

Partiel n°2

MATHEMATIQUES

Exercice 1 : Les questions ci-dessous sont indépendantes 10 pts

On note j le nombre complexe de module 1, dont un argument est $\pi/2$

Soit le plan complexe rapporté à un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormal. (unité graphique : 2 cm sur les axes)

1. a. Placer les points A et B d'affixes respectives : $z_A = -2 + 2j$; $z_B = 1 - j$

b. Déterminer et représenter l'ensemble des images des nombres complexes z tels que :

$\alpha) |z + 2 - 2j| = 4$ $\beta) \operatorname{Re}(z - 1 + j) = 1$ $\gamma) \arg(z - z_A) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2°) a. Soit $c = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)j$. Calculer c^2 .

b. Calculer le module et un argument de c^2

c. En déduire le module et un argument de c

3°) Soit $d = -\sqrt{2} + \sqrt{2}j$.

a. Déterminer un couple de réels x et y tels que : $(x + yj)^2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}j$. (méthode algébrique)

b. Donner la forme trigonométrique et exponentielle de d

c. En utilisant la méthode trigonométrique, résoudre l'équation : $z^2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}j$.

Exercice BTS-GO-2007- 10 points

On désigne par j le nombre complexe de module 1 dont un argument est $\pi/2$.

On considère un filtre dont la fonction de transfert T est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $T(\omega) = \frac{-j\omega k}{1 - j\frac{\omega}{2}}$

Le nombre k est un nombre réel strictement compris entre 0 et 1. En associant trois filtres identiques au précédent, on obtient un système dont la fonction de transfert H est définie sur $]0; +\infty[$

par : $H(\omega) = (T(\omega))^3$.

1. On note $r(\omega)$ le module de $H(\omega)$. On a donc : $r(\omega) = |H(\omega)|$.

a) Montrer que le module de $T(\omega)$ est $\frac{k\omega}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4}}}$. En déduire $r(\omega)$.

2. a) Justifier qu'un argument de $(-j\omega k)^3$ est $\frac{\pi}{2}$. Justifier qu'un argument de $1 - j\frac{\omega}{2}$ est $-\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

En déduire qu'un argument de $H(\omega)$, noté $\varphi(\omega)$, est défini sur $]0; +\infty[$ par : $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} + 3\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

b) On note φ' la dérivée de la fonction φ . Calculer $\varphi'(\omega)$.

Déterminer le signe de $\varphi'(\omega)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

c) Déterminer les limites de la fonction φ en 0 et en $+\infty$.

3. a) On note r' la dérivée de la fonction r . Calculer $r'(\omega)$.

b) Déterminer le signe de $r'(\omega)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

c) Déterminer les limites de la fonction r en 0 et en $+\infty$.

Recopier et compléter ce tableau en utilisant les résultats obtenus dans la question 2 et 3.

