les propriétés de la fonction. Pour plus de facilité dans l'écriture, posons: $g(x) = f(x)\cos(\pi x/2)$. Cette fonction est périodique de période 4 car

$g(x+4) = f(x+4)\cos(\pi(x+4)/2) = f(x)\cos(\pi x/2 + 2\pi) = f(x)\cos(\pi x/2) = g(x)$ .L'intégrale définie d'une fonction périodique sur un intervalle dont la longueur est la période de la fonction (ce qui est le cas ici), est constante quel que soit l'intervalle choisi. On a donc: $\int_0^4 f(x)\cos(\pi x/2) = \int_{-2}^{2} f(x)\cos(\pi x/2)$

la fonction g est impaire car $g(-x) = f(-x)\cos(-\pi x/2) = -f(x)\cos(\pi x/2)$. (car f est impaire et le cosinus de deux angles opposés est égal). Par conséquent, vu l'interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction définie et continue sur un intervalle, on obtient: $\int_0^4 f(x)\cos(\pi x/2) = \int_{-2}^{2} f(x)\cos(\pi x/2) = 0$

Exercice 13

1.a. On pose $u(t) = t \rightarrow u'(t) = 1$ $v'(t) = \sin nt \rightarrow v(t) = -\frac{1}{n}\cos nt$

$$I_n = \int_0^{\pi} t\sin nt\,dt = \left[-\frac{t\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nt\,dt = -\frac{1}{n}[\pi\times\cos n\pi - 0\times\cos 0] + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin nt\right]_0^{\pi}$$

$$I_n = -\frac{(-1)^n\pi}{n} + \frac{1}{n^2}[\sin n\pi - \sin 0] = -\frac{(-1)^n\pi}{n} + \frac{1}{n^2}[0-0] = -\frac{(-1)^n\pi}{n} \quad donc \ \underline{I_n = -\frac{(-1)^n\pi}{n}}$$

b. On pose $u(t) = t^2 \rightarrow u'(t) = 2t$ $v'(t) = \cos nt \rightarrow v(t) = \frac{1}{n}\sin nt$

$$J_n=\int_0^{\pi} t^2\cos nt\,dt=\left[\frac{t^2\sin nt}{n}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}2t\sin nt\,dt=\frac{1}{n}\left[\pi^2\times\sin n\pi-0\times\sin 0\right]-\frac{2}{n}I_n=-\frac{2}{n}I_n$$

$$J_n=\int_0^{\pi} t^2\cos nt\,dt=-\frac{2}{n}I_n=-\frac{2}{n}\times\left(-\frac{(-1)^n\pi}{n}\right)=\frac{2(-1)^n\pi}{n^2}\quad donc\ \ \underline{J_n=\frac{2(-1)^n\pi}{n^2}}$$

2.a $T=\pi$ et $a_0=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f(t)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}t\sin t dt$, on effectue une intégration par partie

avec : $\begin{matrix} u(t)=t & v'(t)=\sin t\\ u'(t)=1 & v(t)=-\cos t\end{matrix}$, d'où $a_0=\frac{2}{\pi}\left(\left[-t\cos t\right]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\cos t dt\right)=\frac{2}{\pi}\left[\sin t\right]_0^{\pi/2}=\frac{2}{\pi}$.

b et c . $a_n=\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(t)\cos(2nt)dt=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f(t)\cos(2nt)dt=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}t\sin t\cos(2nt)dt$

$$a_1=\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(t)\cos(2t)dt=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f(t)\cos(2t)dt=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}t\sin t\cos(2t)dt$$

On linéarise $\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$, donc $\sin(t)\cos(2t)=\frac{1}{2}\left[\sin 3t+\sin(-t)\right]=\frac{1}{2}\left[\sin 3t-\sin(t)\right]$,

d'où $a_1=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}t\sin t\cos(2t)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}t\left[\sin 3t-\sin(t)\right]dt$, une nouvelle intégration par partie donne :

$u(t)=t \qquad v'(t)=\sin 3t-\sin t \qquad u'(t)=1 \qquad v(t)=-\frac{1}{3}\cos 3t+\cos t$ puis

