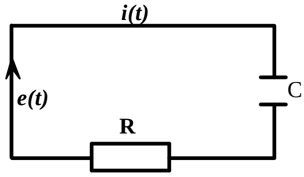
BTS BLANC MATHEMATIQUES

Exercice 1 ; 5 points

On se propose dans cette partie d'obtenir l'intensité i du courant dans le circuit ci-dessous lorsqu'il est alimenté par le signal d'entrée $e \mapsto e(t)$ .L'équation permettant de trouver l'intensité du courant est, pour $t \in [0;+\infty[$, $Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = \frac{de(t)}{dt}$ (1)



Pour déterminer la fonction i on remplace le signal d'entrée $e(t)$ définie par : $e(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{2}{3\pi}\cos 2t$. L'équation (1) devient alors :

$Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = e'(t)$ (2).

On admet que l'intensité i du courant est une fonction dérivable sur $[0;+\infty[$.

On suppose dans toute la suite de l'exercice que R = 5000 Ω et C = 10^{-4} F.

1°. Montrer que l'équation (2) peut alors se transformer et s'écrire :

$$\begin{cases} i'(t) + 2i(t) = 10^{-4}\cos t + \left(\frac{4}{15\pi} \times 10^{-3}\right)\sin 2t \quad (3) \\ t \in [0;+\infty[\end{cases}$$

2°. Vérifier que la fonction i_1 ,telle que $i_1(t) = \left(4 \times 10^{-5}\right)\cos t + \left(2 \times 10^{-5}\right)\sin t$ est une solution particulière de l'équation différentielle : $\begin{cases} i'(t) + 2i(t) = 10^{-4}\cos t \\ t \in [0;+\infty[\end{cases}$

3°. Déterminer une solution particulière i_2 de l'équation différentielle : $\begin{cases} i'(t) + 2i(t) = \left(\frac{4}{15\pi} \times 10^{-3}\right)\sin 2t \\ t \in [0;+\infty[\end{cases}$

4°. Résoudre alors l'équation différentielle (3).En déduire la solution particulière vérifiant la condition $i(0) = 0$.

Exercice 2 BTS -98 : 10 points

On se propose de résoudre le système différentiel (S) suivant, puis d'en déterminer une solution particulière. $(S)\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t) - 2y(t) \quad (E_1) \\ \frac{dy(t)}{dt} = x(t) - y(t) - 1 \quad (E_2) \end{cases}$

Les fonctions x et y sont des fonctions de la variable réelle t, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

1°. Montrer en utilisant les équations (E_1) et (E_2) que la fonction x vérifie, pour tout t dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $x''(t) + x(t) = 2 \quad (E)$

2°. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E). En déduire les solutions du système (S).

3°. Déterminer la solution particulière du système (S) vérifiant les conditions initiales

$x(0)=1$ et $y(0)=0$.

4°. On considère maintenant la courbe définie par le système d'équations paramétriques suivant :

$$\begin{cases} x(t) = 2+\sin t-\cos t \\ y(t) = 1-\cos t \end{cases}$$

a. Montrer que l'étude de ces fonctions peut se limiter à $[0;2\pi]$

b . Etudier les variations de x et y sur cet intervalle et regrouper cette étude sous forme d'un tableau unique . (on pourra vérifier que $x'(t)=\sqrt{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$)

c . On précisera les points de la courbe où les tangentes sont parallèles aux axes du repère .

d . Construire la courbe C dans un repère orthonormal (unité graphique : 5 cm).