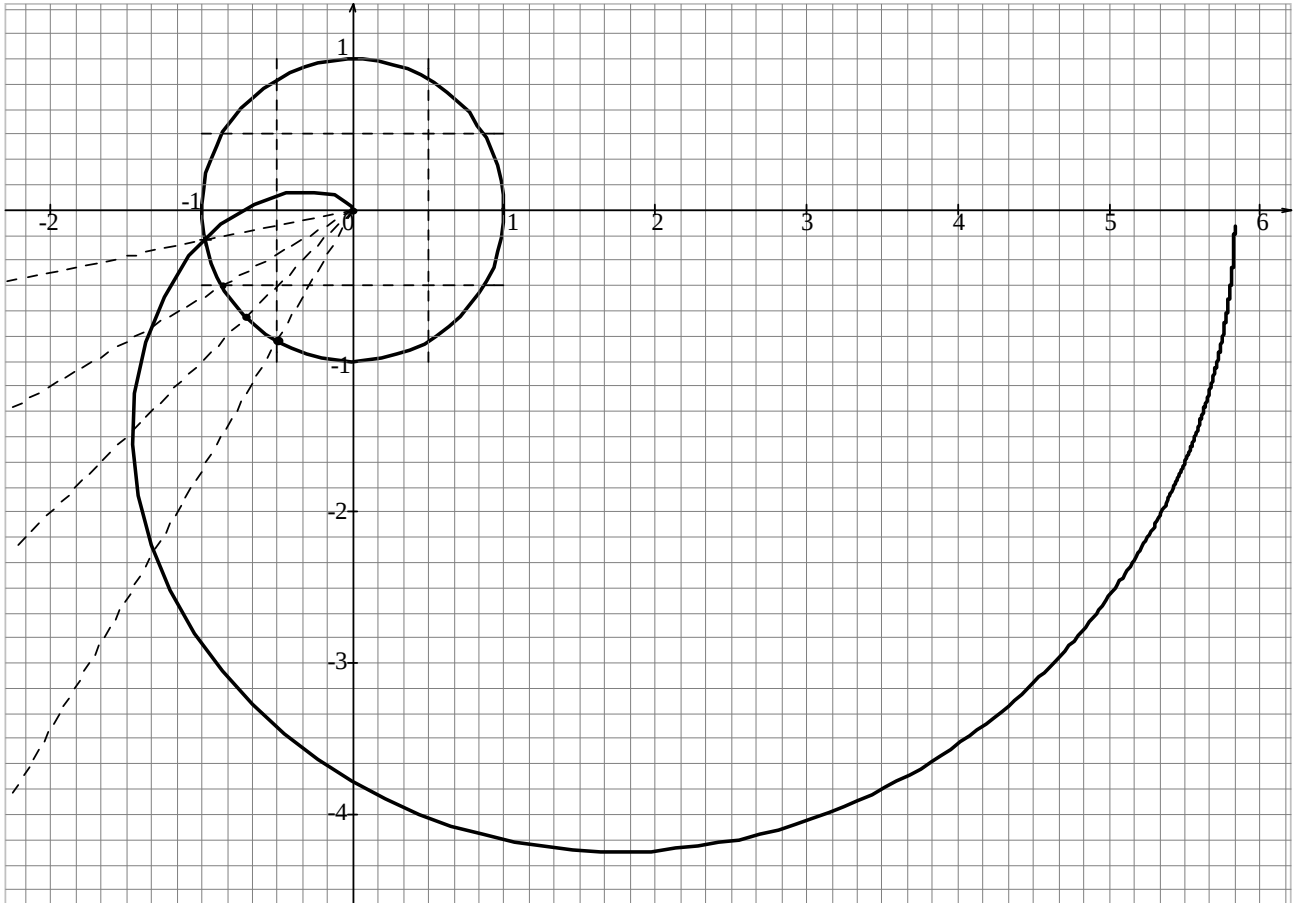
4. Dans cette dernière question, on se place dans le cas où $k = 0,9$.

Lorsque ω décrit l'intervalle $]0; +\infty[$, le point d'affixe $H(\omega)$ décrit une courbe C . En annexe, à rendre avec la copie, la courbe C est tracée dans le plan complexe. On note ω_0 la valeur de ω pour laquelle le module de $H(\omega)$ est égal à 1.

ω	0	$+\infty$
$r'(\omega)$		
$r(\omega)$		
$\varphi(\omega)$		
$\varphi'(\omega)$		

- Placer précisément le point M_0 d'affixe $H(\omega_0)$ sur le document réponse donné en annexe 2.
- Calculer une valeur arrondie du nombre ω_0 , puis de $\varphi(\omega_0)$.

Annexe



Corrigé

Exercice 1

1°. a) l'ensemble des points d'affixe z tel que $|z + 2 - 2j| = 4$ est le cercle de centre $A(2; -2)$ et de rayon 4.

b. $z - 1 + j = x - 1 + jy = x - 1 + jy = 1$, $\text{Re}(z - 1 + j) = 1$ si et seulement si $x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$, donc l'ensemble des points d'affixe z tel que $\text{Re}(z + 3 + j) = 1$ est la droite d'équation $x = 2$.

c. $\arg(z - z_A)$ est une mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{AM})$

la ligne de niveau définie par $\arg(z - z_A) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ est la demi-droite d'extrémité $A(2; -2)$

(A non comprise) faisant un angle de $\frac{2\pi}{3}$ avec la parallèle à l'axe des abscisses passant par A .