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}t\left[\sin 3t-\sin(t)\right]dt=\frac{2}{\pi}\left(\left[t\left(-\frac{1}{3}\cos 3t+\cos t\right)\right]_0^{\pi/2}-\left[-\frac{1}{9}\sin 3t+\sin t\right]_0^{\pi/2}\right)=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{9}+1\right)=-\frac{20}{9\pi}.$$

d. pour tout $n\geq 1$, on a : $a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}t\sin t\cos(2nt)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}t\left[\sin(1+2n)t-\sin(2n-1)t)\right]dt$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}t\left[\sin(1+2n)t+\sin(1-2n)t\right]dt=\frac{2}{\pi}\left(\left[t\left(-\frac{1}{1+2n}\cos(1+2n)t+\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)t\right)\right]_0^{\pi/2}\right)$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{1+2n}\cos(1+2n)t+\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)t\right)dt=0+\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{(1+2n)^2}\sin(1+2n)t+\frac{1}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)t\right]_0^{\pi/2}$$

Or $\cos(1+2n)\pi/2=\cos(1-2n)\pi/2=0$ et

$\sin(1+2n)\pi/2=\sin(\pi/2+n\pi)=\sin(\pi/2)\cos n\pi+\cos(\pi/2)\sin n\pi=\cos n\pi=(-1)^n$;

$\sin(1-2n)\pi/2=\sin(\pi/2-n\pi)=\sin\pi/2\cos n\pi-\cos\pi/2\sin n\pi=\cos n\pi=(-1)^n$.

donc $a_n=\frac{2(-1)^n}{\pi}\left[\frac{1}{(1+2n)^2}+\frac{1}{(2n-1)^2}\right]$. $\quad a_2=\frac{2(-1)^2}{\pi}\left[\frac{1}{(1+4)^2}+\frac{1}{(4-1)^2}\right]=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{9}\right)=\frac{68}{225\pi}$.

<u>Exercice 14</u> $\quad(1-\cos 2t)^2=1-2\cos 2t+\cos^2 2t=1-2\cos 2t+\left(\frac{1+\cos 4t}{2}\right)=\frac{3}{2}-2\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 4t$

$$b_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)\sin(2t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2t)\,dt-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2t\sin(2t)\,dt=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin(4t)\,dt$$

$$b_2=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\pi+\frac{1}{2}\cos 0\right]-\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos 4\pi+\frac{1}{2}\cos 0\right]=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]-\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]=0$$

$$V_{eff}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)^2\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 4t\right)dt=\frac{1}{\pi}\left[\frac{3}{2}t-\sin 2t+\frac{1}{8}\sin 4t\right]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\times\frac{3\pi}{2}=\frac{3}{2}$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)\sin(nt)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2t\sin(nt)\,dt\quad(1)$$

- $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-1}{n}\cos nt\right]_0^{\pi}=\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$

- $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2t\sin(nt)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(\sin(n+2)t+\sin(n-2)t\right)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n+2)t+\sin(n-2)t\right)dt$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n+2)t+\sin(n-2)t\right)dt=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{(n+2)}\cos(n+2)t-\frac{1}{(n-2)}\cos(n-2)t\right]_0^{\pi}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2t\sin(nt)\,dt=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{(n+2)}\cos(n+2)\pi-\frac{1}{(n-2)}\cos(n-2)\pi+\frac{1}{(n+2)}\cos 0+\frac{1}{(n-2)}\cos 0\right]$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2t\sin(nt)\,dt=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{(-1)^n}{(n+2)}-\frac{(-1)^n}{(n-2)}+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n-2)}\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^n}{(n+2)}+\frac{1-(-1)^n}{(n-2)}\right]$$

En remplaçant chaque intégrale par sa valeur on obtient : $b_n=\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)-\frac{1}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^n}{(n+2)}+\frac{1-(-1)^n}{(n-2)}\right]$

- si n est impair on a : $b_n=\frac{2}{n\pi}(1+1)-\frac{1}{\pi}\left[\frac{1+1}{(n+2)}+\frac{1+1}{(n-2)}\right]=\frac{4}{n\pi}-\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n-2)}\right]$

$$b_n=\frac{4}{n\pi}-\frac{2}{\pi}\left[\frac{n-2+n+2}{(n+2)(n-2)}\right]=\frac{4}{n\pi}-\frac{4n}{\pi(n^2-4)}=\frac{4(n^2-4)-4n^2}{\pi n(n^2-4)}=\frac{-16}{\pi n(n^2-4)}$$

d'où : $b_n=\frac{-16}{\pi n(n^2-4)}$: $b_1=\frac{16}{3\pi}$ et $b_3=\frac{-16}{15\pi}$.

