Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Trouver toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Trouver toutes les matrices B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $B^2 = I$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en position (i, j) qui vaut 1.
Pour tous indices i, j, k, l de $\{1, \ldots, n\}$, calculer $E_{ij}E_{kl}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Quelles sont les matrices qui commutent avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit n un entier strictement positif. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que M commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow M$ est de la forme $\lambda \mathrm{I}_n$, où λ est un scalaire quelconque.
2. Montrer que M commute avec toutes les matrices <u>inversibles</u> de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow M$ est de la forme $\lambda \mathrm{I}_n$, où λ est un scalaire quelconque.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

On pose $\omega = \exp \dfrac{2i\pi}{n}$, où n est un entier positif.
Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de termes généraux $a_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$ et $b_{ij} = \omega^{-(i-1)(j-1)}$.
Calculer les produits A^2, B^2, AB et BA. Calculer A^{-1}.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Les solutions sont les matrices de l'une des formes suivantes, avec $(a,\lambda)\in\mathbb{R}^2$:

$$\pm I_2,\quad \begin{pmatrix} a & \lambda \\ \frac{1-a^2}{\lambda} & -a \end{pmatrix},\quad \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{pmatrix},\quad \pm\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que si on pose $A=2B-I$, on a $A^2=I\Leftrightarrow 4B^2-4B+I=I\Leftrightarrow B^2=B$.
On peut alors utiliser le résultat de l'exercice précédent.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On a l'égalité $E_{i,j}E_{k,l}=\delta_{j,k}E_{i,l}$, avec $\delta_{j,k}=\begin{cases} 1 & \text{si } j=k \\ 0 & \text{si } j\neq k \end{cases}$

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Poser $A=(a_{ij})$ et résoudre le système $AJ=JA$.
On trouve les matrices $A=aI+bJ+cJ^2+dJ^3$, avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{K}^4$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On considère les matrices E_{rs} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si M commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ elle commute avec les E_{rs}.
   Identifier alors les coefficients d'indice (i,j) de ME_{rs} et de $E_{rs}M$.
2. Se donner M qui commute avec toutes les matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Considérer alors $A_{rs}=\mathrm{I}_n+E_{rs}$, et montrer que M commute avec E_{rs}.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

- Le coefficient d'indice i,j de $C=A^2$ vaut n si $i=j=1$ ou si $i+j=n+2$, et 0 sinon.
- Remarquer que B est conjuguée de A. En déduire $B^2=A^2$.
- Prouver que $AB=nI_n$ et en déduire $BA=nI_n$ et $A^{-1}=\frac{1}{n}B$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Posons $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors $A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$.

Ainsi $A^2=I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=1 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ bc+d^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow (S_1)\begin{cases} d=-a \\ bc=1-a^2 \end{cases}$ ou $(S_2)\begin{cases} d\neq -a \\ b=c=0 \\ a^2=d^2=1 \end{cases}$

Le système (S_2) équivaut à $A=I_2$ ou $A=-I_2$.

Si $a\neq \pm 1$, le système (S_1) équivaut à $A=\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$, avec $b\in\mathbb{R}$.

Si $a=\pm 1$, (S_1) équivaut à $A=\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$ ou $A=\pm\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, avec $c\in\mathbb{R}$.

Finalement les solutions sont les matrices qui s'écrivent sous l'une des formes suivantes :

$$A=\pm I_2 \qquad A=\begin{pmatrix} a & \lambda \\ \frac{1-a^2}{\lambda} & -a \end{pmatrix}\ (\lambda\in\mathbb{R}^*, a\neq\pm 1)$$

$$A=\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{pmatrix} \qquad A=\pm\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ (\lambda\in\mathbb{R})$$

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Pour trouver les matrices B qui vérifient $B^2=B$, et plutôt que de refaire un calcul analogue à celui de l'exercice précédent, il est préférable d'utiliser son résultat et la relation qui existe entre les projections vectorielles (applications linéaires telles que $p^2=p$) et les symétries vectorielles (applications linéaires telles que $s^2=\mathrm{Id}$).

En effet, si on pose $A=2B-I$, on a $A^2=I\Leftrightarrow 4B^2-4B+I=I\Leftrightarrow B^2=B$.

Ainsi les matrices B telles que $B^2=B$ sont les $B=\frac{1}{2}(A+I)$, où il suffit de remplacer A par l'une quelconque des matrices obtenues précédemment.

On trouve ainsi les solutions :

$$B=I_2 \text{ ou } B=0 \qquad B=\begin{pmatrix} \frac{1+a}{2} & \lambda \\ \frac{1-a^2}{\lambda} & \frac{1-a}{2} \end{pmatrix}\ (\lambda\in\mathbb{R}^*, a\neq\pm 1)$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda\in\mathbb{R})$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda\in\mathbb{R})$$

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Rappelons la notation de Kroneker : $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Pour tous indices r, s de $\{1, \ldots, n\}$, le coefficient d'indice (r, s) de $E_{i,j}$ est $\delta_{i,r}\delta_{j,s}$.

On utilise la convention qui consiste à noter $[A]_{i,j}$ le coefficient d'indice i, j d'une matrice A.

Soient i, j, k, l quatre indices de $\{1, \ldots, n\}$. On va calculer $A = E_{i,j}E_{k,l}$.

