

DM

N°2

MATHEMATIQUES

Exercice 1

1. On considère la fonction causale e définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e(t) = 4[U(t) - U(t-2)]$$

Tracer la représentation graphique de la fonction e dans un repère orthonormal.

2. On considère la fonction causale s définie par : $s(t) = 4(1 - e^{-t/4})U(t) - 4(1 - e^{-(t-2)/4})U(t-2)$

a. Vérifier que $s(t)$, t désignant un nombre réel quelconque, est définie par :

$$: \begin{cases} s(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s(t) = 4 - 4e^{-t/4} & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ s(t) = 4e^{-t/4}(e^{1/2} - 1) & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

b. Justifier que la fonction s est croissante sur l'intervalle $]0;2[$.

c. Déterminer $\lim_{\substack{t \rightarrow 2 \\ t < 2}} s(t)$

3.(a) Déterminer le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

(b) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$

4. Tracer la courbe représentative de la fonction s dans un repère orthonormal

Exercice 2

Soit f , la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin x(\cos x + 1)$.

1° Justifier que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0; \pi]$.

2° Montrer que $f'(x) = (\cos x + 1)(2 \cos x - 1)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$.
 (on justifiera les signes trouvés dans le tableau).

3° On appelle T la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de T .

4° Construire T et C_f sur l'intervalle $[-\pi; 3\pi]$ en justifiant la construction.

Exercice 3

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4 \sin x + 3$.

1) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a exactement 2 solutions sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

On notera α et β ces solutions ($\alpha < \beta$).

2) Donner en le justifiant, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de chacune de ces solutions.

3) En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 \cos^2(x) - 3 \sin(x)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (on prendra pour unité 1cm sur l'axe des ordonnées et on représentera π par 3 cm sur l'axe des abscisses).

1) Pourquoi f est-elle continue et dérivable sur $\mathbb{R}$?

2) Montrer que f est périodique.

3) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ et dresser son tableau de variations sur cet intervalle.

4) Déterminer les abscisses des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses sur $[0; 2\pi]$.

Tracer C sur $[0; 2\pi]$, puis sur $[-\pi; 0]$.

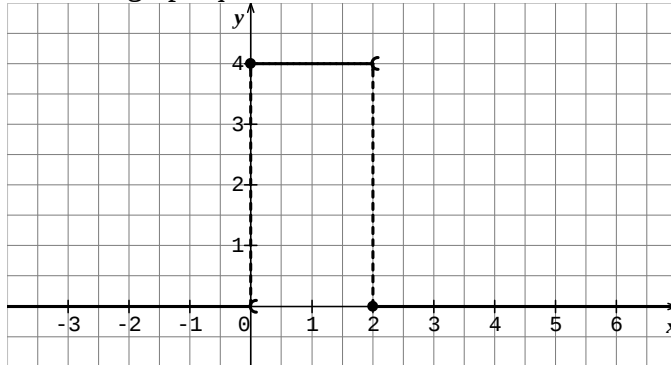
Corrigé

Exercice 1

1.a. $e(t) = 4[U(t) - U(t-2)]$

	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$U(t)$		0	1	1
$R(t-2)$		0	0	1
$e(t) = 4[U(t) - U(t-2)]$		0	4	0

Représentation graphique de la fonction e :



2. $s(t) = 4(1 - e^{-t/4})U(t) - 4(1 - e^{-(t-2)/4})U(t-2)$

	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$4(1 - e^{-t/4})U(t)$	0	$4(1 - e^{-t/4})$	$4(1 - e^{-t/4})$	
$4(1 - e^{-(t-2)/4})U(t-2)$	0	0	$4(1 - e^{-(t-2)/4})$	
$s(t) =$	0	$4(1 - e^{-t/4})$	$4e^{-t/4}(e^{1/2} - 1)$	

Par conséquent ,

Comme $U(t) = U(t-2) = 0$ donc pour tout $t \in]-\infty; 0[$, donc $s(t) = 0$;

$U(t) = 1$ pour tout $t \geq 0$ et $U(t-2) = 0$, pour tout $t < 2$, alors $4(1 - e^{-t/4})$ pour tout $t \in [0; 2[$.

