Partiel N°5 MATHEMATIQUES

Exercice 1

1. On considère un entier naturel n strictement positif et ω est tel que $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Montrer que : $\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,dt = \dfrac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}$ et $\int_0^1 t\sin(n\pi t)\,dt = -\dfrac{\cos(n\pi)}{n\pi}$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T=2$, telle que : $\begin{cases} f(t)=t & sur\ [0;1[\\ f(t)=0 & sur\ [1;2[\end{cases}$

a. En utilisant le document réponse n°1 , à rendre avec la copie , tracer la courbe C_f représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-4;\,4]$.

b. Calculer $a_0 = \dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$; $a_n = \dfrac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt$ et $b_n = \dfrac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$

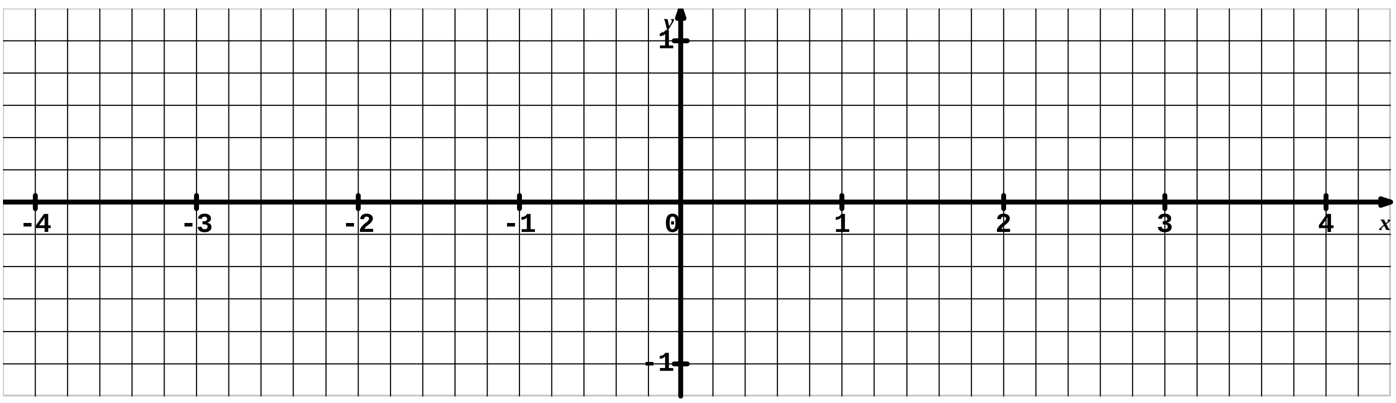
Donner les valeurs des coefficients a_0 ; a_n et b_n .

c. compléter le tableau suivant :

n	1	2	3
a_n			
b_n			

d. Calculer le carré de la valeur efficace de la fonction f , défini par : $\mu_{eff}^2 = \dfrac{1}{2}\int_0^2 [f(t)]^2\,dt$.

Figure . 1 - Représentation graphique C_f



Exercice 2

On considère l'équation différentielle (E_1) suivante : $y''(t)+4y(t)=8$: (E_1)
où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle t.

1.a. Donner la solution générale de l'équation différentielle $y''(t)+4y(t)=0 : (E_0)$

b. Donner la solution particulière constante de l'équation différentielle (E_0).

c. Déterminer la solution générale de l'équation (E_1).

2. a. Montrer que la fonction f , solution de l'équation différentielle (E_1) et qui vérifie :

$f(0)=0$ et $f'(0)=0$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t)=2\left[1-\cos(2t)\right]$.

b. La fonction f est périodique. En donner une période.

Préciser, sans justification, le maximum et le minimum de la fonction f .

c. Représenter la fonction f sur l'intervalle $[0;2\pi]$.

Exercice 3

Un embrayage vient appliquer, à l'instant $t=0$, un couple résistant constant sur un moteur dont la vitesse à vide est de 150 rad/s. On note $\omega(t)$, la vitesse de rotation du moteur à l'instant t.

La fonction w est solution de l'équation différentielle : $\frac{1}{200}y'(t)+y(t)=146$ (1) ; où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle positive t.

1. (a) Résoudre l'équation différentielle homogène associée : (E_0) : $\frac{1}{200}y'(t)+y(t)=0$

(b) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (1).
On cherchera une solution particulière constante.

