

TP3

CALCULS INTEGRALES MATHEMATIQUES

1. Déterminer le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$
 Démontrer que le développement limité d'ordre 4 la fonction Arc tan est : $\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + t^4 \varepsilon(t)$
2. Déterminer le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
 Démontrer que le développement limité d'ordre 4 la fonction Arc sin est : $\arcsin t = t + \frac{t^3}{6} + t^4 \varepsilon(t)$
3. Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.
 Démontrer que le développement limité d'ordre 2 de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ est $1 - x + \frac{3x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$
 En déduire que le développement limité d'ordre 2 de la fonction $h : x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{2x+1}}$ est $1 - 2x + 3x^2 + x^2 \varepsilon(x)$
4. Démontrer que le développement limité d'ordre 3 de la fonction $f : x \mapsto (x+1)\cos x$ est : $f(x) = 1+x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon(x)$
5. Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$. Démontrer que le développement limité à l'ordre 3 de la fonction f au voisinage de 0 est $f(x) = 1+x+x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^3 \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.
6. Soit f la fonction définie sur $] -1, 1]$ par : $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$. Démontrer que le développement limité d'ordre 2 de la fonction f au voisinage de 0 est $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + x^2 \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$
7. Déterminer le développement limité d'ordre 3 de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$.
 En déduire que le développement limité d'ordre 3 de la fonction $f : x \mapsto \frac{1-x^2+x^3}{(1+x)^2}$ est :

$$f(x) = 1 - 2x + 2x^2 - x^3 + x^3 \varepsilon(x)$$
8. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x-2)\ln(1-x)$. La courbe C , de la figure est la courbe représentative de f . La droite T est la tangente à la courbe C au point A d'abscisse 0.
 1°a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \ln(1-x)$.
 b) En déduire que le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x) = 2x + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$$
- 2° Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et T au voisinage de 0.
9. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x^2 - 1)e^{2x}$ et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$:
 1. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0
 2. En déduire :
 (a) une l'équation de la tangente T à la courbe C ;
 (b) la position de C par rapport à T au voisinage de 0.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2(1+x)} + \ln(1+x)$ et soit C sa courbe représentative

dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

- Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0
- En déduire : a) une équation de la tangente T à la courbe C :
b) la position de C par rapport à T au voisinage de 0.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x+2)e^{-x}$ et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0
- En déduire : a) une équation de la tangente T à la courbe C :
b) la position de C par rapport à T au voisinage de 0.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (1+x)e^{-1/x}$ et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0 de $g(t) = (1+t)e^t$
- En déduire, en posant $t = 1/x$ que l'on peut écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$
où a ; b et c sont des réels que l'on déterminera.
- En déduire : a) une équation de l'asymptote Δ à C vers $+\infty$
b) la position de C par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$:

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$ et soit C sa courbe représentative dans un repère

orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0 de
- En déduire : (a) une équation de la tangente T à la courbe C :
(b) la position de C par rapport à T au voisinage de 0

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x} \ln(1+x)$ et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0
- En déduire : a) une équation de la tangente T à la courbe C :
b) la position de C par rapport à T au voisinage de 0

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ et soit C sa courbe représentative

dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0 de $g(t) = \ln(1-t)$
- En déduire, en posant $t = 1/x$ que l'on peut écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$
où a ; b et c sont des réels que l'on déterminera.

-
3. En déduire :
- a) une équation de l'asymptote Δ à C vers $+\infty$
 - b) la position de C par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$

Dl4 de Arctan.

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ admet pour primitive la fonction Arctangente.

Le dl3 de f au voisinage de zéro est : $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^3 \varepsilon(x)$

Le dl4 de la fonction arc tangente au voisinage de zéro est: $\text{Arctan } t = \text{Arctan}(0) + t - \frac{t^3}{3} + t^4 \varepsilon(x)$,

On obtient : $\text{Arctan } t = \text{Arctan}(0) + t - \frac{t^3}{3} + t^4 \varepsilon(x)$,

Développement limité d'ordre 4 de la fonction Arc sin.

Arc sin est la primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ qui s'annule en 0

$t \mapsto -t^2 \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est la composée de deux fonction $t \mapsto -t^2$ et $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+u}}$

Développement limité d'ordre 3 : $\frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-0.5}$

$$\bullet (1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n \varepsilon(t)$$

Si $\alpha = -\frac{1}{2}$ alors $\frac{\alpha}{1!} = -\frac{1}{2}$, $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} = \frac{-\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{8}$, $\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} = \frac{-\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2} \times -\frac{5}{2}}{3 \times 2 \times 1} = -\frac{15}{3 \times 2^4} = -\frac{5}{16}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 - \frac{5}{16}t^3 + t^3 \varepsilon(t)$$

donc $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1-t^2)^{-0.5} = 1 - \frac{1}{2}(-t^2) + \frac{3}{8}(-t^2)^2 - \frac{5}{16}(-t^2)^3 + (-t^2)^3 \varepsilon(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{3}{8}t^4 + \frac{5}{16}t^6 + t^6 \varepsilon(t)$