Exercice 15

1. $J_n=\int_0^{\pi}t(\pi-t)\cos(2nt)\,dt=\pi\int_0^{\pi}t\cos(2nt)\,dt-\int_0^{\pi}t^2\cos(2nt)\,dt=\pi I+J$ par linéarité des intégrales

On pose $u(t)=t\to u'(t)=1$ $v'(t)=\cos 2nt\to v(t)=\frac{1}{2n}\sin 2nt$

$$I=\int_0^{\pi}t\cos 2nt\,dt=\left[\frac{t\sin 2nt}{2n}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\sin 2nt\,dt=\frac{1}{2n}\left[2\pi\times\sin 2n\pi-0\times\sin 0\right]-\frac{1}{2n}\left[-\frac{1}{2n}\cos 2nt\right]_0^{\pi}$$

$$I=0+\frac{1}{4n^2}\left[\cos 2n\pi-\cos 0\right]=\frac{1}{4n^2}\left[1-1\right]=0\quad donc\ \underline{I=0}$$

On pose $u(t)=t^2\to u'(t)=2t$ $v'(t)=\cos 2nt\to v(t)=\frac{1}{2n}\sin nt$

$$J=\int_0^{\pi}t^2\cos 2nt\,dt=\left[\frac{t^2\sin 2nt}{2n}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{2n}\int_0^{\pi}2t\sin 2nt\,dt=\frac{1}{2n}\left[4\pi^2\times\sin 2n\pi-0\times\sin 0\right]-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}t\sin 2nt\,dt=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}t\sin 2nt\,dt$$

On pose $u(t)=t\to u'(t)=1$ $v'(t)=\sin 2nt\to v(t)=-\frac{1}{2n}\cos 2nt$

$$\int_0^{\pi}t\sin 2nt\,dt=\left[-\frac{t\cos 2nt}{2n}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\cos 2nt\,dt=-\frac{1}{2n}\left[\pi\times\cos 2n\pi-0\times\cos 0\right]+\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{n}\sin 2nt\right]_0^{\pi}$$ et on a :

$$=-\frac{\pi}{2n}+\frac{1}{4n^2}\left[\sin 2n\pi-\sin 0\right]=-\frac{\pi}{2n}+\frac{1}{n^2}\left[0-0\right]=-\frac{\pi}{2n}$$

$J=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}t\sin 2nt\,dt=\frac{1}{n}\times\frac{-\pi}{2n}=-\frac{\pi}{2n^2}$ et $J_n=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}t\sin 2nt\,dt=\frac{1}{n}\times\frac{-\pi}{2n}=-\frac{\pi}{2n^2}$.

Exercice 16

$$C_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t(\pi-t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\pi t-t^2\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\pi\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^3}{2}-\frac{\pi^3}{3}\right]=\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi^3}{6}=\frac{\pi^2}{6}.$$

$C_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t(\pi-t)e^{-2int}\,dt$. on pose $u(t)=\pi t-t^2$; $u'(t)=\pi-2t$ et $v'(t)=e^{-2int}$; $v(t)=\frac{-1}{2in}e^{-2int}$

$$C_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t(\pi-t)e^{-2int}\,dt=\frac{1}{\pi}\left[t(\pi-t)\frac{-e^{-2int}}{2in}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-2t)\frac{-e^{-2int}}{2in}dt$$