<u>Exercice 3-BTS -96 : 5 points</u>

On se propose de déterminer la fonction f de la variable réelle t , définie sur $\mathbb{R}$, qui vérifie :

a . $f(t)=0$ pour $t<0$

b . f est deux fois dérivable sur $[0;+\infty[$

c . $f''(t)+2f'(t)+5f(t)=e^{-t}\sin(3t)$ pour tout t de $[0;+\infty[$

d . $f(0)=0$ et $f'(0)=1$

1°. Résoudre , sur $[0;+\infty[$, l'équation différentielle (E_0) : $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=0$

2° . Déterminer le réel a tel que la fonction h sur $[0;+\infty[$ par $h(t)=a\,e^{-t}\sin(3t)$ soit solution, sur $[0;+\infty[$

de l'équation différentielle (E) : $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=e^{-t}\sin(3t)$

3°. Donner la solution générale de l'équation différentielle (E).

4°. Déduire des questions précédentes la fonction cherchée vérifiant les conditions initiales

Correction partiel n°6 2009-2010

Exercice 1

1. $Ri'(t)+\frac{1}{C}i(t)=e(t)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos t-\frac{4}{3\pi}\sin 2t$ (2)

Pour tout $t\in[0;+\infty[$; $R=5000\,\Omega$ et $C=10^{-4}$ F. En dérivant (2) , on obtient :

$5000i'(t)+10^4 i(t)=\frac{1}{2}\cos t+\left(\frac{4}{3\pi}\right)\sin 2t$; d'où $\begin{cases} i'(t)+2i(t)=10^{-4}\cos t+\left(\frac{4}{15\pi}\times 10^{-3}\right)\sin 2t & (3) \\ t\in[0;+\infty[\end{cases}$.

2. $i_1(t)=\left(4\times10^{-5}\right)\cos t+\left(2\times10^{-5}\right)\sin t$; $i'_1(t)=-\left(4\times10^{-5}\right)\sin t+\left(2\times10^{-5}\right)\cos t$, on reporte dans l'équation Différentielle : $i'(t)+2i(t)=-\left(4\times10^{-5}\right)\sin t+\left(2\times10^{-5}\right)\cos t+2\left(4\times10^{-5}\right)\cos t+2\left(2\times10^{-5}\right)\sin t=10^{-4}\cos t$

$i_1(t)$ est bien une solution particulière de l'équation différentielle $i'(t)+2i(t)=10^{-4}\cos t$.

3. $\begin{cases} i'(t)+2i(t)=\left(\frac{4}{15\pi}\times10^{-3}\right)\sin 2t \\ t\in[0;+\infty[\end{cases}$ .Elle est de la forme $i_2(t)=A\cos(2t)+B\sin(2t)$;

$i'_2(t)=-2A\sin(2t)+2B\cos(2t)$. on reporte dans l'équation Différentielle : $i'(t)+2i(t)=\left(\frac{4}{15\pi}\times10^{-3}\right)\sin 2t$

et on a : $i'(t)+2i(t)=-2A\sin(2t)+2B\cos(2t)+2A\cos(2t)+2B\sin(2t)=\left(\frac{4}{15\pi}\times10^{-3}\right)\sin 2t$

en identifiant le coefficients on obtient le système :

$\begin{cases} 2B+2A=0 \\ 2B-2A=\frac{4}{15\pi}\times10^{-3} \end{cases}$ soit $B=\frac{1}{15\pi}\times10^{-3}=-A$ et $i_2(t)=\frac{1}{15\pi}\times10^{-3}\cos(2t)+\frac{1}{15\pi}\times10^{-3}\sin(2t)$

4. solution générale de l'équation différentielle (3) sans second membre est de la forme $i_0(t)=Ce^{-2t}$
Solution générale avec second membre est : $i(t)=i_0(t)+i_1(t)+i_2(t)$ et on obtient :

$i(t)=Ce^{-2t}+\left(4\times10^{-5}\right)\cos t+\left(2\times10^{-5}\right)\sin t+\frac{1}{15\pi}\times10^{-3}\cos(2t)+\frac{1}{15\pi}\times10^{-3}\sin(2t)$

Solution particulière vérifiant la condition initiale $i(0)=0$

$i(0)=C+4\times10^{-4}-\frac{1}{5\pi}10^{-3}=0$, donc $C=-4\times10^{-4}+\frac{1}{5\pi}10^{-3}$