$$c^2 = \left[(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)j \right]^2 = (\sqrt{3}+1)^2 + \left[j(\sqrt{3}-1) \right]^2 + 2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)j$$

$$2. \quad c^2 = (\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)j$$

$$c^2 = 3+1+2\sqrt{3} - (3+1-2\sqrt{3}) + 2(3-1)j = 3+1+2\sqrt{3} - 3-1+2\sqrt{3} + 4j = 4\sqrt{3} + 4j$$

$$|c^2| = |4\sqrt{3} + 4j| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{48+16} = \sqrt{64} = 8, \text{ donc } |c^2| = |c|^2 = \sqrt{64} = 8 \Rightarrow |c| = 2\sqrt{2}$$

$$\alpha = \arctan \frac{b}{a} = \arctan \frac{4}{4\sqrt{3}} = \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{\pi}{6}. \text{ Donc } \alpha = \arg c^2 = \arg(4\sqrt{3} + 4j) = \frac{\pi}{6}, \text{ et on a :}$$

$$\theta = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \arg c^2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} + k\pi = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ donc } c = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)j = 2\sqrt{2}e^{j\pi/12} = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right).$$

$$\text{D'où } 2\sqrt{2} \cos(\pi/12) = \sqrt{3}+1 \Leftrightarrow \cos(\pi/12) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+1) \times \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{et } 2\sqrt{2} \sin(\pi/12) = \sqrt{3}-1 \Leftrightarrow \sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1) \times \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3. Soit $d = -\sqrt{2} + \sqrt{2}j$. Déterminer un couple de réels x et y tels que: $(x + yj)^2 = 2\sqrt{3} + 2j$

$$(x + yj)^2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}j \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2jxy = -\sqrt{2} + \sqrt{2}j, \text{ donc } \begin{cases} x^2 - y^2 = -\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 2 \\ 2xy = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 2 \\ 2xy = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{par addition on obtient : } 2x^2 = 2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

$$\text{et par soustraction on obtient : } 2y^2 = 2 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

$$\text{donc } z = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}j \text{ ou } z = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}j$$

$$|d| = |-\sqrt{2} + \sqrt{2}j| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 \text{ et } d = -\sqrt{2} + \sqrt{2}j = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j \right) = 2e^{3j\pi/4}$$

$$\text{donc } z^2 = 2e^{3j\pi/4} \Leftrightarrow z = \sqrt{2} \times e^{3j\pi/8} = \sqrt{2} [\cos(3\pi/8) + j\sin(3\pi/8)].$$

$$z = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}j = \sqrt{2} [\cos(3\pi/8) + j\sin(3\pi/8)]. \quad \cos(3\pi/8) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin(3\pi/8) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Exercice 2

$$1. T(\omega) = \frac{-j\omega k}{1 - j\omega/2} \quad r(\omega) = |H(\omega)| \text{ et } H(\omega) = (T(\omega))^3 \quad |T(\omega)| = \left| \frac{-j\omega k}{1 - j\omega/2} \right| = \frac{|-j\omega k|}{|1 - j\omega/2|} = \frac{\omega k}{\sqrt{1 + \omega^2/4}}$$

$$\text{On a : } H(\omega) = (T(\omega))^3, \text{ alors } r(\omega) = |H(\omega)| = |(T(\omega))^3| = |T(\omega)|^3 = \left(\frac{\omega k}{\sqrt{4 + \omega^2}} \right)^3 = \frac{8\omega^3 k^3}{(4 + \omega^2)\sqrt{4 + \omega^2}}$$

$$2. (a) \arg((-j\omega k)^3) = \arg(-j^3 \omega^3 k^3) = \arg(j \omega^3 k^3) = \arg(j) = \frac{\pi}{2} + 2m\pi ; m \in \mathbb{Z} .$$