(c) Sachant que $\omega(0)=150$, montrer que $\omega(t)=146+4e^{-200t}$ pour tout $t\in[0;+\infty[$

2. (a) On note $\omega_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty}\omega(t)$. Déterminer la perte de vitesse $\omega_\infty-\omega_0$ due au couple résistant.

(b) On considère que la vitesse du moteur est stabilisée lorsque l'écart relatif $\left|\frac{\omega(t)-\omega_\infty}{\omega_\infty}\right|$ est inférieur à 1 %. Calculer le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse.
On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au millième.

Exercice 4 : 4 points

Soit (E) l'équation différentielle (E) : 4y" + y = 0.

1°. Résoudre cette équation différentielle (E).

2°. Déterminer la solution particulière f qui vérifie les conditions $f(0)=-\frac{3}{2}$ et $f'(0)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

3°. Vérifier que $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)$.

4°.Calculer une primitive de f sur $\mathbb{R}$ et en déduire la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0;\pi/3]$ définie par : $m=\frac{1}{(\pi/3)-0}\int_0^{\pi/3}f(x)dx$.

Exercice 5 : 3points

Soit (E) l'équation différentielle : $y''(t)+y(t)=\sin(2\pi t)+\frac{1}{2}\sin(4\pi t)$

1°. Vérifier que la fonction f définie pour tout nombre réel t par :

$f(t)=\frac{1}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t)+\frac{1}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)$ est solution de l'équation différentielle (E).

2°. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) : $y''(t)+y(t)=0$ (E_0)

3°. En déduire la solution de l'équation différentielle (E).

Exercice 1

1. $\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,dt$, on applique le théorème d'intégration par parties et on pose :

$u(t)=t$ et $v'(t)=\cos(n\pi t)$, $u'(t)=1$ et $v(t)=\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi t)$ puis on applique le théorème

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt=[u(t)v(t)]_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)dt$$

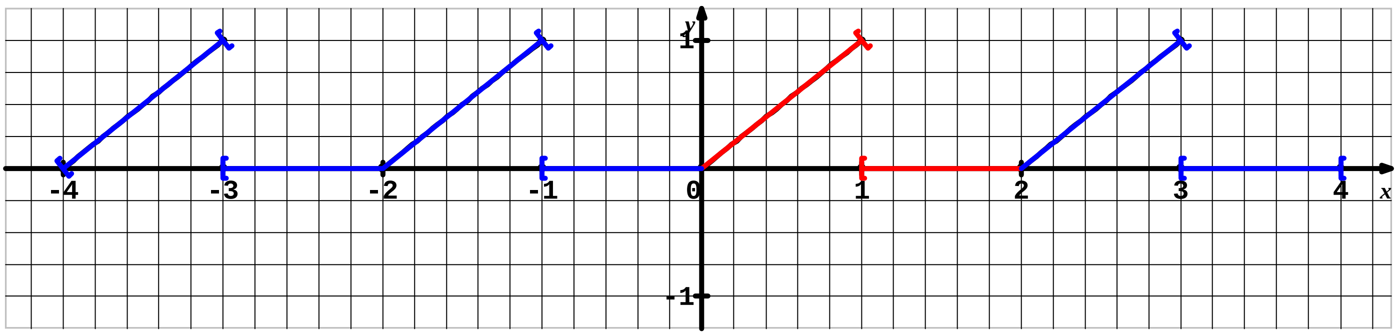
$$\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,dt=\left[\frac{t\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1-\frac{1}{n\pi}\int_0^1\sin(n\pi t)\,dt=0+\frac{1}{n\pi}\left[\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1=\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}$$

De même avec $u(t)=t$ et $v'(t)=\sin(n\pi t)$, $u'(t)=1$ et $v(t)=-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi t)$, on obtient :

$$\int_0^1 t\sin(n\pi t)\,dt=\left[-\frac{t\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1+\int_0^1\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}dt=-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}+\frac{1}{n\pi}\left[\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1=-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}+0$$

On sait que $\sin(n\pi)=0$ et $\cos(n\pi)=(-1)^n$

2.a



b. on applique le théorème : si f est T périodique , ω est tel que $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi$ on a donc :

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \quad ; \quad a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt \text{ et } b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

f est 2 périodique, définie sur $[0;2]$, donc on pose $a=0$ et on a :