$i(t)=\left(-4\times10^{-4}+\frac{1}{5\pi}10^{-3}\right)e^{-2t}+\left(4\times10^{-5}\right)\cos t+\left(2\times10^{-5}\right)\sin t+\frac{1}{15\pi}\times10^{-3}\cos(2t)+\frac{1}{15\pi}\times10^{-3}\sin(2t)$

Exercice 2

1°. $(S)\begin{cases} x'(t)=x(t)-2y(t) & (E_1) \\ y'(t)=x(t)-y(t)-1 & (E_2) \end{cases} \Leftrightarrow (S)\begin{cases} x''(t)=x'(t)-2y'(t) & (E_1) \\ y'(t)=x(t)-y(t)-1 & (E_2) \end{cases}$

$x''(t)=x'(t)-2y'(t)=x'(t)-2\left(x(t)-y(t)-1\right)=x'(t)-2x(t)+2y(t)+2$

On a : $2y(t)=-x'(t)+x(t)$ d'où $x''(t)=x'(t)-2y'(t)=x'(t)-2x(t)-x'(t)+x(t)+2=-2x(t)+2$

$x''(t)+2x(t)=2$

2°. $x''(t)+2x(t)=0$ a pour solution $x_H(t)=A\cos t+B\sin t$ et $x_p(t)=2$ est une solution évidente de L'équation (E) d'où $x(t)=A\cos t+B\sin t+2$.

$2y(t)=-x'(t)+x(t)=A\sin t-B\cos t+2+A\cos t+B\sin t=(A-B)\cos t+(A+B)\sin t+2$

$y(t)=\frac{1}{2}(A-B)\cos t+\frac{1}{2}(A+B)\sin t+1$

3°. $x(0)=1$ et $y(0)=0$ donne : $x(0)=A\cos 0+B\sin 0+2=A+2=1$, d'où $A=-1$

$y(0)=\frac{1}{2}(A-B)\cos 0+\frac{1}{2}(A+B)\sin 0+1=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(A-B\right)+1=0 \Leftrightarrow A-B=-2 \Leftrightarrow -B=-2-A=-1 \Leftrightarrow B=1$, donc $B=-1$ et on a enfin $x(t)=-\cos t+\sin t+2$ et $y(t)=1-\cos t$

4° .la fonction $t \mapsto x(t)=2-\cos t+\sin t$ avec $t\in[0\,;2\pi]$, comme somme de fonctions continue et dérivables sur cet intervalle . $x(0)=1$ et $x(2\pi)=1$ .de plus g est périodique de période 2π

$x(t+2\pi)=2-\cos(t+2\pi)+\sin\left(t+2\pi\right)=2-\cos(t)+\sin\left(t\right)=x(t)$. $x'(t)=\cos t+\sin t$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos t+\sin\frac{\pi}{4}\sin t\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\right)=\cos t+\sin t=x'(t)\,.$$

$$\cos(t-\frac{\pi}{4})=0 \Leftrightarrow \cos(t-\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}(t-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}+2k\pi \; ou \\ (t-\frac{\pi}{4})=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases} k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases}t=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi \; ou \\ t=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases} k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}t=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \; ou \\ t=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases} k\in\mathbb{Z}\,.\cos(t-\frac{\pi}{4})=0 \Leftrightarrow \cos(t-\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}(t-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}+2k\pi \; ou \\ (t-\frac{\pi}{4})=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases} k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}t=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi \; ou \\ t=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases} k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases}t=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \;\; ou \\ t=-\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{7\pi}{4}+2k\pi\end{cases} k\in\mathbb{Z}\,.$$

