

Exercice 1. bts-2005

1. Soit la fonction numérique g définie sur $[0; \pi]$ par $g(t) = (1 + \cos 2t) \sin^2 t$.

(a) Montrer que $g'(t) = 4 \sin t \cos^3 t$.

(b) En déduire les variations de g sur $[0; \pi]$

2. Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 1 telle que :

$$\begin{cases} f(t) = 1/2 - \tau & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ f(t) = -\tau & \text{si } \tau \leq t \leq 1/2 \end{cases} \quad \text{où } \tau \text{ est un nombre réel tel que } 0 < \tau < 1/2$$

(a) Uniquement dans cette question, on prendra $\tau = \frac{1}{6}$.

Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-1; 1]$ dans un repère orthonormal.

(b) On admet que la fonction f satisfait aux conditions de Dirichlet.

Soit S le développement en série de Fourier associé à la fonction f .

$$\text{Montrer que : } S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin(2n\pi\tau) \cos(2n\pi t)$$

3. On décide de ne conserver que les harmoniques de rang inférieur ou égal à 2.

$$\text{Soit la fonction numérique } h \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } h(t) = \frac{1}{\pi} \sin(2\pi\tau) \cos(2\pi t) + \frac{1}{2\pi} \sin(4\pi\tau) \cos(4\pi t)$$

On désigne par E_h^2 le carré de la valeur efficace de h sur une période.

(a) A l'aide de la formule de Parseval, déterminer E_h^2 .

(b) Montrer que $E_h^2 = \frac{1}{2\pi^2} g(2\pi\tau)$.



4. Déterminer la valeur de τ rendant E_h^2 maximal.

Exercice 2-bts-2003

A. Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales : $I_n = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(nx) dx$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} x \cos(nx) dx$.

1°) Montrer que $I_n = \frac{-1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$.

2°) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_n = \frac{\pi}{2n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2}$

3°) Déterminer $I_1; I_2$ et I_3 , puis $J_1; J_2$ et J_3

B. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2π telle que $\begin{cases} f(t) = \frac{2E}{\pi} t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ f(t) = E & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$ où E est un nombre réel donné, strictement positif.

1°) Tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi; 3\pi]$.

(on prendra $E = 2$ uniquement pour construire la courbe représentant f).

2°) Soit a_0 et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, a_n et b_n les coefficients de Fourier associés f .

a) Calculer a_0 .

b) Pour tout $n \geq 1$, donner la valeur de b_n .

c) En utilisant la partie A, vérifier que pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{2E}{\pi^2} (2J_n + \pi I_n)$.

Partie C

1°) Déterminer les coefficients a_1, a_2, a_3 .

2°) Calculer F^2 , carré de la valeur efficace de la fonction f sur une période.

On rappelle que dans le cas où f est paire, périodique de période T , on a : $F^2 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt$

3°) On sait par ailleurs que la formule de Bessel-Parseval donne : $F^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$

Soit P le nombre défini par $P = a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$.

Calculer P , puis donner la valeur décimale au millième du $\frac{P}{F^2}$.

Ce dernier résultat très proche de 1 justifie que dans la pratique, on peut négliger les harmoniques d'ordre supérieur à 3.

Exercice 3 - Toutes spécialités 2006. Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soient α et β deux nombres réels.

Soit f une fonction périodique de période 1, définie sur l'intervalle $[0; 1[$ par $f(t) = \alpha t + \beta$.

On appelle a_0 , a_n et b_n les coefficients de Fourier associés à la fonction f .

1. Montrer que $a_0 = \frac{\alpha}{2} + \beta$.

2. Montrer que $b_n = \frac{-\alpha}{n\pi}$ pour tout nombre entier naturel n non nul.

On admet que $a_n = 0$ pour tout entier naturel n non nul.

3. On se propose de déterminer les nombres réels α et β pour que le développement S en série de

Fourier de la fonction f soit défini pour tout nombre réel t par $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2\pi n t)$.

(a) Déterminer les nombres réels α et β tels que $a_0 = 0$ et $b_n = \frac{1}{n}$.

En déduire l'expression de la fonction f .

(b) Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-2; 2]$ dans un repère orthogonal.

