



Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient a, b deux réels, et E l'ensemble des matrices $M(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu b & \lambda + \mu a \end{pmatrix}$, $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

Montrer que E est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

A quelle condition sur a, b est-ce un corps ?

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Pour tout réel t , on définit la matrice $A(t)$ par $A(t) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1 - \frac{t^2}{2} & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A(s)A(t)$.
2. Calculer $(A(t) - I)^3$.
3. Trouver $(\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n)$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, A(t)^n = \alpha_n A(t)^2 + \beta_n A(t) + \gamma_n I$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit $E = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3c & a - 3c & b \\ 3b & -3b + 3c & a - 3c \end{pmatrix}, \text{ avec } a, b, c \text{ réels} \right\}$.

Montrer que E est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

En donner la dimension et une base.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient le système $\begin{cases} \forall (i, j), a_{ij} \geq 0 \\ \forall i, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \end{cases}$

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est stable pour le produit des matrices.
2. Déterminer les matrices A de $\mathcal{D}$, inversibles et telles que $A^{-1} \in \mathcal{D}$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que l'ensemble E des $M(x, y) = \begin{pmatrix} x + y & 4y \\ -y & x - y \end{pmatrix}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

En donner une base et la dimension. Est-ce un corps ?

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

E est le plan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par I et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Calculer J^2 et en déduire la stabilité de E pour le produit.

Chercher à quelle condition $M(\lambda, \mu)$ est inversible dans E .

En déduire que E est un corps si et seulement si $b > \frac{a^2}{4}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

– Remarquer que $A(t)$ s'écrit $A(t) = I + tJ + \frac{t^2}{2}K$.

Vérifier $J^2 = K$, $K^2 = 0$ et $JK = KJ = 0$. En déduire $A(t)A(s) = A(t+s)$.

– Prouver que $(A(t) - I)^2 = t^2K$, puis $(A(t) - I)^3 = 0$.

– Poser $A(t) = I + B(t)$ avec $B(t) = A(t) - I$.

Calculer alors $A(t)^n$ en utilisant la formule du binôme.

On trouve $A(t)^n = \frac{n(n-1)}{2}A(t)^2 - n(n-2)A(t) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}I$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

E est le sous-espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par $I = M(1, 0, 0)$, $J = M(0, 1, 0)$, $K = M(0, 0, 1)$.

Vérifier que I, J, K sont libres.

Calculer JK et KJ et en déduire que E est une sous-algèbre de dimension 3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

– Constater que si $A \in \mathcal{D}$, alors ses coefficients de A sont inférieurs ou égaux à 1.

Vérifier que si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont dans $\mathcal{D}$, alors $C = AB = (c_{ij})$ est dans $\mathcal{D}$.

– Avec les mêmes notations, supposer que C soit égale à la matrice identité.

Montrer que chaque ligne de A ne porte qu'un seul coefficient non nul, et qui vaut 1.

Noter $\sigma(i)$ le numéro de colonne où se trouve ce coefficient.

Montrer que σ est une bijection de $\{1, \dots, n\}$. Établir une réciproque.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

E est le plan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par I et $J = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer J^2 et en déduire que E est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrer que toute matrice non nulle de E est inversible dans E (qui est donc un corps).

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [[Retour à l'énoncé](#)]

On constate que $M(\lambda, \mu) = \lambda I + \mu J$, avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Il en découle que E est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par I et J .

Puisque les matrices I et J sont linéairement indépendantes, E est un plan vectoriel.

Pour montrer que E est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il reste à vérifier que E contient la matrice identité (évident : $I = M(1, 0)$) et que E est stable pour le produit des matrices.

On a $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -ab & a^2 - b \end{pmatrix} = -bI + aJ$.

Il en découle que pour tous réels $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$:

$$M(\lambda, \mu)M(\lambda', \mu') = (\lambda I + \mu J)(\lambda' I + \mu' J) = (\lambda\lambda' - b\mu\mu')I + (\lambda\mu' + \mu\lambda' + a\mu\mu')J$$

On constate donc que $M(\lambda, \mu)M(\lambda', \mu') = M(\lambda', \mu')M(\lambda, \mu)$ est dans E .

Ainsi E est une sous-algèbre commutative (de dimension 2) de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

E est un corps si toute matrice non nulle de E possède un inverse dans E .