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt+\frac{1}{2}\int_1^2 f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{4}.$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt=\frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\cos(n\pi t)\,dt=\int_0^1 f(t)\cos(n\pi t)\,dt+\int_1^2 f(t)\cos(n\pi t)\,dt$$

$$a_n=\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,dt=\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt=\frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\sin(n\pi t)\,dt=\int_0^1 f(t)\sin(n\pi t)\,dt+\int_1^2 f(t)\sin(n\pi t)\,dt$$

$$b_n=\int_0^1 t\sin(n\pi t)\,dt=-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}$$

d. $\mu_{eff}^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 [f(t)]^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 [f(t)]^2\,dt + \frac{1}{2}\int_1^2 [f(t)]^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 [f(t)]^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$

c. $a_n = \frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}$: $a_1 = \frac{\cos(\pi)-1}{\pi^2} = \frac{-2}{\pi^2}$; $a_1 = \frac{\cos(2\pi)-1}{4\pi^2} = \frac{0}{4\pi^2} = 0$ et $a_3 = \frac{\cos(3\pi)-1}{9\pi^2} = \frac{-2}{9\pi^2}$.

$b_n = -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}$: $b_1 = -\frac{\cos(\pi)}{\pi} = \frac{1}{\pi}$; $b_2 = -\frac{\cos(2\pi)}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi}$ et $b_3 = -\frac{\cos(3\pi)}{3\pi} = \frac{1}{3\pi}$

n	1	2	3
a_n	$\frac{-2}{\pi^2}$	0	$\frac{-2}{9\pi^2}$
b_n	$\frac{1}{\pi}$	$-\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{3\pi}$

Correction exercice 2

1. Soit $y(t)=c$, donc $y'(t)=0$, $y''(t)=0$ et on trouve $c=2$ donc $y(t)=2$ est une solution particulière de (E_1) (vérification immédiate).

$y''(t)+4y(t)=0$ a pour équation caractéristique $r^2+4=0$ qui a deux solutions imaginaires pures $\pm 2j$

Le formulaire indique comme solution de la forme $y(t)=e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t)+b\sin(\beta)\right)$

Ici on a : $\alpha=0$ et $\beta=2$. Les solutions de (E_0) sont de la forme $y(t)=A\cos(2t)+B\sin(2t)$

et la solution générale de (E_1) est $f(t)=2+A\cos(2t)+B\sin(2t)$

2.a $f(0)=0$ signifie $f(0)=2+A\cos(0)+B\sin(0)=2+A$, donc $A=2$.

$f'(t)=-2A\sin(2t)+2B\cos(2t)$, $f'(0)=-2A\sin(0)+2B\cos(0)=2B=0$, donc $B=0$

la fonction f, solution de l'équation différentielle (E_1) est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t)=2\left[1-\cos(2t)\right]$.

2.b $f(t+2\pi)=2\left[1-\cos\left(2(t+2\pi)\right)\right]=2\left[1-\cos(2t+4\pi)\right]=2\left[1-\cos(2t)\right]=f(t)$

Donc f est périodique de période 2π.

$f(t+\pi)=2\left[1-\cos\left(2(t+\pi)\right)\right]=2\left[1-\cos(2t+2\pi)\right]=2\left[1-\cos(2t)\right]=f(t)$

Donc f est périodique de période π. De plus f est une fonction paire (puisque $t\to\cos t$ est paire et $f(-t)=2\left(1-\cos(-2t)\right)=2(1-\cos(2t))=f(t)$) .

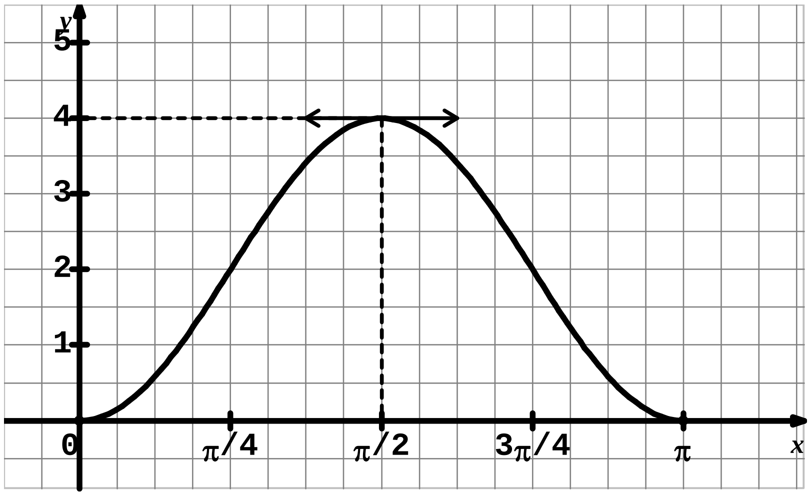
$f(t)=2\left[1-\cos(2t)\right]$; $f'(t)=4\sin(2t)$