Partie B

On veut résoudre l'équation différentielle : $s''(t) + s(t) = f(t)$

On admet que l'on obtient une bonne approximation de la fonction s en remplaçant $f(t)$ par les premiers termes du développement en série de Fourier de la fonction f obtenus dans la partie A, c'est-à-dire par :

$$f(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(4\pi t)$$

Soit (E) l'équation différentielle ; $s''(t) + s(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(4\pi t)$

1. Vérifier que la fonction s_1 définie pour tout nombre réel t par : $s_1(t) = \frac{1}{1-4\pi^2} \sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)} \sin(4\pi t)$

est solution de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E).



Correction

Exercice 1-2005 -bts

1. Soit la fonction numérique g définie sur $[0; \pi]$ par $g(t) = (1 + \cos 2t) \sin^2 t$.

$$g'(t) = -2 \sin t \cos t \sin^2 t + (1 + \cos^2 t) 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \cos t (-\sin^2 t + 1 + \cos^2 t)$$

(a) Calculons $g'(t)$:

$$= 2 \sin t \cos t (\cos^2 t + \cos^2 t) = 4 \sin t \cos^3 t$$

(b) Sur $[0; \pi]$, la fonction sinus est positive, par conséquent $g'(t)$ est du signe de $\cos t$.

Si $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: $g'(t) > 0$ donc g est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Si $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$: $g'(t) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$



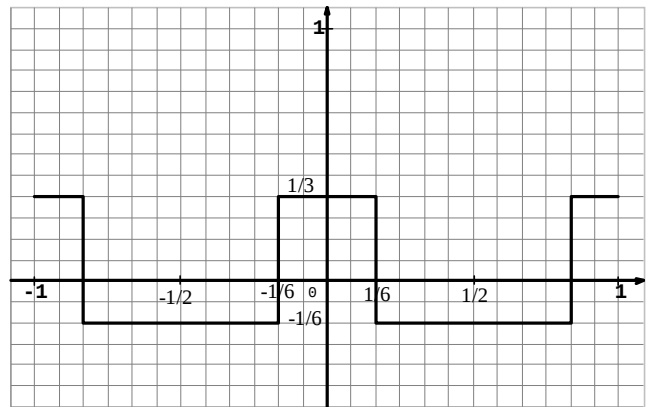
2. (a) Dans cette question, on a : $f(t) = \frac{1}{3}$ sur $\left[0; \frac{1}{6}\right]$ et $f(t) = -\frac{1}{6}$ sur $\left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right]$

Avec la parité de la fonction f , on peut tracer la courbe sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ en utilisant la symétrie par

rapport à l'axe des ordonnées. De plus, la fonction f est périodique de période 1, donc on obtient la représentation ci-contre :

(b) Calculons les coefficients de Fourier de la fonction f :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt \\ &= 2 \left[\int_0^{\tau} \left(\frac{1}{2} - \tau \right) dt + \int_{\tau}^{1/2} (-\tau) dt \right] \\ &= 2 \left[\left(\frac{1}{2} - \tau \right) \cdot \tau + (-\tau) \cdot \left(\frac{1}{2} - \tau \right) \right] = 0 \end{aligned}$$



Pour $n \geq 1$, on a : $a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos n\pi t dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos 2n\pi t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\pi} f(t) \cos 2n\pi t dt$

$$a_n = 4 \left[\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \tau \right) \cos 2n\pi t dt + \int_0^{\pi} (-\tau) \cos 2n\pi t dt \right] = 4 \left[\left(\frac{1}{2} - \tau \right) \left[\frac{\sin 2n\pi t}{2n\pi} \right]_0^{\tau} + (-\tau) \left[\frac{\sin 2n\pi t}{2n\pi} \right]_{\tau}^{\pi/2} \right]$$

$$\begin{aligned} a_n &= 4 \left[\left(\frac{1}{2} - \tau \right) \left[\frac{\sin 2n\pi t}{2n\pi} \right]_0^{\tau} + (-\tau) \left[\frac{\sin 2n\pi t}{2n\pi} \right]_{\tau}^{\pi/2} \right] = \frac{2}{n\pi} \left[\left(\frac{1}{2} - \tau \right) \sin 2n\pi\tau - \tau \sin n\pi + \sin(2n\pi\tau) \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[\left(\frac{1}{2} - \tau \right) \sin 2n\pi\tau + \sin(2n\pi\tau) \right] = \frac{1}{n\pi} \sin 2n\pi\tau \end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$, on a $b_n = 0$ car la fonction f est paire. On obtient donc $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\pi t)$