$\cos(t-\frac{\pi}{4})\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos(t-\frac{\pi}{4})\geq\cos\frac{\pi}{2} \\ t\in[0\,;\pi]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t-\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{2} \\ t\in[0\,;\pi]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t\leq\frac{3\pi}{4} \\ t\in[0\,;\pi]\end{cases}$. La fonction cosinus est décroissante sur l'intervalle $[0\,;\pi]$

$\cos(t-\frac{\pi}{4})\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos(t-\frac{\pi}{4})\geq\cos\frac{3\pi}{2} \\ t\in[\pi\,;2\pi]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t-\frac{\pi}{4}\geq\frac{3\pi}{2} \\ t\in[\pi\,;2\pi]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t\geq\frac{7\pi}{4} \\ t\in[\pi\,;2\pi]\end{cases}$. La fonction cosinus est croissante sur l'intervalle $[\pi\,;2\pi]$.

t	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$x'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x(t)$	1	$\nearrow$	$2+\sqrt{2}$	$\searrow$	$2-\sqrt{2}$	$\nearrow$	1

Etude de la fonction $y: y(t)=1-\cos t$ avec $t\in[0;\pi]$

la fonction $t\mapsto y(t)=1-\cos t$ avec $t\in[0\,;2\pi]$, comme somme de fonctions continue et dérivables sur cet intervalle . $y(0)=0$ et $y(2\pi)=1$. de plus y est paire et périodique de période 2π.

$y'(t)=\sin t$.

La fonction $t\mapsto\sin t$ est une fonction élémentaire, son signe est connu sur $[0\,;2\pi]$.

t	0		π		2π
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

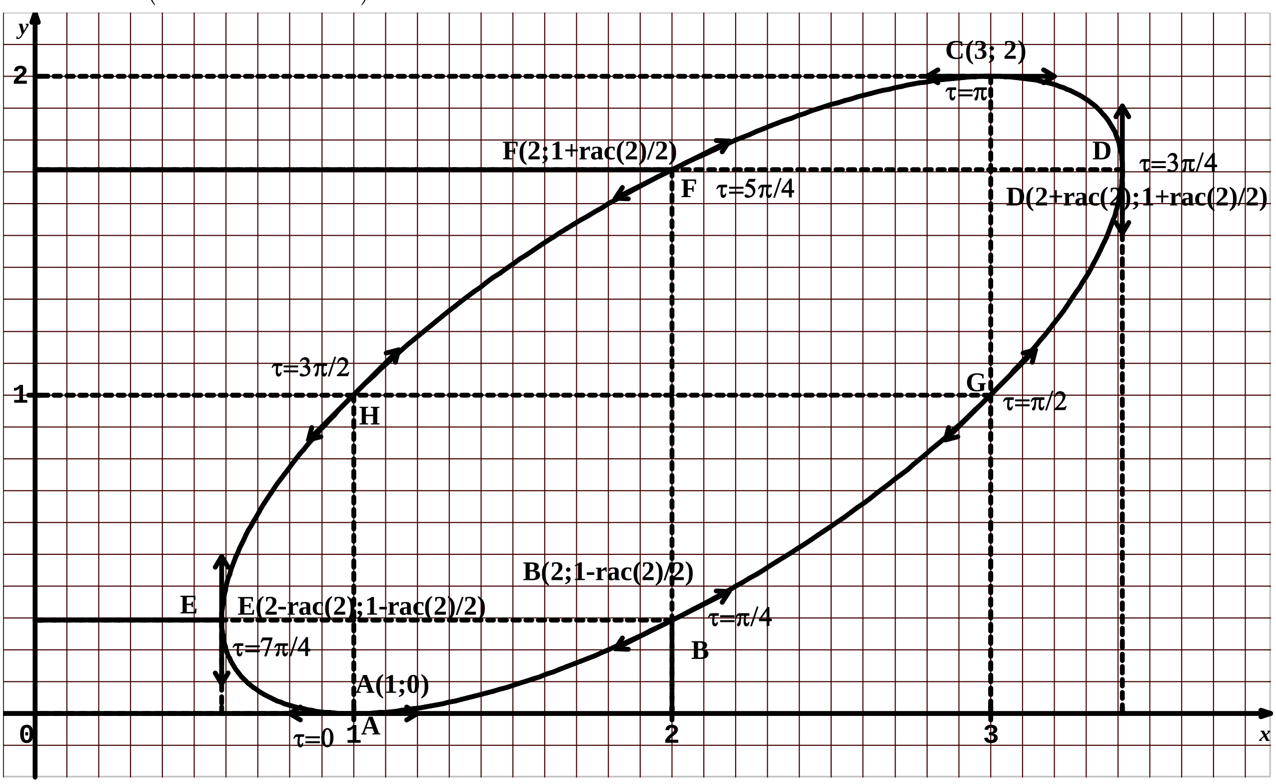
t	0		$\frac{3\pi}{4}$	π		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$x'(t)$	1	$+$	0	1	$-$	0	$+$	1
$x(t)$	1	$\nearrow$	$2+\sqrt{2}$	3	$\searrow$	$2-\sqrt{2}$	$\nearrow$	1
$y'(t)$	0	$+$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	2	$\searrow$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0