Soit $\theta = \arg(1 - j\frac{\omega}{2})$, alors $\cos \theta > 0$ et $\sin \theta < 0$ donc $\theta \in]-\pi/2; 0[$, alors $\tan \theta = -\frac{\omega}{2}$ équivaut à

$$\theta = \arctan\left(-\frac{\omega}{2}\right). \text{ En utilisant l'imparité de la fonction arc tangente, } \theta = -\arctan(\omega/2).$$

$$\text{On a : } H(\omega) = (T(\omega))^3, \text{ alors } \arg H(\omega) = \arg(T(\omega))^3 = \arg\left(\frac{-j\omega k}{1 - j\omega/2}\right)^3 = \arg\left(\frac{-j\omega k}{1 - j\omega/2}\right)^3 = \arg(-j\omega k)^3 - \arg(1 - j\omega/2)^3$$

$$\arg H(\omega) = \arg(T(\omega))^3 = \arg(-j\omega k)^3 - \arg(1 - j\omega/2)^3 = \arg(j \omega^3 k^3) - 3\arg(1 - j\omega/2) = \frac{\pi}{2} - 3(-\arctan(\omega/2))$$

$$\arg H(\omega) = \frac{\pi}{2} + 3\arctan(\omega/2) \text{ et enfin } \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} + 3\arctan(\omega/2)$$

$$b. \varphi'(\omega) = 3 \frac{1/2}{1 + (\omega/2)^2} = \frac{6}{\omega^2 + 4} ; \varphi'(\omega) > 0 \text{ sur }]0; +\infty[, \text{ par conséquent la fonction } \varphi \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[.$$

$$c. \lim_{\omega \rightarrow 0} \arctan \omega = 0 \text{ alors } \lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}. \text{ on a aussi } \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arctan \omega = \frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 2\pi$$

$$3.a \text{ Etude de variation de } r \mapsto r(\omega) = \frac{8\omega^3 k^3}{(4 + \omega^2)\sqrt{4 + \omega^2}} ;$$

ω	0	$+\infty$
$r'(\omega)$		+
$r(\omega)$	0	$\rightarrow 8k^3$
$\varphi'(\omega)$		+
$\varphi(\omega)$	$\pi/2$	$\rightarrow 2\pi$

$$r'(\omega) = \frac{24\omega^2 k^3 (4 + \omega^2) \sqrt{4 + \omega^2} - 8\omega^3 k^3 \left((2\omega) \sqrt{4 + \omega^2} + \frac{2\omega(4 + \omega^2)}{2\sqrt{4 + \omega^2}} \right)}{(4 + \omega^2)^2 \sqrt{4 + \omega^2}}$$

$$r'(\omega) = \frac{24\omega^2 k^3 (4 + \omega^2) \sqrt{4 + \omega^2} - 8\omega^3 k^3 \left(\frac{3\omega(4 + \omega^2)}{\sqrt{4 + \omega^2}} \right)}{(4 + \omega^2)^2 \sqrt{4 + \omega^2}} = \frac{24\omega^2 k^3 (4 + \omega^2)^2 - 24\omega^4 k^3 (4 + \omega^2)}{(4 + \omega^2)^2}$$

$$r'(\omega) = \frac{24\omega^2 k^3 (4 + \omega^2) [4 + \omega^2 - \omega^2]}{(4 + \omega^2)^2} = \frac{96\omega^2 k^3 (4 + \omega^2)}{(4 + \omega^2)^2}, \text{ donc } r'(\omega) > 0 \text{ sur }]0; +\infty[\text{ et par conséquent}$$

La fonction $r \mapsto r(\omega)$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} 8\omega^3 k^3 = 0 ; \lim_{\omega \rightarrow 0} (4 + \omega^2) \sqrt{4 + \omega^2} = \lim_{\omega \rightarrow 0} (4 + \omega^2) \times \lim_{\omega \rightarrow 0} (\sqrt{4 + \omega^2}) = 4 \times \sqrt{4} = 8, \text{ donc } \lim_{\omega \rightarrow 0} r(\omega) = 0.$$

$$r(\omega) = \frac{8\omega^3 k^3}{(4 + \omega^2) \sqrt{4 + \omega^2}} = \frac{\omega^3}{\omega^3} \times \frac{8k^3}{\left(1 + \frac{4}{\omega^2}\right) \sqrt{1 + \frac{4}{\omega^2}}} = \frac{8k^3}{\left(1 + \frac{4}{\omega^2}\right) \sqrt{1 + \frac{4}{\omega^2}}}$$

