

Année Académique 2020 - 2021

Dure : 2H00

Niveau : BTS2 IDA

Date : 17 - 06 - 2021

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1 : 12 points

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (2x - 2y + z; 2x - 3y + 2z; -x + 2y)$$

- Déterminer la matrice A associée à f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- a) L'endomorphisme f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.
b) Déterminer $\ker f$ et l'image $\text{Im} f$.
- Pour tout réel x , on pose $K = A - xI$ et $P(x) = \det K$
 - Calculer $P(x)$. Que représente $P(x)$?
 - En déduire les racines de $P(x)$. Que représentent les racines de $P(x)$?
 - f est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.
- Soit le système d'équations linéaires (S) dont l'écriture matricielle est :

$$X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (S) \Leftrightarrow AX = -3X$$

Résoudre (S).

- Soient les vecteurs $v_1 = (2; 1; 0)$, $v_2 = (1; 0; -1)$ et $v_3 = (1; 2; -1)$ de $\mathbb{R}^3$.
 - Montrer que la famille de vecteurs $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - Ecrire la matrice C de f dans la base B' . Quelle est sa nature ?
 - Déterminer P la matrice de passage de la base B à la base B' .
- Déterminer l'inverse de P et montrer que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2 : 8 points

Dans une compagnie d'assurance, on a constaté que sur les 1200 assurés, 60 avaient envoyé au moins une déclaration de sinistre dans l'année.

On dira dans tout cet exercice que ces 60 dossiers sont de « types DS ».

On prélève au hasard et avec remise n dossiers parmi les 1200 dossiers des assurés. X est la variable aléatoire donnant, parmi les n dossiers prélevés, le nombre de dossiers de « types DS ». Les résultats des probabilités demandées seront donnés sous forme décimale, arrondies à 10^{-2} près.

1°) Quelle est la loi suivie par X ? Justifier votre réponse.

Donner les paramètres de cette loi.

2°) Dans cette question, on prend $n = 10$. Calculer les probabilités :

- a) Pour qu'un seul dossier soit de « type DS » ;
- b) Pour qu'il ait, parmi ces 10 dossiers, au moins un dossier de « type DS ».

3°) Dans cette question, on prend $n = 60$.

- a) Montrer que la loi suivie par X peut être approchée par la loi Poisson dont on précisera le paramètre. On note Y la variable aléatoire suivant cette loi de Poisson.
- b) Calculer la probabilité $P(Y \geq 2)$.

4°) Dans cette question, on prend $n = 200$.

- a) Montrer que la loi suivie par X peut être approchée par la loi Normale dont on précisera les paramètres. Soit Z la variable aléatoire suivant cette loi de Normale.
- b) Calculer les probabilités suivantes : $P(Z \leq 9)$ et $P(Z \geq 15)$