

SESSION 2008 BTS2

TP MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (11 points) Spécialités Électrotechnique et Génie optique

On rappelle que la fonction échelon unité, notée U , est définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est causale si elle est nulle sur l'intervalle $] -\infty; 0[$.

1. On considère la fonction causale e définie sur l'ensemble des nombres réels par : $e(t) = 4[U(t) - U(t-2)]$

(a) Tracer la représentation graphique de la fonction e dans un repère orthonormal.

(b) On note E la transformée de Laplace de la fonction e . Déterminer $E(p)$.

2. On considère la fonction s telle que $4s'(t) + s(t) = e(t)$ et $s(0) = 0$.

On admet que la fonction s admet une transformée de Laplace, notée S .

Démontrer que : $S(p) = \frac{1}{p(p+1/4)}(1 - e^{-2p})$

3. Déterminer les réels a et b tels que : $\frac{1}{p(p+1/4)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{(p+1/4)}$

4. Compléter le tableau ci-dessous dans lequel f représente la fonction causale associée à F :

$F(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p}e^{-2p}$	$\frac{1}{p+1/4}$	$\frac{1}{p+1/4}e^{-2p}$
$f(t)$	$U(t)$			

5. (a) Déterminer $s(t)$, t désignant un nombre réel quelconque.

(b) Vérifier que :
$$\begin{cases} s(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s(t) = 4 - 4e^{-t/4} & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ s(t) = 4e^{-t/4}(e^{1/2} - 1) & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

6. (a) Justifier que la fonction s est croissante sur l'intervalle $]0; 2[$.

(b) Déterminer $\lim_{\substack{t \rightarrow 2 \\ t < 2}} s(t)$

7. (a) Déterminer le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

(b) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$

8. Tracer la courbe représentative de la fonction s dans un repère orthonormal.

Exercice 2

On considère un système analogique « entrée-sortie » dans lequel le signal d'entrée est représenté par une fonction e et celui de sortie par une fonction s .

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $] -\infty; 0[$.

Les fonctions e et s sont des fonctions causales et on suppose qu'elles admettent des transformées de Laplace notées respectivement E et S .

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

La fonction de transfert H du système est définie par $S(p) = H(p) \times E(p)$.

On suppose, dans le cadre de cette étude, que $H(p) = \frac{1}{1+2p}$ et $e(t) = U(t)$

(a) Déterminer $S(p)$.

(b) Déterminer les réels α et β tels que $S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{(p+1/2)}$.

(c). En déduire $s(t)$.

Exercice 2 : (9 points)

Toutes spécialités

Dans ce problème, on approche un signal à l'aide d'une fonction affine par morceaux.

On désigne par E un nombre réel de l'intervalle $]0 ; 3[$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, **paire**, périodique de **période 5**, telle que :

$$f(t) = \begin{cases} E \times t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ (3-E)t + 2E - 3 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 3 & \text{si } 2 \leq t \leq 5/2 \end{cases}$$

Partie A :

Dans cette **partie, et uniquement dans cette partie**, on se place dans le cas où $E = 2$.

1. Préciser l'écriture de $f(t)$ sur chacun des intervalles $[0;1[$, $[1; 2[$ et $[2;5/2]$.
2. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-5;10]$.

Partie B :

Dans cette **partie**, on se place dans le **cas général**, c'est-à-dire dans le cas où la valeur de E n'est pas spécifiée.

On appelle S la série de Fourier associée à la fonction f .

On note $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) \right)$

1. Montrer que la valeur moyenne de la fonction f sur une période est $a_0 = 2 \frac{E+3}{5}$.
2. Déterminer b_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.
3. (a) Montrer que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$\int_0^1 t \cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) dt = \frac{5}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi}{5}\right) + \frac{25}{4n^2\pi^2} \left(\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right) - 1 \right)$$

(b) On a calculé les intégrales $\int_1^2 f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) dt$ et $\int_2^{5/2} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) dt$

On a ainsi obtenu pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$\int_0^{5/2} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) dt = \frac{25}{4n^2\pi^2} \left((2E-3) \cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right) + (3-E) \cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right) - E \right)$$

En déduire que pour tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 1 :

4. Pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1, on appelle u_n l'harmonique de rang n .

On a alors $u_n(t) = a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)$ pour tout nombre réel t .

- (a) Montrer qu'au rang 5, $u_5(t)$ est nul pour tout nombre réel t .
- (b) On appelle E_0 la valeur de E pour laquelle l'harmonique de rang 3 est nulle, c'est-à-dire la valeur de E telle que $u_3(t)$ est nul pour tout nombre réel t .

Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de E_0 .

Dans ce problème, à l'aide d'un transformateur à diode, on approche un signal sinusoïdal redressé par une fonction affine par morceaux.

Un tel signal avec $u_3(t) = u_5(t) = 0$ permettra :

- s'il est associé à un moteur, de réduire les à-coups du couple
- s'il est associé à un transformateur, d'éviter les pertes

→ s'il est associé à un filtre, d'éliminer plus facilement les harmoniques de rang impair d'ordre supérieur.

