Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soient a, b, c trois réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Soit $M = \begin{pmatrix} a^2-1 & ab & ac \\ ab & b^2-1 & bc \\ ac & bc & c^2-1 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, calculer M^n.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer A^{100}, avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer A^n, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit $A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}$. Calculer A^n.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

On considère la matrice carrée M définie par $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(M - I)(M + 3I) = 0$. En déduire M^n, pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. Vérifier que l'expression obtenue pour M^n est encore valable si $n < 0$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soit A une matrice carrée.

On suppose qu'il existe deux matrices U, V telles que $A^n = \lambda^n(U + nV)$ pour $n = 1, 2, 3$.

Montrer que l'égalité $A^n = \lambda^n(U + nV)$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Noter $N = M + I$, et constater que $N^2 = N$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = (-1)^{n+1}M$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Noter que $A = I + 4J$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $J^2 = 0$. En déduire $A^{100} = I + 400J$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On constate que $A^3 = 0$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Poser $A = \mathrm{e}^x J + \mathrm{e}^{-x} K$, avec $J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Constater que $J^2 = J$, $K^2 = K$, et $JK = KJ = 0$.

En déduire : $\forall n \geq 1,\ A^n = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} nx & \operatorname{sh} nx \\ \operatorname{sh} nx & \operatorname{ch} nx \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. On a effectivement $(M - I)(M + 3I) = 0$.
   Noter $a_n X + b_n$ le reste dans la division de X^n par $P = (X - 1)(X + 3)$.
   Montrer que $a_n = \dfrac{1}{4}(1 - (-3)^n)$ et $b_n = \dfrac{1}{4}(3 + (-3)^n)$. En déduire $M^n = a_n M + b_n I$.
2. On sait que pour $n \geq 0$: $M^n = A + (-3)^n B$ avec $A = \dfrac{1}{4}(M + 3I)$ et $B = \dfrac{1}{4}(I - M)$.
   Pour $n \geq 0$, montrer que $A + (-3)^n B$ et $A + (-3)^{-n} B$ sont inverses l'une de l'autre.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Éliminer U et V dans les trois égalités. En déduire $A^3 = \lambda(2A^2 - \lambda A)$.

Montrer ensuite l'égalité $A^n = \lambda^n(U + nV)$ par récurrence sur n.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

On a l'égalité $M = N - I$, avec $N = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (\, a \quad b \quad c\,)$.

Puisque $(\, a \quad b \quad c\,) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 = 1$, on a $N^2 = N$.

On en déduit $M^2 = N^2 - 2N + I = -N + I = -M$.

Plus généralement : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, M^n = (-1)^{n+1} M$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On a $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = I + 4J$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a $J^2 = 0$.

On en déduit $A^{100} = (I + 4J)^{100} = I + 400J = \begin{pmatrix} 401 & -400 \\ 400 & -399 \end{pmatrix}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Posons $\begin{cases} s = \sin\theta \\ c = \cos\theta \end{cases}$. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -s \\ -1 & 0 & c \\ -s & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -s \\ -1 & 0 & c \\ -s & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^2 & -sc & c \\ -sc & -s^2 & s \\ -c & -s & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -s \\ -1 & 0 & c \\ -s & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c^2 & -sc & c \\ -sc & -s^2 & s \\ -c & -s & 1 \end{pmatrix} = 0$. Donc $A^n = 0$ pour $n \geq 3$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

On a $A = \mathrm{e}^x J + \mathrm{e}^{-x} K$, avec $J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $J^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = J$, $K^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = K$, et $JK = KJ = 0$.

On peut donc appliquer la formule du binôme pour calculer $(J + K)^n$.