$M(\lambda, \mu)$ possède un inverse $M(\lambda', \mu')$ dans E si et seulement si :

$$M(\lambda, \mu)M(\lambda', \mu') = I = M(1, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\lambda' - b\mu\mu' & = 1 \\ \mu\lambda' + (\lambda + a\mu)\mu' & = 0 \end{cases}$$

C'est un système dont le déterminant est $\Delta(\lambda, \mu) = \begin{vmatrix} \lambda & -b\mu \\ \mu & \lambda + a\mu \end{vmatrix} = \lambda^2 + a\lambda\mu + b\mu^2$.

Ainsi E est un corps si et seulement si on a la condition : $\Delta(\lambda, \mu) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$.

On constate qu'on peut écrire : $\Delta(\lambda, \mu) = (\lambda + \frac{a\mu}{2})^2 + (b - \frac{a^2}{4})\mu^2$.

On en déduit que l'équivalence $\Delta(\lambda, \mu) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$ équivaut à $b > \frac{a^2}{4}$.

Conclusion : l'ensemble E est un corps si et seulement si $b > \frac{a^2}{4}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [[Retour à l'énoncé](#)]

Pour tout t de $\mathbb{R}$, on a $A(t) = I + tJ + \frac{t^2}{2}K$, avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On a $J^2 = K$, $K^2 = 0$ et $JK = KJ = 0$. Pour tout réels s, t , on en déduit :

$$\begin{aligned} A(t)A(s) &= \left(I + tJ + \frac{t^2}{2}K\right)\left(I + sJ + \frac{s^2}{2}K\right) \\ &= I + (t+s)J + \left(\frac{s^2}{2} + \frac{t^2}{2} + st\right)K = I + (t+s)J + \frac{(t+s)^2}{2}K = A(t+s) \end{aligned}$$

2. On a : $(A(t) - I)^2 = \left(tJ + \frac{t^2}{2}K\right)^2 = t^2K$, puis $(A(t) - I)^3 = t^2\left(tJ + \frac{t^2}{2}K\right)K = 0$.

3. On a $A(t) = I + B(t)$ avec $B(t) = A(t) - I$. On sait que $B(t)^3 = 0$.

On en déduit, en utilisant la formule du binôme :

$$\begin{aligned} A(t)^n &= I + nB(t) + \frac{n(n-1)}{2}B(t)^2 \\ &= I + n(A(t) - I) + \frac{n(n-1)}{2}(A(t)^2 - 2A(t) + I) \\ &= \frac{n(n-1)}{2}A(t)^2 - n(n-2)A(t) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}I \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu, pour tout n de $\mathbb{N}$: $A(t)^n = \alpha_n A(t)^2 + \beta_n A(t) + \gamma_n I$, avec :

$$\alpha_n = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \beta_n = -n(n-2), \quad \gamma_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Par acquis de conscience, on vérifie que le résultat est correct si $n \in \{0, 1, 2\}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On constate que $M(1, 0, 0) = I$ (matrice identité).

Posons $J = M(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = M(0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Avec ces notations, on a $M(a, b, c) = aI + bJ + cK$, pour tous réels a, b, c .

On en déduit que E est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par I, J, K .

I, J, K sont libres. En effet, $aI + bJ + cK = 0 \Rightarrow M(a, b, c) = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$.

Ainsi E est un sous-espace de dimension 3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On sait que $I \in E$. Il reste à prouver que E est stable pour le produit.

On constate que $JK = KJ = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ -9 & 9 & 3 \end{pmatrix} = 3(I - J)$.

D'autre part $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = K$, et $K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -9 & 9 & 3 \\ 9 & -18 & 9 \end{pmatrix} = 3(J - K)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} M(a, b, c)M(a', b', c') &= (aI + bJ + cK)(a'I + b'J + c'K) \\ &= (aa' + 3bc' + 3cb')I + (ab' + ba' - 3bc' - 3cb' + 3cc')J + (ac' + ca' + bb' - 3cc')K \\ &= M(a', b', c')M(a, b, c) \end{aligned}$$

Conclusion : E est une sous-algèbre de dimension 3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Dire qu'une matrice A est dans $\mathcal{D}$, c'est dire que tous ses coefficients sont positifs ou nuls et que la somme des coefficients de chacune de ses lignes vaut 1.