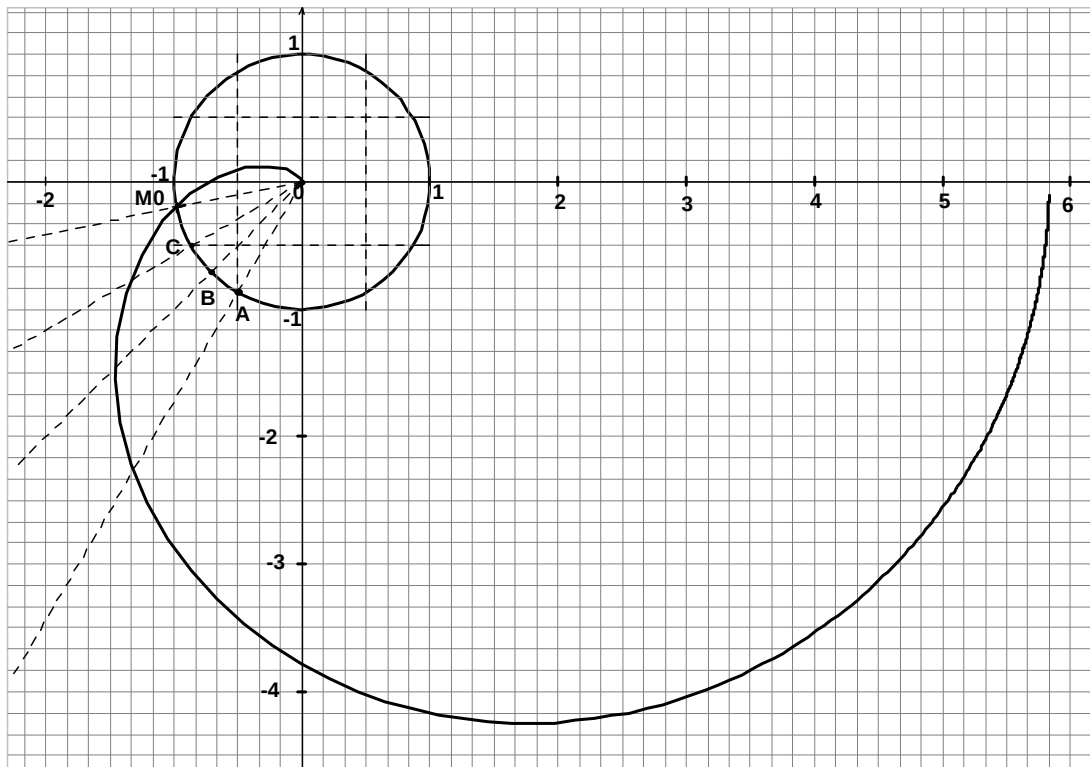
$$\text{or } \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{\omega^2}\right) = 1 ; \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{4}{\omega^2}} = \sqrt{1} = 1, \text{ donc } \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{\omega^2}\right) \sqrt{1 + \frac{4}{\omega^2}} = 1 \text{ et on a } \lim_{\omega \rightarrow +\infty} r(\omega) = 8k^3.$$

4.a. le point M_0 d'affixe $H(\omega_0)$ est sur la courbe C décrite par le point d'affixe $H(\omega)$ lorsque ω parcourt l'intervalle $]0; +\infty[$. Comme $r(\omega_0) = |H(\omega_0)| = 1$. donc le point M_0 est sur le cercle de O est de rayon 1. Donc M_0 est le point d'intersection de la courbe C et du cercle de centre O de rayon 1, avec la courbe C.

b. par définition de ω_0 , on a $|T(\omega_0)|^3 = 1$ équivaut à $\left(\frac{2\omega k}{\sqrt{4+\omega^2}} \right)^3 = 1$, $\frac{2\omega k}{\sqrt{4+\omega^2}} = 1$, car 1 est le seul nombre

réel dont le cube est égal à 1. donc $\frac{4\omega^2 k^2}{4+\omega^2} = 1$. Donc $4\omega^2 k^2 = 4 + \omega^2$ $(4k^2 - 1)\omega^2 = 4$; $k = 0,9$.

$2,24\omega^2 = 4$ et on a : $\omega_0 = \sqrt{\frac{4}{2,4}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$ et $\omega_0 \approx 1,34 \text{ rad.s}^{-1}$; donc.



Exercice 1

