

University of Technologies and Solutions Integrator

Epreuve de : MATHEMATIQUES GENERALES, STATISTIQUES & PROBABILITE	BTS BLANC N°1 (26.04.2022) / 8h – 10h	Année académique : 2021 - 2022
		Filière : IDA
		Durée : 2
		Coefficient :

EXERCICE 1 : Étude d'une famille de fonctions

A tout entier naturel non nul n , on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7}$$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE I : Etude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$

1. a) Démontrer que la courbe C_1 admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
b) Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
c) Démontrer que pour tout réel x on a $0 < f_1(x) < 4$
2. a) Déterminer les coordonnées de I_1 , intersection de la droite (D) d'équation $y = 2$ et de la courbe C_1 .
b) Déterminer une équation de la tangente (T_1) à la courbe C_1 au point I_1 .
3. a) Montrer que pour tout réel $m \in]0 ; 4[$, l'équation $f_1(x) = m$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$. On notera α cette solution.
b) Déterminer l'expression exacte de α en fonction de m .
4. a) Dresser le tableau de variation de la fonction f_1 .
b) Justifier que la courbe C_1 passe par le point $A(0; \frac{1}{2})$.
c) Tracer dans un même repère, C_1 , (D), ses asymptotes et sa tangente (T_1) .

PARTIE II : Etude de certaines propriétés de f_n

1. a) Pour tout entier naturel non nul n , démontre que les courbes C_n admettent les mêmes asymptotes.
b) Justifie que toutes les courbes C_n passent par le même point $A(0; \frac{1}{2})$.
c) Justifie que pour tout entier naturel non nul n , $f_n'(x) = \frac{28ne^{nx}}{(e^{nx}+7)^2}$
d) En déduire que les fonctions f_n sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.
2. a) Montrer que pour tout entier non nul n , la courbe C_n et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera les coordonnées. On note I_n ce point.
b) Déterminer une équation de la tangente (T_n) à la courbe C_n au point I_n .
c) Montrer que les tangentes (T_n) sont concourantes en un point dont on déterminera les coordonnées.
(Indication : on peut constater qu'elles ont toutes la même ordonnée à l'origine).
3. Tracer C_1, C_2 et C_3 dans un même repère.

EXERCICE 2 : Algèbre linéaire.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(1, 0, 0) = (-4, 6, -6)$$

$$f(1, 1, 0) = (-1, 5, -3)$$

$$f(0, -2, 1) = (0, -4, 2)$$

1. a) Ecrire $f(e_1)$; $f(e_2)$ et $f(e_3)$ en fonction de e_1, e_2 et e_3 .
b) En déduire que la transposée de la matrice A notée t_A est telle que :
$$t_A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -6 \\ 3 & -1 & 3 \\ 6 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$
2. a) L'endomorphisme f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
b) Déterminer le noyau, l'image et le rang de f .



3. On considère les vecteurs $\vec{u} = (1, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 0)$ et $\vec{w} = (0, -2, 1)$

a) Vérifier que $B' = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Donner la matrice de f dans cette base B' .

4. a) Donner la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base B' .

b) Montrer que l'inverse de la matrice P est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Vérifier que $A = PDP^{-1}$ puis Calculer A^n .