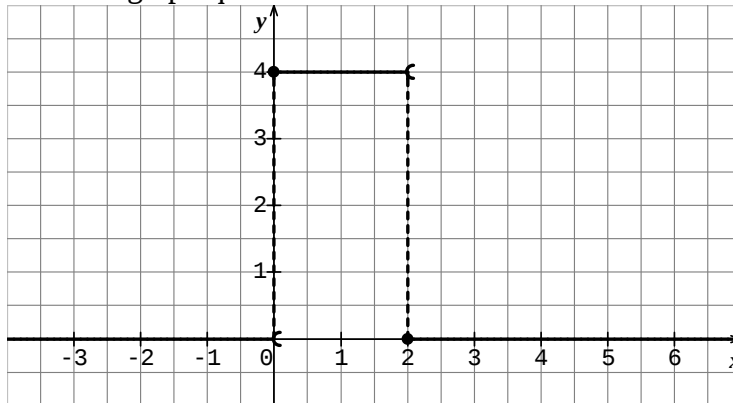
Corrigé

Exercice 1

1.a. $e(t) = 4[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-2)]$

	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$\mathcal{U}(t)$		0	1	1
$\mathcal{U}(t-2)$		0	0	1
$e(t) = 4[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-2)]$		0	4	0

Représentation graphique de la fonction e :



b) on a : $L(\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p}$ et $L(\mathcal{U}(t-a)) = \frac{1}{p}e^{-ap}$, donc $L(\mathcal{U}(t-2)) = \frac{1}{p}e^{-2p}$, d'où

$$L(e(t)) = E(p) = L[4(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-2))] = \frac{4}{p} - \frac{4}{p}e^{-2p} = \frac{4}{p}(1 - e^{-2p}).$$

2. Dans le formulaire on lit $L(f'(t)) = pF(p) - f(0^+)$ et ici $f(0^+) = 0$;

On a donc $L(s'(t)) = pS(p) - s(0^+) = pS(p)$. donc $L(4s'(t) + s(t)) = L(e(t)) = E(p)$ et en utilisant la linéarité, on obtient : $4L(s'(t)) + L(s(t)) = E(p)$. Ce qui donne $4pS(p) + S(p) = \frac{4}{p}(1 - e^{-2p})$ et

$$\text{enfin : } S(p) = \frac{4}{p(4p+1)}(1 - e^{-2p}) = \frac{1}{p(p+1/4)}(1 - e^{-2p}). \quad S(p) = \frac{1}{p(p+1/4)}(1 - e^{-2p}).$$

3. On a, par réduction au même dénominateur, $\frac{a}{p} + \frac{b}{p+1/4} = \frac{a(p+1/4) + bp}{p(p+1/4)} = \frac{(a+b)p + a/4}{p(p+1/4)}$.

Par identification avec la relation demandée : $\frac{1}{p(p+1/4)}$, on obtient : $\begin{cases} a+b=0 \\ a/4=1 \end{cases}$ d'où $a=4$ et $b=-4$.

$$\text{C'est-à-dire } S(p) = \left(\frac{4}{p} - \frac{4}{p+1/4} \right) (1 - e^{-2p}).$$

4. par lecture de la table des transformées de Laplace et que la transformée de Laplace est linéaire, donc

$$\text{on a : } L(\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p} \Leftrightarrow \mathcal{U}(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{p}\right). \quad L(\mathcal{U}(t-\tau)) = \frac{1}{p}e^{-\tau p} \Leftrightarrow \mathcal{U}(t-\tau) = L^{-1}\left(\frac{1}{p}e^{-\tau p}\right).$$

$$L(e^{-at}\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p+a} \Leftrightarrow e^{-at}\mathcal{U}(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{p+a}\right).$$

$$L(f(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau)) = F(p)e^{-\tau p} \Leftrightarrow f(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau) = L^{-1}(F(p)e^{-\tau p}).$$

$$S(p) = \frac{4}{p}(1-e^{-2p}) - \frac{4}{p+1/4}(1-e^{-2p}) = \frac{4}{p} - \frac{4}{p}e^{-2p} - \frac{4}{p+1/4} + \frac{4}{p+1/4}e^{-2p}$$

$F(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p}e^{-2p}$	$\frac{1}{p+1/4}$	$\frac{1}{p+1/4}e^{-2p}$
$f(t)$	$\mathcal{U}(t)$	$\mathcal{U}(t-2)$	$e^{-t/4}\mathcal{U}(t)$	$e^{-(t-2)/4}\mathcal{U}(t-2)$

5. a. à l'aide du tableau ci-dessus, on obtient alors pour tout réel t :

$$s(t) = 4 \times \mathcal{U}(t) - 4\mathcal{U}(t-2) - 4e^{-t/4}\mathcal{U}(t) + 4e^{-(t-2)/4}\mathcal{U}(t-2)$$

$$\text{Et enfin : } s(t) = 4(1-e^{-t/4})\mathcal{U}(t) - 4(1-e^{-(t-2)/4})\mathcal{U}(t-2).$$

b.