Pour tout $t \in [2; +\infty[$, $U(t) = U(t-2) = 1$, alors on a :

$$s(t) = 4(1 - e^{-t/4}) - 4(1 - e^{-(t-2)/4}) = -4e^{-t/4} + 4e^{-(t-2)/4}$$

$$s(t) = -4e^{-t/4} + 4e^{-t/4} \times e^{1/2} = 4e^{-t/4}(e^{1/2} - 1)$$

2. a La fonction s est dérivable sur l'intervalle $]0; 2[$ et $s'(t) = e^{-t/4}$. Or on sait que $t \mapsto e^{at}$ est strictement positive pour tous réels a et t sur l'intervalle $]0; 2[$, par conséquent la fonction s est strictement croissante sur l'intervalle $]0; 2[$.

b. On a $\lim_{x \rightarrow 2^-} e^{-t/4} = e^{1/2}$, alors $\lim_{x \rightarrow 2^-} s(t) = 4(1 - e^{-1/2}) \approx 1,574$.

3. a. La fonction s est dérivable sur l'intervalle $]2; +\infty[$ et $s'(t) = -e^{-t/4}(e^{1/2} - 1)$.

Or on sait que $t \mapsto e^{at}$ est strictement positive pour tous réels a et t sur l'intervalle $]2; +\infty[$,

De plus $e^{1/2} - 1 > 0$, on en déduit que $s'(t) < 0$ sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

Par conséquent la fonction s est strictement décroissante sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

b. On a, à l'aide du formulaire et du théorème sur la limite des fonctions composées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-t/4} = 0$

alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} s(t) = 0$.

4.



Exercice 2

f est périodique de période 2π . On peut limiter l'étude de la fonction à un intervalle de longueur 2π . Pour obtenir la totalité de la représentation graphique de la fonction f on utilise des translations de vecteur $-2\pi\vec{i}$ ou $2\pi\vec{i}$.

$f(-x) = \sin(-x)(\cos(-x)+1) = -\sin x(\cos x+1) = -f(x)$. La fonction f est impaire on peut limiter l'étude de la fonction à "intervalle $[0; 2\pi]$.

Pour obtenir la totalité de la représentation graphique de la fonction f en on utilise d'abord la symétrie de centre O puis des translations de vecteur $-2\pi\vec{i}$ ou $2\pi\vec{i}$.

$$2^\circ f'(x) = \cos x(\cos x+1) + \sin x(-\sin x) = \cos^2 x + \cos x - \sin^2 x = 2\cos^2 x + \cos x - 1.$$

On pose $u = \cos x$ et on factorise $2u^2 + u - 1 = (u+1)(2u-1)$. On a bien : $f'(x) = (\cos(x)+1)(2\cos(x)-1)$.
Signe de $f'(x)$.

Pour tout $x \in [0; \pi]$: $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $\cos(x)+1 \geq 0$ et $\cos(x) = -1 \Leftrightarrow x = \pi$

$$2\cos(x)-1 \geq 0 \Leftrightarrow 2\cos(x) \geq 1 \Leftrightarrow \cos(x) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}.$$

autre variante

Pour tout $x \in [0; \pi]$: $\cos(x)+1=0$ et $\cos(x) = -1 \Leftrightarrow x = \pi$ Ou

$$2\cos(x)-1=0 \Leftrightarrow 2\cos(x)=1 \Leftrightarrow \cos(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}.$$

La fonction f' est continue sur $[0; \pi]$, elle garde un signe constant sur les intervalles où elle ne s'annule pas.