Soient r, s dans $\{1, \ldots, n\}$: $[A]_{r,s} = \sum_{t=1}^{n} [E_{i,j}]_{r,t}[E_{k,l}]_{t,s} = \sum_{t=1}^{n} \delta_{i,r}\delta_{j,t}\delta_{k,t}\delta_{l,s} = \delta_{i,r}\delta_{j,k}\delta_{l,s}$

- Si $j \neq k$, on constate que $[A]_{r,s} = 0$ pour tous indices r, s.
  On en déduit que dans ce cas A est la matrice nulle.
- Si $j = k$, on a $[A]_{r,s} = \delta_{i,r}\delta_{l,s} = [E_{i,l}]_{r,s}$ pour tous indices r, s.
  On en déduit l'égalité $A = E_{i,l}$.
- Conclusion : dans tous les cas on peut écrire $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$. On résout le système résultant de $AJ = JA$.

$$AJ = JA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{21} = a_{31} = a_{41} = 0 \\ a_{32} = a_{42} = a_{43} = 0 \\ a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} \\ a_{12} = a_{23} = a_{34} \\ a_{13} = a_{24} \end{cases}$$

On constate donc que les matrices qui commutent avec J sont les matrices qui s'écrivent :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit les solutions sont les matrices $A = aI + bJ + cJ^2 + dJ^3$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$.

On obtient le sous-espace de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ engendré par I, J, J^2, J^3.

Puisque $J^4 = 0$, c'est aussi la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ contenant J.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. Remarque : on pourrait utiliser ici un résultat du cours. On montre en effet qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E commute avec tous les endomorphismes de $E \Leftrightarrow f$ est de la forme $\lambda \mathrm{Id}_E$ (et c'est que E soit de dimension finie ou non.)

   Il est évident que si $M = \lambda \mathrm{I}_n$ alors M commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   Réciproquement, si $M = (m_{ij})$ commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors M commute avec toutes les matrices E_{rs}.

   Rappelons que le coefficient d'indice (i,j) de E_{rs} est $\delta_{ir}\delta_{js}$.

   Fixons deux couples (r,s) et (i,j) d'indices compris entre 1 et n :

   – Le coefficient d'indice (i,j) de ME_{rs} est $\sum\limits_{k=1}^{n} m_{ik}\delta_{kr}\delta_{js} = m_{ir}\delta_{js}$.

   – Le coefficient d'indice (i,j) de $E_{rs}M$ est $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_{ir}\delta_{ks}m_{kj} = \delta_{ir}m_{sj}$.

   Pour tous couples (r,s) et (i,j) on a donc l'égalité $m_{ir}\delta_{js} = \delta_{ir}m_{sj}$.

   – En choisissant $r = i$ et $s = j$, on trouve pour tout couple (i,j) : $m_{ii} = m_{jj}$.

     Les coefficients diagonaux de M sont donc tous égaux.

   – En choisissant $j \neq i$ et $r = s = j$, on trouve : $m_{ij} = \delta_{ij}m_{jj} = 0$.

     Tous les coefficients non diagonaux de M sont donc nuls.

   On constate donc que M est de la forme $\lambda \mathrm{I}_n$, ce qu'il fallait démontrer.

2. Il est clair que $M = \lambda \mathrm{I}_n$ commute avec toutes les matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$!

   Réciproquement soit M qui commute avec toutes les matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   Pour tout couple (i,j) la matrice $A_{ij} = \mathrm{I}_n + E_{ij}$ est inversible (elle est diagonale si $i = j$ et triangulaire si $i \neq j$, et dans tous les cas ses coefficients diagonaux sont non nuls.)

   On en déduit que M commute avec A_{ij}, c'est-à-dire : $M(\mathrm{I}_n + E_{ij}) = (\mathrm{I}_n + E_{ij})M$.

   Mais cette égalité devient $M + ME_{ij} = M + E_{ij}\,M$ c'est-à-dire : $ME_{ij} = E_{ij}\,M$.

   Ainsi la matrice M commute avec toutes les matrices de E_{ij}.

   M commute donc avec toutes les combinaisons linéaires des E_{ij} c'est-à-dire avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   D'après la question (1), cela implique que M est de la forme $\lambda \mathrm{I}_n$.

Corrigé de l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

- Notons $C = A^2$. Le coefficient d'indice i, j de C est :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)}\omega^{(k-1)(j-1)} = \sum_{k=1}^{n} z^{k-1} \quad \text{avec } z = \omega^{i+j-2}$$

  L'exposant $i + j - 2$ est compris entre 0 (si $i = j = 1$) et $2n - 2$.

  ◇ Si $i = j = 1$, ou si $i + j = n + 2$, alors $z = 1$ et $c_{i,j} = n$.

  ◇ Sinon, z est une racine n-ième de l'unité distincte de 1 et $c_{i,j} = 0$.

  Le cas $i + j = n + 2$ donne $(i, j) \in \{(2, n), (3, n - 1), \ldots, (n - 1, 3), (n, 2)\}$.

  Ce sont les coefficients situés immédiatement sous la deuxième diagonale de A^2.

  Par exemple, si $n = 5$, on a : $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- On constate que les coefficients $b_{i,j}$ de B sont les conjugués des coefficients $a_{i,j}$ de A.

  On en déduit que la matrice B^2 est elle-même conjuguée, terme à terme, de la matrice A^2.

  Or la matrice A^2 est à coefficients réels. On en déduit $B^2 = A^2$.

- Notons $D = AB$. Le coefficient d'indice i, j de D est :

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)}\omega^{-(k-1)(j-1)} = \sum_{k=1}^{n} z^{k-1} \quad \text{avec } z = \omega^{i-j}$$

  L'exposant $i - j$ est compris entre $1 - n$ et $n - 1$.

  ◇ Si $i = j$ (donc si on est sur la diagonale) alors $z = 1$ et $d_{i,j} = n$.

  ◇ Sinon, z est une racine n-ième de l'unité distincte de 1 et $d_{i,j} = 0$.

  On a donc obtenu $AB = nI_n$. Il en découle que $A^{-1} = \frac{1}{n}B$ et que $BA = nI_n$.