On sait que qu'un vecteur directeur de la tangente en un point régulier de paramètre t_0 est le vecteur non nul $\vec{u} = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j}$, dans un repère orthogonal .L'examen du tableau de variation montre qu'au point $A(1;0)$: $x'(0)=1$ et $y'(0)=0$,donc on a : $\vec{u}=\vec{i}$ et la tangente qu'au point $A(1;0)$ est parallèle à l'axe de l'axe des abscisses .

Au point $C(3\,;2)$: $x'(\pi)=1$ et $y'(\pi)=0$,donc on a : $\vec{u}=\vec{i}$ et la tangente qu'au point $C(3\,;2)$ est parallèle à l'axe des abscisses

Au point $D\left(2+\sqrt{2}\,;1+\sqrt{2}/2\right)$: $x'(3\pi/4)=0$ et $y'(3\pi/4)=\sqrt{2}/2$,donc on a : $\vec{u}=\sqrt{2}/2\vec{j}$ et la tangente qu'au point $D\left(2+\sqrt{2}\,;1+\sqrt{2}/2\right)$ est parallèle à l'axe des ordonnées .

Au point $E\left(2-\sqrt{2}\,;1-\sqrt{2}/2\right)$: $x'(7\pi/4)=0$ et $y'(7\pi/4)=-\sqrt{2}/2$,donc on a : $\vec{u}=-\sqrt{2}/2\vec{j}$ et la tangente qu'au point $E\left(2-\sqrt{2}\,;1-\sqrt{2}/2\right)$ est parallèle à l'axe des ordonnées .



Au point $F\left(2\,;1+\sqrt{2}/2\right)$: $x'\left(5\pi/4\right)=-\sqrt{2}$ et $y'\left(5\pi/4\right)=-\sqrt{2}/2$,donc on a : $\vec{u}=-\sqrt{2}\,\vec{i}-\left(\sqrt{2}/2\right)\vec{j}$ et le vecteur tangent au point $F\left(2\,;1+\sqrt{2}/2\right)$.

Au point $B\left(2\,;1-\sqrt{2}/2\right)$: $x'\left(\pi/4\right)=\sqrt{2}$ et $y'\left(\pi/2\right)=\sqrt{2}/2$,donc on a : $\vec{u}=\sqrt{2}\,\vec{i}+\left(\sqrt{2}/2\right)\vec{j}$ et le vecteur tangent au point $B\left(2\,;1-\sqrt{2}/2\right)$

Exercice 3

1°. Résoudre , sur $[0;+\infty[$, l'équation différentielle (E_0) : $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=0$

L'équation (E_0) a pour équation caractéristique de la forme $r^2+2r+5=0$ qui a pour solutions

Dont le discriminant $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times5=4-20=-16$ et $\sqrt{\Delta}=j\sqrt{16}=4j$

$r_1=\dfrac{-2-4j}{2}=-1-2j$ et $r_2=\overline{r_1}=\dfrac{-2+4j}{2}=-1+2j$.