Si $x \in [0; \pi/3]$ $x \in [0; \pi/3]$, $f'(x)$ est du signe $f'(\pi/6)$:

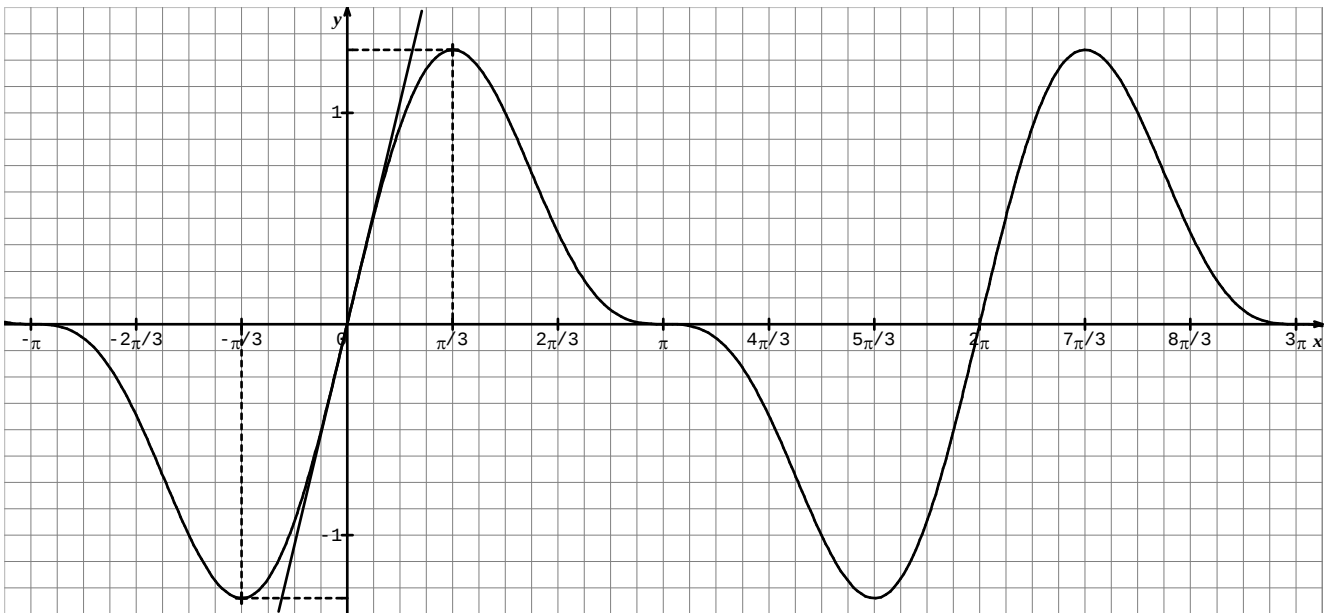
$$f'(\pi/6) = (\cos(\pi/6)+1)(2\cos(\pi/6)-1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) \times (\sqrt{3}-1) > 0$$

Si $x \in [\pi/3; \pi]$, $f'(x)$ est du signe de $f'(\pi/2) = (\cos(\pi/2)+1)(2\cos(\pi/2)-1) = -1 < 0$.

$$3^\circ f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = (\cos(0)+1)(2\cos(0)-1) = 2$$

Equation de T : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 2(x-0) + 0 = 2x$ y = 0 + 2 × (x - 0), c'est-à-dire $y = 2x$.

4° On utilise d'abord la symétrie de centre O puis la translation de vecteur $2\pi\vec{i}$



Exercice 3

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\sin(x) + 3$.