Si $t\in[0;\pi/2]$: $2t\in[0;\pi]$ et $\sin(2t)\geq 0$, donc $f'(t)\geq 0$ sur $[0;\pi/2]$

Si $t\in[\pi/2;\pi]$: $2t\in[\pi;2\pi]$ et $\sin(2t)\leq 0$, donc $f'(t)\leq 0$ sur $[\pi/2;\pi]$

t	0		$\pi/2$		π
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

Le maximum de f est atteint en $x=\pi/2$ et vaut $f(\pi/2)=4$ et elle a un minimum égal à 0 en $x=0$ et $x=\pi$.



Exercice 3Solution

1. (a) Il faut résoudre l'équation homogène associée : $\frac{1}{200}y'(t)+y(t)=146$ (1)

La solution homogène est donnée par : $\omega_1(t)=ke^{-200t}$ avec $k\in\mathbb{R}$

Il faut chercher une solution particulière de l'équation complète sous la forme d'une constante, c'est à dire : $\omega(t)=\omega_0$ donc $\omega'(t)=0$

Remplaçons dans l'équation (1) ; on obtient : $\frac{1}{200}\omega'(t)+\omega(t)=146 \Rightarrow 0+\omega_0=146 \Leftrightarrow \omega_0=146$

Une solution particulière est donc : on prend $\omega(t)=a$ où a est une constante , donc on obtient

$\frac{1}{200}\omega'(t)+\omega(t)=146 \Rightarrow \frac{1}{200}\times 0+a=146 \Leftrightarrow a=146$, donc $\omega_p(t)=146$

La solution générale de l'équation complète est obtenue est la somme de la solution homogène de l'équation et une solution particulière de l'équation avec second membre, c'est-à-dire :

$\omega(t)=\omega_h(t)+\omega_p(t)=ke^{-200t}+146$ avec $k\in\mathbb{R}$

(b) On a $\omega(0)=150$ donc $\omega(0)=ke^0+146=150$ donc $k=4$. On a donc bien : $\omega(t)=4e^{-200t}+146$

2. (a) On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-200t}=0$ donc : $\lim\limits_{t\to+\infty}\omega(t)=146$

La perte de vitesse est donc : $\omega_\infty-\omega_0=146-150=-4\,\text{sec}$

(b) On a : $\left|\frac{w(t)-w_\infty}{w_\infty}\right|=\left|\frac{4e^{-200t}}{146}\right|=\left|\frac{2e^{-200t}}{73}\right|$. Il faut donc résoudre : $\left|\frac{w(t)-w_\infty}{w_\infty}\right|\le\frac{1}{100}$ Donc :

$\left|\frac{2e^{-200t}}{73}\right|\le\frac{1}{100}\Rightarrow\frac{2e^{-200t}}{73}\le\frac{1}{100}$.Il vient : $e^{-200t}\le\frac{73}{200}\Leftrightarrow -200t\le\ln 0{,}365$ donc − 200t < ln 0, 365

D'où $t\ge\frac{\ln(0{,}365)}{-200}$ et on obtient : $t\ge 0{,}00503929$ .En conclusion la valeur approchée est $t=0{,}005s=5ms$

Exercice 4

1 . L'équation $4y''+y=0$ soit $y''+\frac{1}{4}y=0$ est une équation différentielle du deuxième ordre sans second membre de la forme $y''+\omega^2y=0$ avec $\omega=\frac{1}{2}$.. Les solutions sont les fonctions de la forme :

ses solutions sont les fonctions de la forme : $f(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$; avec $A\in\mathbb{R}$; $B\in\mathbb{R}$; $x\in\mathbb{R}$

et donc ici : $f(x)=A\cos\frac{x}{2}+B\sin\frac{x}{2}$ avec $x\in\mathbb{R}$

2. Puisque $f'(x)=-\frac{A}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{B}{2}\cos\frac{x}{2}$

donc si $f(0)=-\frac{3}{2}$ alors $A=-\frac{3}{2}$ et si $f'(0)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$ alors $\frac{B}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$ et donc $B=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

La solution particulière cherchée est donc la fonction $f(x)=\frac{-3}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

3.a $f(x)=\frac{-3}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2}=\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{7\pi}{6}\sin\frac{x}{2}\right)$,

donc $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)$

b. $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ si et seulement si $\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ soit ssi $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ soit