En particulier, tous les coefficients de A sont inférieurs ou égaux à 1.

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux éléments de $\mathcal{D}$. Soit $C = AB = (c_{ij})$.

1. Pour tout couple d'indices i et j , on a bien sûr $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \geq 0$.

D'autre part, pour tout indice de ligne i :

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ik} b_{kj} \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{j=1}^n b_{kj} \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik} = 1$$

L'ensemble $\mathcal{D}$ est donc stable pour le produit des matrices.

2. Supposons que $C = AB$ soit égale à la matrice identité I_n .

Pour tous indices distincts i et k : $0 = c_{ik} = \sum_{j=1}^n \underbrace{a_{ij} b_{jk}}_{\geq 0} \Rightarrow \forall j, a_{ij} = 0$ ou $b_{jk} = 0$.

On choisit un coefficient a_{ij} non nul dans A .

Le calcul précédent montre alors que pour tout indice $k \neq i$, on a $b_{jk} = 0$.

Donc tous les coefficients de la j -ème ligne de B sont nuls sauf b_{ji} qui vaut nécessairement 1 (car la somme des coefficients de chaque ligne de B vaut 1.)

En inversant les rôles de A et B , le fait que b_{ji} soit non nul implique que tous les coefficients de la i -ème ligne de A sont nuls sauf a_{ij} qui vaut nécessairement 1.

Ainsi chaque ligne de A ne porte qu'un seul coefficient non nul, et ce coefficient vaut 1. Appelons $\sigma(i)$ le numéro de colonne où il se trouve.

L'application σ est nécessairement surjective sinon l'une au moins des colonnes de A serait nulle et A ne serait pas inversible.

Donc σ est une bijection de $\{1, \dots, n\}$ et on peut écrire, pour tous i, j : $a_{ij} = \delta_{\sigma(i)j}$.

On dit que A est la matrice de la permutation σ et on note $A = P_\sigma$.

Le calcul précédent montre que le seul coefficient non nul dans la ligne $j = \sigma(i)$ de B est situé dans la colonne i , c'est-à-dire dans la colonne $i = \sigma^{-1}(j)$. Ainsi $B = P_{\sigma^{-1}}$.

Réciproquement $A = P_\sigma$ et $B = P_{\sigma^{-1}}$ sont dans $\mathcal{D}$ et sont inverses l'une de l'autre :

$$\forall i, j : c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i\sigma(i)} b_{\sigma(i)j} = b_{\sigma(i)j} \text{ est égal à } 1 \text{ si } j = \sigma^{-1}(\sigma(i)) = i \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Conclusion :

Les matrices de $\mathcal{D}$ qui sont inversibles et qui ont leur inverse dans $\mathcal{D}$ sont les matrices de permutation $A = P_\sigma$ et on a alors $A^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

Exemple : si $n = 3$ et $\begin{cases} \sigma(1) = 2 \\ \sigma(2) = 3 \\ \sigma(3) = 1 \end{cases}$, $A = P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^{-1} = P_{\sigma^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5** [[Retour à l'énoncé](#)]

On constate que $M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix} = xI + yJ$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi E est le plan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices libres I et J .

On a $J^2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -3I$. La stabilité de E pour le produit en découle.

Plus précisément $M(x, y)M(x', y') = (xx' - 3yy')I + (xy' + yx')J$.

Ainsi E est une sous-algèbre commutative de dimension 2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Cherchons si une matrice $M(x, y)$ non nulle possède un inverse $M(x', y')$ dans E .

L'égalité $M(x, y)M(x', y') = I$ équivaut au système $\begin{cases} xx' - 3yy' = 1 \\ yx' + xy' = 0 \end{cases}$.

Le déterminant est $\Delta = \begin{vmatrix} x & -3y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + 3y^2 > 0$.

Ce système possède donc la solution unique : $x' = \frac{x}{\Delta}$ et $y' = \frac{-y}{\Delta}$.

Ainsi l'inverse de $M(x, y)$ est $M(x', y') = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} x-y & -4y \\ y & x+y \end{pmatrix}$.

Conclusion : l'ensemble E est muni d'une structure de corps.