Puisque $J^n = J$ et $K^n = K$ pour tout $n \geq 1$, il vient :

$$\forall\, n \geq 1,\ A^n = (\mathrm{e}^x J + \mathrm{e}^{-x} K)^n = \mathrm{e}^{nx} J + \mathrm{e}^{-nx} K = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} nx & \operatorname{sh} nx \\ \operatorname{sh} nx & \operatorname{ch} nx \end{pmatrix}$$

Remarque : on peut bien sûr calculer A^2, deviner le résultat et procéder par récurrence.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

1. On a effectivement $(M-I)(M+3I) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0.$

   La matrice M est donc annulée par le polynôme $P = (X-1)(X+3)$.

   Notons $X^n = (X-1)(X+3)Q_n(X) + a_nX + b_n$ la division euclidienne de X^n par P.

   En substituant 1 et -3 à X, on trouve : $\begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ -3a_n + b_n = (-3)^n \end{cases}$

   On en déduit : $a_n = \dfrac{1}{4}(1-(-3)^n)$ et $b_n = \dfrac{1}{4}(3+(-3)^n)$.

   On substitue enfin M à X dans $X^n = P(X)Q_n(X) + a_nX + b_n$, et on trouve :

$$\begin{aligned} M^n &= a_nM + b_nI = \frac{1}{4}(M+3I) - \frac{(-3)^n}{4}(M-I) \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \frac{(-3)^n}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5-(-3)^n & -2+2(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 2-2(-3)^n & 4(-3)^n & 2-2(-3)^n \\ -1+(-3)^n & 2-2(-3)^n & 3+(-3)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Posons $A = \dfrac{1}{4}(M+3I)$ et $B = \dfrac{1}{4}(I-M)$.

   On a vu que pour tout entier naturel n, on a l'égalité $M^n = A + (-3)^nB$.

   On veut montrer que ce résultat est encore valable si n est un entier négatif.

   Pour cela il suffit de vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, les matrices $\begin{cases} A+(-3)^nB \\ A+(-3)^{-n}B \end{cases}$ sont inverses l'une de l'autre.

   On sait que $0 = (M-I)(M+3I) = M^2 + 2M - 3I$.

   En particulier on a les égalités $AB = BA = 0$.

   D'autre part $A^2 = \dfrac{1}{16}(M^2+6M+9I) = \dfrac{1}{16}(4M+12I) = A$.

   De même $B^2 = \dfrac{1}{16}(I-2M+M^2) = \dfrac{1}{16}(4I-4M) = B$.

   On en déduit, pour tout entier naturel n :

$$(A+(-3)^nB)(A+(-3)^{-n}B) = A + B = I$$

   Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ M^n = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 5-(-3)^n & -2+2(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 2-2(-3)^n & 4(-3)^n & 2-2(-3)^n \\ -1+(-3)^n & 2-2(-3)^n & 3+(-3)^n \end{pmatrix}$

Corrigé de l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

On commence par éliminer U et V dans les égalités $\begin{cases} A = \lambda(U+V) & (1) \\ A^2 = \lambda^2(U+V) & (2) \\ A^3 = \lambda^3(U+3V) & (3) \end{cases}$

Les égalités (1) et (2) donnent $2A^2 - \lambda A = \lambda^2(U+3V)$.

On en déduit $A^3 = \lambda(2A^2 - \lambda A) \quad (4)$.

L'égalité $A^n = \lambda^n(U+nV)$ est vraie aux rangs $n=1$ et $n=2$.

Supposons qu'elle soit vraie aux rangs n et $n+1$, où n est donné dans $\mathbb{N}^*$.

Alors l'égalité (4) donne :

$$\begin{aligned} A^{n+2} &= \lambda(2A^{n+1} - \lambda A^n) \\ &= \lambda(2\lambda^{n+1}(U+(n+1)V) - \lambda^{n+1}(U+nV)) = \lambda^{n+2}(U+(n+2)V) \end{aligned}$$

Ce qui prouve la propriété au rang $n+2$ et achève la récurrence.

On a ainsi prouvé que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a $A^n = \lambda^n(U+nV)$.