$\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$. on a donc $\left\{\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad ou \quad \frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right.$ d'où

$\left\{\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+\frac{7\pi}{6}+2k\pi \quad ou \quad \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{3}+\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right.$ et $\left\{x=\frac{3\pi}{2}+4k\pi \quad ou \quad x=\frac{5\pi}{3}+4k\pi\right.$

dans l'intervalle $[0;4\pi[$ les solutions sont $x=\frac{3\pi}{2}$ et $x=\frac{5\pi}{3}$

4. la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;\pi/3]$ est égale : $m=\frac{1}{(\pi/3)-0}\int_0^{\pi/3}f(x)dx$

$m=\frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3}\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)dx$; $m=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\left[\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)\right]_0^{\pi/3}$; $m=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{7\pi}{6}\right)-\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right]$

$m=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\left[\sin(-\pi)+\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$; $m=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\left[\frac{-1}{2}\right]$; $m=-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$.

Exercice 5

1. On a : $S_1(t)=\frac{1}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t)+\frac{1}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)$ d'où

$S'_1(t)=\frac{2\pi}{1-4\pi^2}\cos(2\pi t)+\frac{4\pi}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)$ et $S''_1(t)=-\frac{4\pi^2}{1-4\pi^2}\cos(2\pi t)-\frac{16\pi^2}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)$.

$s''_1(t)+s_1(t)=-\frac{4\pi^2}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t)-\frac{16\pi^2}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)+\frac{1}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t)+\frac{1}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)$

$=\frac{1-4\pi^2}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t)+\frac{1-16\pi^2}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)=\sin(2\pi t)+\frac{1}{2}\sin(4\pi t)$

Conclusion : s_1 est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Il faut chercher la solution générale de l'équation différentielle homogène associée à (E) : $s''(t)+s(t)=0$.

L'équation caractéristique associée est : $r^2+1=0$ dont le discriminant est égal à −1. Cette équation possède deux racines complexes conjuguées qui sont j et $-j$.

La solution générale de l'équation homogène est alors : $s_0(t)=\alpha\cos t+\beta\sin t$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{R}$.

La solution générale de (E) est donné par la somme entre une solution particulière de l'équation complète et la solution générale de l'équation homogène associée, d'où :

$s(t)=s_0(t)+s_1(t)$. $s(t)=\alpha\cos t+\beta\sin t+\frac{1}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t)+\frac{1}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)$

On considère l'équation differentielle (E_1) suivante : $y''(t)+4y(t)=8$ (E_1)

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle t.

1.a. Donner la solution générale de l'équation différentielle $y''(t)+4y(t)=0:(E_0)$

b. Donner la solution particulière constante de l'équation différentielle (E_0).

c. Déterminer la solution générale de l'équation (E_1).

2. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E_1) qui vérifie : $f(0)=0$ et $f'(0)=4$

3.Vérifier que $f(t)=2-2\sqrt{2}\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{4}\right)$

Résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$ l'équation : $f(t)=0$.

On se propose de résoudre sur $[0;+\infty[$, l'équation différentielle (E) : $z'-z=6\,e^{4t}$

1°) Résoudre l'équation différentielle homogène associée : (E_0) : $z'-z=0$

2°)

a) Vérifier que la fonction x définie par $x(t)=e^t+2e^{4t}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

b) En déduire la solution générale de (E).

1°) Résolution de l'équation différentielle associée : (E_0) : $z'-z=0$.

((E_0) est de forme $z'+az=0$ ont pour solutions : $t\mapsto z_H(t)=ke^{-at}$)

Les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $t\mapsto z_H(t)=ke^t$, avec k constante réelle, et donc aussi solutions sur $[0;+\infty[$.

2°)

a) $x(t)=(e^t+2e^{4t})U\ (t)=e^t+2e^{4t}$ sur $[0;+\infty[$.

En substituant x dans (E), on vérifie que c'est une solution particulière sur $[0;+\infty[$.

Donc $x'(t)=e^t+8e^{4t}$.

Ainsi (E) : $x'(t)-x(t)=e^t+8\,e^{4t}-(e^t+2\,e^{4t})=e^t+8\,e^{4t}-e^t-2\,e^{4t}=6e^{4t}$.

b) la solution générale de l'équation (E) est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de (E).dans ce cas avec t variant sur l'intervalle $[0;+\infty[$:

$z(t)=ke^t+e^t+2e^{4t}$ avec k constante réelle.