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin(2n\pi\tau) \cos(2n\pi t).$$

3. Ecrivons la formule de Parseval : $E^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$. On sait que $a_0 = 0$; calculons a_1 et a_2 :

$a_1 = \frac{1}{\pi} \sin(2\pi\tau)$ et $a_2 = \frac{1}{\pi} \sin(4\pi\tau)$. On a donc :

$$E_h^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi^2} \sin^2(2\pi\tau) + \frac{1}{4\pi^2} \sin^2(4\pi\tau) \right] = \frac{1}{2\pi^2} \left[\sin^2(2\pi\tau) + \frac{1}{4} \sin^2(4\pi\tau) \right], \text{ de plus, on sait que : } \sin(2u) = 2 \sin u \cos u.$$

Donc on peut écrire : $\sin^2(4\pi\tau) = 4\sin^2(2\pi\tau)\cos^2(2\pi\tau)$.

$$E_h^2 = \frac{1}{2\pi^2} \left[\sin^2(2\pi\tau) + \frac{1}{4}\sin^2(4\pi\tau) \right] = \frac{1}{2\pi^2} \left[\sin^2(2\pi\tau) + \sin^2(2\pi\tau)\cos^2(2\pi\tau) \right] = \frac{1}{2\pi^2} \left[\sin^2(2\pi\tau)(1 + \cos^2(2\pi\tau)) \right].$$

$$E_h^2 = \frac{1}{2\pi^2} \left[\sin^2(2\pi\tau)(1 + \cos^2(2\pi\tau)) \right] = \frac{1}{2\pi^2} g(2\pi\tau).$$

4. D'après la question 1. b), l'expression $g(t)$ est maximum pour $\frac{\pi}{2}$.



Par conséquent E_h^2 est maximum pour : $2\pi\tau = \frac{\pi}{2}$, d'où $\tau = \frac{1}{4}$.

Exercice-2 -bts-2003

1. Calculons I_n :
$$I_n = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(nx) dx = \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{n} \sin \pi - \frac{1}{n} \sin n \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

On obtient : $I_1 = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$; $I_2 = -\frac{1}{2} \sin \pi = 0$ et $I_3 = -\frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{3}$.

On intègre par parties, en posant : $u(x) = x$; $u'(x) = 1$; $v'(x) = \cos nx$; $v(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ avec $n \in \mathbb{N}$

Donc :
$$J_n = \int_0^{\pi/2} x \cos nx dx = \left[\frac{x}{n} \sin(nx) \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin nx dx = \left[\frac{x}{n} \sin(nx) \right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{1}{n^2} \cos nx \right]_0^{\pi/2}$$

$$J_n = \int_0^{\pi/2} x \cos nx dx = \frac{\pi}{2n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0 + \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2} \cos 0 = \frac{\pi}{2n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}$$

D'où : $J_n = \frac{\pi}{2n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}$. On obtient : $J_1 = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$

$$J_2 = \frac{\pi}{4} \sin(\pi) + \frac{1}{4} \cos \pi - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} ; J_3 = \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{9} = -\frac{\pi}{6} - \frac{1}{9}.$$

Partie B

1. représentation graphique de la fonction f .