	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$4(1-e^{-t/4})\mathcal{U}(t)$	0	$4(1-e^{-t/4})$	$4(1-e^{-t/4})$	
$4(1-e^{-(t-2)/4})\mathcal{U}(t-2)$	0	0	$4(1-e^{-(t-2)/4})$	
$s(t) =$	0	$4(1-e^{-t/4})$	$4e^{-t/4}(e^{1/2}-1)$	

Par conséquent,

Comme $\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(t-2) = 0$ pour tout $t \in]-\infty; 0[$, donc $s(t) = 0$;

$\mathcal{U}(t) = 1$ pour tout $t \geq 0$ et $\mathcal{U}(t-2) = 0$, pour tout $t < 2$, alors $4(1-e^{-t/4})$ pour tout $t \in [0; 2[$.

Pour tout $t \in [2; +\infty[$, $\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(t-2) = 1$, alors on a :

$$s(t) = 4(1-e^{-t/4}) - 4(1-e^{-(t-2)/4}) = -4e^{-t/4} + 4e^{-(t-2)/4}$$

$$s(t) = -4e^{-t/4} + 4e^{-t/4} \times e^{1/2} = 4e^{-t/4}(e^{1/2}-1).$$

6. a. La fonction s est dérivable sur l'intervalle $]0; 2[$ et $s'(t) = e^{-t/4}$. Or on sait que $t \mapsto e^{at}$ est strictement positive pour tous réels a et t sur l'intervalle $]0; 2[$, par conséquent la fonction s est strictement croissante sur l'intervalle $]0; 2[$.

b. On a $\lim_{x \rightarrow 2^-} e^{-x/4} = e^{-1/2}$, alors $\lim_{x \rightarrow 2^-} s(t) = 4(1-e^{-1/2}) \approx 1,574$.

7. a. La fonction s est dérivable sur l'intervalle $]2; +\infty[$ et $s'(t) = -e^{-t/4}(e^{1/2}-1)$.

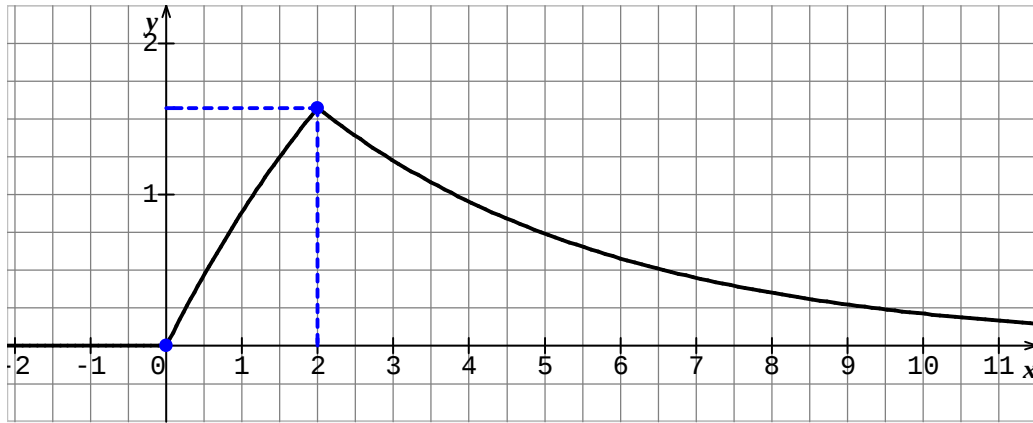
Or on sait que $t \mapsto e^{at}$ est strictement positive pour tous réels a et t sur l'intervalle $]2; +\infty[$,

De plus $e^{1/2}-1 > 0$, on en déduit que $s'(t) < 0$ sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

Par conséquent la fonction s est strictement décroissante sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

b. On a, à l'aide du formulaire et du théorème sur la limite des fonctions composées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x/4} = 0$
 alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} s(t) = 0$.

8.



Exercice 2

1. a) La fonction de transfert H du système est définie par $S(p) = H(p) \times E(p)$, et $H(p) = \frac{1}{1+2p}$

et $e(t) = \mathbf{U}(t)$. Or $E(p) = \frac{1}{p}$ d'où $S(p) = \frac{1}{p(1+2p)} = \frac{1}{2} \frac{1}{p(p+1/2)}$

b) Trouver les réels α et β tels que $S(p) = \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p+1/2} \right]$, revient à trouver α et β tels que, par

exemple, pour tout p , $\frac{1}{p(p+1/2)} = \frac{\alpha(p+1/2)}{p} + \frac{\beta p}{1+2p}$, soit encore, pour tout p ,

$$\frac{1}{p(1+2p)} = \frac{(\alpha + \beta)p + \alpha/2}{p(p+1/2)}, \text{ soit par identification avec la relation de la question précédente,}$$

on obtient le système $\alpha + \beta = 0$ et $\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ soit encore $\alpha = 1$ et $\beta = -1$. on en déduit que, pour tout p ,

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/2}$$

(c) L'originale de $\frac{1}{p}$ est la fonction échelon unité $\mathbf{U}(t)$ et l'originale de $\frac{1}{p+1/2} = e^{-t/2} \mathbf{U}(t)$

D'où : $s(t) = (1 - e^{-t/2}) \mathbf{U}(t)$.