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; et $g'(x) = 4\cos x$

$g'(x)$ a le même signe que $\cos x$, donc $g'(x) \geq 0$ sur $[0; \pi/2] \cup [3\pi/2; 2\pi]$ et $g'(x) \leq 0$ sur $[\pi/2; 3\pi/2]$.

x	0	$\pi/2$		$3\pi/2$		2π	
$g'(x)$	4	+	0	-	0	+	4
$g(x)$	3	7		-1		3	

L'équation $g(x) = 0$ a exactement 2 solutions sur l'intervalle $[0; 2\pi]$

- Sur $[0; \pi/2]$, d'après le tableau de variation $g(x) \geq 3$, donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de racine.
- Sur $[\pi/2; 3\pi/2]$, g est continue et strictement décroissante et 0 est entre $g(\pi/2)$ et $g(3\pi/2)$, Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[\pi/2; 3\pi/2]$ une unique solution: on la note α .
- Sur $[3\pi/2; 2\pi]$, g est continue et strictement croissante et 0 est entre $g(3\pi/2)$ et $g(2\pi)$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[3\pi/2; 2\pi]$ une unique solution: on la note β .
- Conclusion: sur $[0; 2\pi]$ l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions: α et β .

2. Encadrement d'amplitude 10^{-2} de chacune des solutions α et β .

- D'après la calculatrice, $g(3,98) \approx 0,0257$ et $g(3,99) \approx -9 \times 10^{-4}$ alors $g(3,99) \leq g(\alpha) \leq g(3,98)$; Or g est décroissante strictement sur $[\pi/2; 3\pi/2]$, alors $3,98 \leq \alpha \leq 3,99$.
- D'après la calculatrice, $g(5,43) \approx -0,0135$ et $g(5,44) \approx 0,0129$ alors $g(5,43) \leq g(\beta) \leq g(5,44)$; or g est croissante strictement sur $[3\pi/2; 2\pi]$ alors $5,43 \leq \beta \leq 5,44$.

Signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

Il résulte de 1) et 2) que

x	0	$\pi/2$	α	$3\pi/2$	β	2π			
$g(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos^2(x) - 3\sin(x)$ et C sa courbe représentative dans un repère

orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (on prendra pour unité 1cm sur l'axe des ordonnées et on représentera π par 3 cm sur l'axe des abscisses).

1. La fonction cos est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction carré aussi, alors par composition $x \mapsto \cos^2 x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. D'autre part sin est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors (comme somme) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Les fonctions sin et cos sont périodiques et de période 2π , alors il en est de même de la fonction f .

En effet, pour tout réel x : $f(x + 2\pi) = 2\cos^2(x + 2\pi) - 3\sin(x + 2\pi) = 2\cos^2(x) - 3\sin(x) = f(x)$.

Conclusion: f est périodique de période 2π .

3. D'après 1), f est dérivable, de plus $(u^2)' = 2u'u$ alors

$f'(x) = -4\sin x \cos x - 3\cos x = -\cos x(4\sin x + 3) = (-\cos x)g(x)$. Par définition de α :

$$4\sin \alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha = -3/4. \quad f(\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 3\sin \alpha = 2(1 - \sin^2 \alpha) + 3\sin \alpha = 2\left(1 - \frac{9}{16}\right) - 3\left[-\frac{3}{4}\right] = \frac{25}{8}$$

De même $\sin \beta = -3/4$ et $f(\beta) = \frac{25}{8}$

x	0	$\pi/2$	α	$3\pi/2$	β	2π
$\cos x$	+	0	-	-	0	+
$g(x)$	+	+	+	0	-	0
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0
$f(x)$	2		$25/8$		$25/8$	2

4. Abscisses des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses sur $[0; 2\pi]$.

$$\begin{aligned} \text{Sur } [0; 2\pi] : f(x) = 0 &\Leftrightarrow 2\cos^2(x) - 3\sin(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x = 1/2 \text{ ou } \sin x = -2 \text{ (absurde car } \sin x \in [-1; 1]). \Leftrightarrow x = \pi/6 \text{ ou } x = 5\pi/6 \end{aligned}$$

Conclusion: C coupe (Ox) en deux points, d'abscisses respectives $x = \pi/6$ et $x = 5\pi/6$.