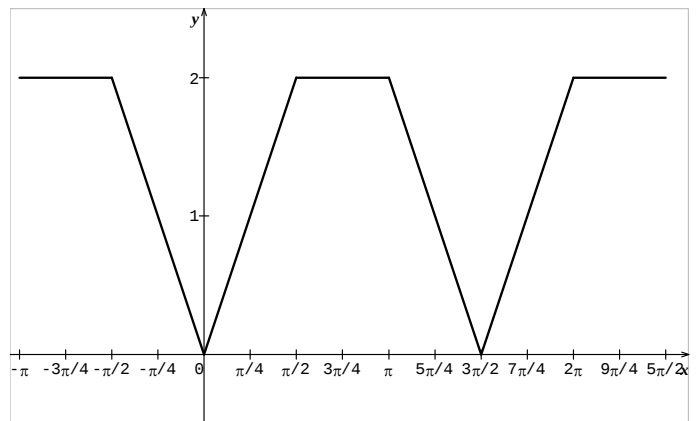
2.a. Calculons a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt, \text{ car } f \text{ est}$$

paire et 2π -périodique ; donc :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{2E}{\pi} t dt + \int_0^{\pi/2} E dt \right].$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2E}{\pi} \frac{t^2}{2} + Et \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2E}{\pi} \frac{\pi^2}{8} + E \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{\pi} \left(\frac{3E\pi}{4} \right) = \frac{3E}{4}$$



b. la fonction f est paire donc pour tout entier $n \geq 1$, on a $b_n = 0$.

c. Calculons a_n , pour $n \geq 1$: $a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos ntdt.$

Car $t \mapsto f(t) \cos nt$ est paire ; donc $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{2E}{\pi} t \cos ntdt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} E \cos ntdt = \frac{4E}{\pi^2} J_n + \frac{2E}{\pi} I_n$

et $a_n = \frac{2E}{\pi^2} (2J_n + \pi I_n)$. Calculons $a_{4p} = \frac{2E}{\pi^2} (2J_{4p} + \pi I_{4p}) = 0$, puisque $I_{4p} = -\frac{1}{4p} \sin \frac{4p\pi}{2} = -\frac{1}{4p} \sin 2p\pi = 0$

et $J_{4p} = \frac{\pi}{8p} \sin(2p\pi) + \frac{1}{16p^2} \cos 2p\pi - \frac{1}{16p^2} = 0 + \frac{1}{16p^2} - \frac{1}{16p^2} = 0.$

Partie C

1. calculons a_1, a_2, a_3 : $a_1 = \frac{2E}{\pi^2} (2J_1 + \pi I_1) = \frac{2E}{\pi^2} \left(2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) - \pi \right) = -\frac{4E}{\pi^2}$

$$a_2 = \frac{2E}{\pi^2} \left(2 \left(-\frac{1}{2} \right) + \pi \times 0 \right) = \frac{-2E}{\pi^2} \quad \text{et} \quad a_3 = \frac{2E}{\pi^2} (2J_3 + \pi I_3) = \frac{2E}{\pi^2} \left(2 \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{1}{9} \right) + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{2E}{\pi^2} \left(-\frac{\pi}{3} - \frac{2}{9} + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{4E}{9\pi^2}.$$

Calculons F^2 :

$$F^2 = V^2 \text{eff} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t)^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(t)^2 dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{4E^2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} t^2 dt + \int_0^{\pi/2} E^2 dt \right] = \frac{4E^2}{\pi^3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{\pi} [E^2 t]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{4E^2 \pi^3}{24\pi^3} + \frac{1}{\pi} E^2 \frac{\pi}{2} = \frac{E^2}{6} + \frac{E^2}{2} = \frac{2E^2}{3}$$

$$3. \text{Calculons } P : P = a_0^2 + \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = \left(\frac{9E^2}{16} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{16E^2}{\pi^4} \right) + \left(\frac{4E^2}{\pi^4} \right) + \left(\frac{16E^2}{81\pi^4} \right) \right] = \frac{9E^2}{16} + \frac{818E^2}{81\pi^4}.$$

$$\text{Calculons } \frac{P}{F^2} : \frac{P}{F^2} = \left(\frac{9E^2}{16} + \frac{818E^2}{81\pi^4} \right) \times \frac{3}{2E^2} = \frac{37}{32} + \frac{409}{27\pi^4} \approx 0,999.$$

Exercice 3-BTS-2006



$$1. a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T (\alpha t + \beta) dt = \left[\alpha \frac{t^2}{2} + \beta t \right]_0^1 = \frac{\alpha}{2} + \beta \quad \text{avec } T=1.$$

$$2. \text{La pulsation est } \omega = 2\pi \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T (\alpha t + \beta) \sin(2\pi n t) dt = 2 \int_0^1 (\alpha t + \beta) \sin(2\pi n t) dt \quad \text{avec } T=1.$$

