MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

DIRECTION DES EXAMENS ET DES CONCOURS (DEXCO)

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR / SESSION 2021

FILIERE INDUSTRIELLE : ELECTROTECHNIQUE

EPREUVE : **MATHEMATIQUES**

Durée de l'épreuve : 2 H **Coefficient de l'épreuve : 3**

EXERCICE 1

On considère la fonction f de la variable réelle t définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(t) = \left[sin\left(\frac{t}{2}\right)\right] e^{-t/2}$

1)

a) Montrer que $f'(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-t/2} cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ (f 'désigne la dérivée de f)

b) Etudier le signe de f '(t) sur l'intervalle $[0, \pi]$

c) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; \pi]$

d) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

e) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur $[0, \pi]$

2) On définit la fonction g par $g(t) = f(t)u(t) - f(t - \pi)\, u(t - \pi)$ où u désigne la fonction échelon unité.

a) Donner l'expression de g(t) sur $[0, \pi[$; puis sur $[\pi; +\infty[$

b) Calculer les transformées de Laplace suivantes ; transformée de Laplace notée $\mathscr{L}$

b-1 : $\mathscr{L}\left[\sin\left(\frac{t}{2}\right) u(t)\right]$

b-2 : $\mathscr{L}\ [f(t)u(t)]$

b-3 : $\mathscr{L}\ [f(t - \pi)u(t - \pi)]$

c) En déduire la transformée de Laplace de g(t)

3) Le signal g(t) est remplacé par le signal e(t) = $u(t) - u(t - \pi)$ que l'on applique à l'entrée d'un système « $entrée - sortie$ » de fonction de transfert $H(p) = \frac{p}{2p^2+2p+1}$.

a) Déterminer la transformée de Laplace $E(p)$ de $e(t)$

b) On admet que $S(p) = H(p).E(p)$ *où* $S(p) = \mathscr{L}[s(t)]$ et $E(p) = \mathscr{L}[e(t)]$

4)

a) Mettre le polynôme $2p^2 + 2p + 1$ sous sa forme canonique

b) On pose s(t) = $\mathscr{L}^{-1}[S(p)]$ où $\mathscr{L}^{-1}$ désigne la transformée de Laplace inverse
Déterminer s(t)

EXERCICE 2

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique B= (e_1 ; e_2 ; e_3)
Pour tout réel a et b , on définit $f_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ par :

$f_{a,b}(1\,;0\,;0) = (1\,;a-1\,;0)$

$f_{a,b}(2\,;1\,;0) = (2\,;2a+b-3\,;0)$

$f_{a,b}(1\,;1\,;1) = (a+1;\,a+b-2\,;b)$

1)

a) Donner les expressions de $f_{a,b}(e_1)$, $f_{a,b}(e_2)$ et $f_{a,b}(e_3)$ en fonction de e_1, e_2 et e_3.

b) Si U est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que U $=xe_1+ye_2+ze_3$
Donner les coordonnées de $f_{a,b}$(U) dans la base B

c) Si $M_{a,b}$ désigne la matrice de l'endomorphisme $f_{a,b}$ relativement à la base $\mathcal{B}$,

Montrer que ${}^tM_{a,b}=\begin{bmatrix}1 & a-1 & 0\\ 0 & b-1 & 0\\ a & 0 & b\end{bmatrix}$ où ${}^tM_{a,b}$ désigne la transposée de la matrice $M_{a,b}$.

(N.B : Toute matrice plaquée ne sera pas prise en compte)

2) a) L'endomorphine $f_{a,b}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ si $a \in E$ et $b \in F$ où E et F sont des parties de $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

b) Déterminer le noyau et l'image de $f_{a,1}$ où $f_{a,1}= f_{a,b}$ pour b = 1

3)

a) Déterminer le polynôme caractéristique $p_{A_{a,b}}(x)$= det ($A_{a,b}-xI$)

b) Déterminer toutes les valeurs propres de la matrice $A_{a,b}$

c) Montrer que si b $\neq$ 1 et $b\neq 2$, alors l'endomorphisme $f_{a,b}$ est diagonalisable.

d) Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme $f_{a,2}$ est –il diagonalisable ? Justifier.

4)

Intégrer le système différentiel (S) défini par

$$(S):\begin{bmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\\ \frac{dz}{dt}\end{bmatrix}=M_{1,2}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

Sachant que $x(0)=-1$; $y(0)$ = 2 et z(0) = 3 et $M_{1,2}$ désigne la matrice $M_{a,b}$ pour $a=1$ et b = 2.

****