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t(\pi-t)e^{-2int}\,dt = \frac{1}{\pi}\left[t(\pi-t)\frac{-e^{-2int}}{2in}\right]_0^\pi + \frac{1}{2i\pi n}\int_0^\pi(\pi-2t)e^{-2int}\,dt = 0+\frac{1}{2i\pi n}\int_0^\pi(\pi-2t)e^{-2int}\,dt$$

$$C_n = \frac{1}{2i\pi n}\int_0^\pi(\pi-2t)e^{-2int}\,dt = \frac{1}{2i\pi n}\left[(\pi-2t)\frac{-e^{-2int}}{2in}\right]_0^\pi - \frac{1}{2i\pi n}\int_0^\pi(-2)\frac{-e^{-2int}}{2in}dt$$

$$C_n = \frac{1}{2i\pi n}\int_0^\pi(\pi-2t)e^{-2int}\,dt = \frac{1}{4\pi n^2}\left[(\pi-2t)e^{-2int}\right]_0^\pi + \frac{1}{2\pi n^2}\int_0^\pi e^{-2int}\,dt$$

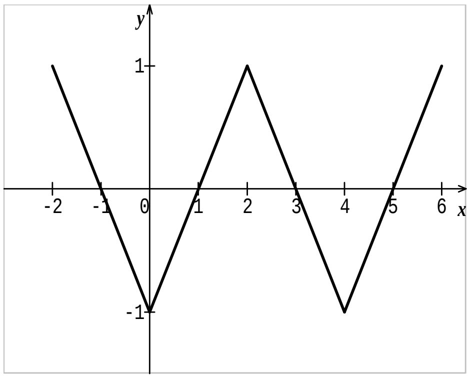
$$C_n = \frac{1}{2i\pi n}\int_0^\pi(\pi-2t)e^{-2int}\,dt = \frac{1}{4\pi n^2}\left[-\pi e^{-2in\pi} - \pi e^0\right] + \frac{1}{2\pi n^2}\left[-\frac{e^{-2int}}{2in}\right]_0^\pi = \frac{-2\pi}{4\pi n^2} + \frac{-1}{4i\pi n^3}\left[e^{-2int}\right]_0^\pi = \frac{-1}{2n^2}$$

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t(\pi-t)e^{-2int}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t(\pi-t)\big(\cos(2nt)+i\sin(2nt)\big)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\pi t(\pi-t)\big(\cos(2nt)\big)dt + i\int_0^\pi t(\pi-t)\big(\sin(2nt)\big)dt\right]$$

par conséquent : $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t(\pi-t)\cos(2nt)\,dt = \frac{-1}{2n^2}$ et $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t(\pi-t)\big(\sin(2nt)\big)dt = 0$.

Exercice 17

soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(t) = t-1 \text{ pour } t\in[0;2] \\ f \text{ est paire} \\ f \text{ est périodique de période } 4 \end{cases}$



2°)

a. $f_e^{\,2} = \frac{1}{4}\int_{-2}^2 f^2(t)dt = \frac{2}{4}\int_0^2 f^2(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^2 (t-1)^2dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(t-1)^3\right]_0^2 = \frac{1}{3}$.

b. on a : $a_0 = \frac{1}{4}\times 2\int_0^2 (t-1)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{4}(1-1) = 0$.

c. $T = 4$ Soit $n\in \mathrm{N}^*$,

$$a_n = \frac{1}{2}\times\int_{-2}^2 (t-1)\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt = \frac{1}{2}\times 2\int_0^2 (t-1)\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt = \int_0^2 (t-1)\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt ,$$

on intègre par parties, en posant : $u(t) = t-1$; $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)t$, $v(t) = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)t$.

$$a_n = \int_0^2 (t-1)\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt = \left[\frac{2(t-1)}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}t\right)\right]_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt = 0 - \frac{2}{n\pi}\left[-\frac{2}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)\right]_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2}\big(\cos(n\pi)-1\big)$$

Deux cas : 1. n est pair, on pose $n = 2p$ où $n\in \mathrm{N}$ $a_{2p} = \frac{4}{n^2\pi^2}\big(\cos(2p\pi)-1\big) = 0$.

2. n est impair, on pose $n = 2p+1$ où

$$n\in \mathrm{N}\ a_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)^2\pi^2}\big(\cos((2p+1)\pi)-1\big) = \frac{4}{(2p+1)^2\pi^2}(-1-1) = -\frac{8}{(2p+1)^2\pi^2}$$