Donc d'après le théorème du cours l'équation (E_0) a pour solution de la forme :

$y_H(t)=e^{-t}\left(A\cos\left(2t\right)+B\sin\left(2t\right)\right)$.

2° . Déterminer le réel a tel que la fonction h sur $[0;+\infty[$ par $h(t)=a\,e^{-t}\sin(3t)$ soit solution, sur $[0;+\infty[$

de l'équation différentielle (E) : $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=e^{-t}\sin(3t)$.

$h(t)=a\,e^{-t}\sin(3t)$; $h'(t)=-a\,e^{-t}\sin(3t)+3a\,e^{-t}\cos(3t)=a\,e^{-t}\left(3\cos(3t)-\sin(3t)\right)$.

$h''(t)=-a\,e^{-t}\left(3\cos(3t)-\sin(3t)\right)+a\,e^{-t}\left(-9\sin(3t)-3\cos(3t)\right)=a\,e^{-t}\left(-3\cos(3t)+\sin(3t)-9\sin(3t)-3\cos(3t)\right)$.

$h''(t)=a\,e^{-t}\left(-6\cos(3t)-8\sin(3t)\right)$.

$y''(t)+2y'(t)+5y(t)=a\,e^{-t}\left(-6\cos(3t)-8\sin(3t)\right)+2a\,e^{-t}\left(3\cos(3t)-\sin(3t)\right)+5a\,e^{-t}\sin(3t)=e^{-t}\sin(3t)$.

$a\,e^{-t}\left(-6\cos(3t)+6\cos(3t)-8\sin(3t)-2-\sin(3t)+5\sin(3t)\right)=e^{-t}\sin(3t)$

$-5a\,e^{-t}\sin(3t)=e^{-t}\sin(3t)\Leftrightarrow a=\dfrac{-1}{5}$, donc l'équation différentielle (E) admet une solution particulière égale à $h(t)=\dfrac{-1}{5}e^{-t}\sin(3t)$.

3°. Donner la solution générale de l'équation différentielle (E). $f(t)=y_H(t)+h(t)$

$$f(t)=e^{-t}\left(A\cos\left(2t\right)+B\sin\left(2t\right)\right)-\frac{1}{5}e^{-t}\sin(3t)$$

4°. Déduire des questions précédentes la fonction cherchée vérifiant les conditions initiale

$f(t)=e^{-t}\left(A\cos\left(2t\right)+B\sin\left(2t\right)\right)-\dfrac{1}{5}e^{-t}\sin(3t)$ avec : $f(0)=0$ et $f'(0)=1$

$$f(0)=e^{-0}\left(A\cos\left(0\right)+B\sin\left(0\right)\right)-\frac{1}{5}e^{-0}\sin(0)=A=0$$

$$f'(t)=-e^{-t}\left(A\cos\left(2t\right)+B\sin\left(2t\right)-\frac{1}{5}\sin(3t)\right)+e^{-t}\left(-2A\sin\left(2t\right)+2B\cos\left(2t\right)-\frac{3}{5}\cos(3t)\right)$$

$$f'(0)=-e^{0}\left(A\cos\left(0\right)+B\sin\left(0\right)-\frac{1}{5}\sin(0)\right)+e^{0}\left(-2A\sin\left(0\right)+2B\cos\left(0\right)-\frac{3}{5}\cos(0)\right)=1$$

$$-A+2B-\frac{3}{5}=1\Leftrightarrow 2B=1+\frac{3}{5}+A=\frac{8}{5}\Leftrightarrow B=\frac{4}{5}.$$

$$f(t)=\frac{e^{-t}}{5}\left(4\sin\left(2t\right)-\sin(3t)\right)$$