On intègre par parties en posant : $u(t) = \alpha t + \beta$, alors $u'(t) = \alpha$; $v'(t) = \sin(2\pi n t)$, alors $v(t) = -\frac{1}{2\pi n} \cos(2\pi n t)$

$$b_n = 2 \int_0^1 (\alpha t + \beta) \sin(2\pi n t) dt = 2 \left(- \left[\frac{(\alpha t + \beta) \cos(2\pi n t)}{2\pi n} \right]_0^1 + \frac{\alpha}{2\pi n} \int_0^1 \cos(2\pi n t) dt \right)$$

D'où

$$b_n = 2 \left(\frac{-1}{2\pi n} [(\alpha + \beta) - \beta] + \frac{\alpha}{2\pi n} \left[\frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n} \right]_0^1 \right) \quad \text{et} \quad b_n = 2 \left(\frac{-\alpha}{2\pi n} + 0 \right) = \frac{-\alpha}{\pi n}.$$

$$3.a. \text{On veut que } a_0 = 0 \text{ et } b_n = \frac{1}{n}, \text{ donc d'après 3. on a : } \begin{cases} \frac{\alpha}{2} + \beta = 0 \\ \frac{-\alpha}{n\pi} = \frac{1}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\pi \\ \beta = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

L'expression de f est alors $f(t) = -\pi t + \frac{\pi}{2}$.

b. on construit alors la courbe représentative de f sur $[-2; 2]$.

Partie B

$$1.a \text{ on a : } s_1(t) = \frac{1}{1-4\pi^2} \sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)} \sin(4\pi t) ;$$

$$s_1'(t) = \frac{2\pi}{1-4\pi^2} \cos(2\pi t) + \frac{4\pi}{2(1-16\pi^2)} \cos(4\pi t)$$

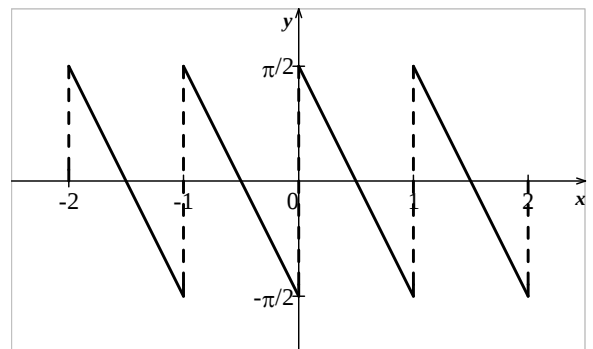
$$s_1''(t) = -\frac{4\pi^2}{1-4\pi^2} \sin(2\pi t) - \frac{16\pi^2}{2(1-16\pi^2)} \sin(4\pi t).$$

$$s_1''(t) + s_1(t) = -\frac{4\pi^2}{1-4\pi^2} \sin(2\pi t) - \frac{16\pi^2}{2(1-16\pi^2)} \sin(4\pi t) + \frac{1}{1-4\pi^2} \sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)} \sin(4\pi t)$$

$$= \frac{1-4\pi^2}{1-4\pi^2} \sin(2\pi t) + \frac{1-16\pi^2}{2(1-16\pi^2)} \sin(4\pi t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(4\pi t)$$

Par conséquent s_1 est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Il faut chercher la solution générale de l'équation différentielle homogène associée à (E) : $s''(t) + s(t) = 0$.



L'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$, dont le discriminant est égal à -1 . cette équation possède deux racine complexes conjuguées qui sont j et $-j$.

La solution générale de l'équation homogène est alors : $s_0(t) = \lambda \sin t + \mu \cos t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

La solution générale de (E) est donnée par la somme entre une solution particulière de l'équation complète et la solution générale de l'équation homogène associée , d'où :

$$s(t) = s_0(t) + s_1(t)$$



$$s_0(t) = \lambda \sin t + \mu \cos t \quad s(t) = \lambda \sin t + \mu \cos t + \frac{1}{1-4\pi^2} \sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)} \sin(4\pi t) .$$