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{t^2}{2} + t^3 \varepsilon(t).$$

On intègre : $\text{Arc sin } t = \text{Arc sin } 0 - t + \frac{t^3}{6} + t^4 \varepsilon(t)$ donc le dl4 de $\text{Arcsin } t = -t + \frac{t^3}{6} + t^4 \varepsilon(t)$

[1] $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + t^2 \varepsilon_2(t)$$

$$(1+t)^{-1/2} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{3}{8}t^2 + t^2 \varepsilon_3(t) \text{ donc } : \frac{1}{\sqrt{1+2x}} = 1 - \frac{(2x)}{2} + \frac{3}{8}(2x)^2 + x^2 \varepsilon_4(x) = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 + x^2 \varepsilon_4(x)$$

$$h(x) = \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - x + \frac{3}{2}x^2\right) + x^2 \varepsilon_5(x) = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - x + x^2 + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_6(x) = 1 - 2x + 3x^2 + x^2 \varepsilon_6(x)$$

[2] $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^3 \varepsilon(t)$ donc $\ln(1-x) = (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + (-x)^3 \varepsilon(-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_1(x)$

$$f(x) = (x^2 + x + 1) \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + x^3 \varepsilon_2(x) = -x^3 - x^2 - \frac{x^3}{2} - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) = -x - \frac{3x^2}{2} - \frac{11x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$$

[3] $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x)$

$$f(x) = (1+x) \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + x^3 \varepsilon_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$$

1] Déterminer le développement limité d'ordre 3 de la fonction : $x \mapsto \cos x$. En déduire que le développement limité d'ordre 3 de la fonction $f : x \mapsto (x^2 + x + 1) \cos x$ est : $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon(x)$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x)$$

$$f(x) = (x^2 + x + 1) \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + x^3 \varepsilon(x) = x^2 + x - \frac{x^3}{2} + 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon(x).$$

2] Déterminer le développement limité d'ordre 3 de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$. En déduire que le développement limité d'ordre 3 de la fonction $f : x \mapsto \frac{1-x^2+x^3}{(1+x)^2}$ est : $f(x) = 1 - 2x + 2x^2 - x^3 + x^3 \varepsilon(x)$.

$$\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + x^3 \varepsilon(x).$$

$$\frac{1-x^2+x^3}{(1+x)^2} = (1-x^2+x^3)(1-2x+3x^2-4x^3) + x^3 \varepsilon(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 - x^2 + 2x^3 + x^3 + x^3 \varepsilon(x) = 1 - 2x + 2x^2 - x^3 + x^3 \varepsilon(x)$$

3] Déterminer le développement limité d'ordre 3 de la fonction : $x \mapsto e^x$. En déduire que le développement limité d'ordre 3 de la fonction $f : x \mapsto 3(x^2 + 1) - 2e^x$ est : $f(x) = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \quad 3(x^2 + 1) - 2e^x = 3(x^2 + 1) - 2\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + x^3 \varepsilon(x) = 3x^2 + 3 - 2 - 2x - x^2 - \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$$

4] Le plan est muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x-2) \ln(1-x)$.

La courbe \mathcal{C} , de la figure est la courbe représentative de f . La droite \mathcal{T} est la tangente à la courbe \mathcal{C} au point A d'abscisse 0.

1°a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \ln(1-x)$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$$

b) En déduire que le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f est : $f(x) = 2x + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$

$$(x-2) \ln(1-x) = (x-2) \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + x^3 \varepsilon(x) = -x^2 - \frac{x^3}{2} + 2x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) = 2x + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$$

2° Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à \mathcal{C} au point d'abscisse 0 et la position relative de \mathcal{C} et \mathcal{T} au voisinage de 0.

Equation : $y = 2x$. position donné par le signe de $\frac{x^3}{6}$. \mathcal{C} est audessus sur \mathbb{R}_+ et au dessous sur \mathbb{R}_-

5] Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$ On ne sait pas calculer une primitive de f .

1° a) Déterminer un développement limité à l'ordre 3 des fonctions $x \mapsto e^{2x}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$

$$e^{2x} = e^x = 1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3 \varepsilon(x)$$

b) En déduire que le développement limité à l'ordre 3 de la fonction f au voisinage de 0 est $f(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$

$$\frac{e^{2x}}{1+x} = \left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{2x^3}{3}\right) (1 - x + x^2 - x^3) + x^3 \varepsilon(x)$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + 2x - 2x^2 + 2x^3 + 2x^2 - 2x^3 + \frac{2x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$$

