REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union - Discipline -Travail

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

IT Academy

University of Technologies and Solutions Integrator

<table>
<tr><td rowspan="4">Epreuve de :

MATHEMATIQUES GENERALES & STATISTIQUES</td><td rowspan="4">**BTS BLANC N°2**</td><td>**Année académique** : 2020 - 2021</td></tr>
<tr><td>**Filière** : IDA</td></tr>
<tr><td>**Durée** : 3 heures</td></tr>
<tr><td>**Coefficient** : 2</td></tr>
</table>

EXERCICE 1 : ETUDE DE FONCTION 8 points

PARTIE A

Soit la fonction numérique g définie et dérivable sur l'intervalle]0, +∞[par

$g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + lnx$

1. Calculer $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$
2. a) Démontrer que ∀ x∊]0, +∞[, g'(x)= $g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$

   b) En déduire le sens de variation de g.

   c) Dresser le tableau de variation de la fonction g.
3. a) Démontrer que l'équation $x \in]0, +\infty[$, $g(x) = 0$ admet une solution unique α

   b) Justifier que 2,55 < α < 2,56.

   c) En déduire le signe de $g(x)$.

PARTIE B

On considère la fonction f dérivable sur]0, +∞[par $f(x) = \left(\frac{1}{x} - lnx\right).e^{-x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) unité graphique $OI = 2\,cm \;\; et \;\; OJ = 10\,cm$.

1. a) Calculer la limite de f en O et en $+\infty$

   b) Donner une interprétation graphique de chacun des résultats.

2. Démontrer que $f(\alpha) = -(\frac{1+\alpha}{\alpha^2})e^{-\alpha}$

3) a) Démontrer que $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = e^{-x}.g(x)$.

b) En utilisant la partie A, déterminer les variations de f.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

5. Construire la tangente (T) et la courbe (C) dans le repère (O, I, J).

EXERCICE 2 : 7 points

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, muni da sa base canonique B = (e_1, e_2, e_3) et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{cases} f(e_1) & = e_2 + e_3 \\ f(e_1 - 3e_3) & = -2e_2 - 2e_3 \\ f(e_1 + 2e_2) & = 2e_1 + e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

1°) a) Montrer que la matrice de l'endomorphisme f relativement à la base B est la matrice notée A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ (NB : toute matrice plaquée vaut zéro).

b. L'endomorphisme f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.

a) Déterminer le noyau N et l'image Im de l'endomorphisme f.

2°) On pose $g = fof$

a) Montrer que la matrice G de l'endomorphisme g relativement à la base B est la matrice est définie par :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Montrer que 0 est une valeur propre de l'endomorphisme g.

c) Montrer que la matrice $\mathrm{G} - \mathrm{I}_3$ n'est pas inversible. (I_3 étant la matrice identité d'ordre 3).

d) En déduire des questions précédentes, toutes les valeurs propres de la matrice G.

3°) a) La matrice G est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

b) $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1$ et E_4 désigne respectivement les sous – espaces propres de g associés aux valeurs propres 0, 1 et 4. Déterminer $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1$ et E_4.

b) On pose B' $= (v_0, v_1, v_2)$ avec $v_0 = (1,0,-1)$; $v_1 = (1,-1,0)$ et $v_2 = (1,2,3)$.
Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

4°) Soit P la matrice de passage de la base B à la base B'.

a) Justifier que la matrice P est inversible et donner l'expression de P^{-1}.
b) Montrer que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{GP}$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

5°) On admet que $\mathrm{G}^{\mathrm{n}} = \mathrm{PD}^{\mathrm{n}}\mathrm{P}^{-1}$.
Déterminer la matrice C de g^{n} relativement à la base B où $\mathrm{g}^{\mathrm{n}} = \mathrm{gogogo} \ldots \mathrm{og}$ (n fois)

7. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + 2y + 2z \end{cases}$$ avec $x(0) = 1$, $y(0) = -2$ et $z(0) = 3$

EXERCICE 3 : 5 points

Dans une compagnie d'assurance, on a constaté que sur les 1200 assurés, 60 avaient envoyé au moins une déclaration de sinistre dans l'année.

On dira dans tout cet exercice que ces 60 dossiers sont de « types DS ».

On prélève au hasard et avec remise n dossiers parmi les 1200 dossiers des assurés. X est la variable aléatoire donnant, parmi les n dossiers prélevés, le nombre de dossiers de « types DS ». Les résultats des probabilités demandées seront donnés sous forme décimale, arrondies à 10^{-2} près.

1°) Quelle est la loi suivie par X ? Justifier votre réponse.

Donner les paramètres de cette loi.

2°) Dans cette question, on prend $n = 10$. Calculer les probabilités :

a) Pour qu'un seul dossier soit de « type DS » ;
b) Pour qu'il ait, parmi ces 10 dossiers, au moins un dossier de « type DS ».

3°) Dans cette question, on prend $n = 60$.

a) Montrer que la loi suivie par X peut être approchée par la loi Poisson dont on précisera le paramètre. On note Y la variable aléatoire suivant cette loi de Poisson.
b) Calculer la probabilité $P(Y \geq 2)$.

4°) Dans cette question, on prend $n = 200$.

a) Montrer que la loi suivie par X peut être approchée par la loi Normale dont on précisera les paramètres. Soit Z la variable aléatoire suivant cette loi de Normale.
b) Calculer les probabilités suivantes : $P(Z \leq 9)$ et $P(Z \geq 15)$