

INTÉGRATION PAR PARTIES - CHANGEMENTS DE VARIABLE

Exercice 1 - Changements de variables - Niveau 1 - L1/Math Sup - ★

1. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est une bijection de classe C^1 de $[1, 4]$ sur $[1, 2]$. On peut donc poser $u = \sqrt{t}$. Lorsque $t = 1$, $u = 1$ et lorsque $t = 4$, u vaut 2. De plus, on a

$$\frac{1 - \sqrt{t}}{\sqrt{t}} = \frac{1 - u}{u}$$

et

$$u = \sqrt{t} \implies t = u^2 \implies dt = 2u du.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1 - \sqrt{t}}{t} dt &= \int_1^2 \frac{1 - u}{u} 2u du \\ &= \int_1^2 (2 - 2u) du \\ &= \left[2u - u^2 \right]_1^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

2. La fonction $x \mapsto e^x$ réalise une bijection de $[1, 2]$ sur $[e, e^2]$. Effectuons le changement de variables $u = e^x$ dans l'intégrale, de sorte que $du = e^x dx$. Il vient

$$\int_1^2 \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \int_e^{e^2} \frac{du}{1 + u} = [\ln |1 + u|]_e^{e^2} = \ln \left(\frac{1 + e^2}{1 + e} \right).$$

Exercice 2 - Changements de variables - Niveau 2 - L1/Math Sup - ★★

1. La fonction $x \mapsto \ln x$ réalise une bijection de $[1, e]$ sur $[0, 1]$. On pose donc $u = \ln x$ de sorte que $du = \frac{dx}{x}$. De plus, lorsque x vaut 1, u vaut 0 et lorsque x vaut e , u vaut 1. On trouve donc

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx &= \int_0^1 u^n du \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

2. La fonction à intégrer est définie et continue sur $]0, +\infty[$. On se limite donc à calculer l'intégrale recherchée pour $x > 0$. La fonction $t \mapsto \sqrt{e^t - 1}$ est une bijection de $[1, x]$ sur $[\sqrt{e-1}, \sqrt{e^x-1}]$. Posant $u = \sqrt{e^t - 1}$, on a

$$du = \frac{e^t}{2\sqrt{e^t - 1}} dt$$

d'où

$$F(x) = 2 \int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{du}{u^2 + 4} = \arctan \left(\frac{\sqrt{e^x-1}}{2} \right) - \arctan \left(\frac{\sqrt{e-1}}{2} \right).$$

Exercice 3 - Changements de variables - Recherche de primitives - L1/Math Sup - ★★

1. La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$, intervalle sur lequel on cherche à calculer une primitive. Pour cela, on fait le changement de variables $u = \ln x$, de sorte que $du = \frac{dx}{x}$ et on trouve

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x} dx &= \int u du \\ &= \frac{1}{2} u^2 + C \\ &= \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C.\end{aligned}$$

2. La fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$, intervalle sur lequel on cherche à calculer une primitive. Pour cela, on effectue le changement de variables $u = \sqrt{x}$, de sorte que $x = u^2$ ou encore $dx = 2u du$. On trouve alors

$$\begin{aligned}\int \cos(\sqrt{x}) dx &= 2 \int u \cos(u) du \\ &= 2[u \sin u] - 2 \int \sin(u) du \\ &= 2u \sin u + 2 \cos u + C \\ &= 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 2 \cos(\sqrt{x}) + C\end{aligned}$$

(on a aussi effectué une intégration par parties).

Exercice 4 - Intégration par parties - Niveau 1 - L1/Math Sup - ★

1. La fonction $x \mapsto \arctan x$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive sur cet intervalle. On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u(x) &= \arctan x & u'(x) &= \frac{1}{x^2+1} \\ v'(x) &= 1 & v(x) &= x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \arctan t dt = x \arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}.$$

La primitive que l'on doit encore rechercher est de la forme g'/g , et donc

$$\int \arctan t dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1).$$

2. La fonction $x \mapsto (\ln x)^2$ étant continue sur $]0, +\infty[$, elle admet des primitives sur cet intervalle. On se restreint à cet intervalle et on intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u(x) &= (\ln x)^2 & u'(x) &= 2 \frac{\ln x}{x} \\ v'(x) &= 1 & v(x) &= x \end{array}$$

de sorte que

$$\int (\ln t)^2 dt = x(\ln x)^2 - 2 \int \ln t dt.$$

Une primitive de $x \mapsto \ln x$ étant $x \mapsto x \ln x - x$ (résultat qui se retrouve en intégrant par parties), on trouve finalement qu'une primitive de $x \mapsto (\ln x)^2$ est

$$x \mapsto x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x.$$

3. On va intégrer par parties deux fois. On travaille sur l'intervalle $]0, +\infty[$, là où la fonction est bien définie et continue. On pose alors :

$$\begin{array}{ll} u(x) &= \sin(\ln x) & u'(x) &= \frac{1}{x} \cos(\ln x) \\ v'(x) &= 1 & v(x) &= x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x).$$

On intègre une deuxième fois par parties en posant

$$\begin{array}{ll} u_1(x) &= \cos(\ln x) & u'_1(x) &= -\frac{1}{x} \sin(\ln x) \\ v'_1(x) &= 1 & v_1(x) &= x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x).$$

En mettant tout cela ensemble, on trouve

$$\int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)$$

soit

$$\int \sin(\ln x) = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)).$$

Exercice 5 - Intégration par parties - Niveau 2 - L1/Math Sup - ★★

1. On intègre par parties, en posant $u'(x) = x$ et $v(x) = (\arctan x)^2$. On a $v'(x) = \frac{2 \arctan(x)}{x^2+1}$, et ceci nous incite à considérer comme primitive de u' la fonction $u(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$, ce qui va simplifier les calculs. On obtient alors

$$I = \frac{1}{2} [(x^2 + 1)(\arctan x)^2]_0^1 - \int_0^1 \arctan x.$$

On calcule la dernière intégrale en réalisant à nouveau une intégration par parties, et on trouve :

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi^2}{16} - [x \arctan x]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1)]_0^1 \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

2. La fonction $f : x \mapsto \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}$ est continue sur $]0, 1]$, et elle tend vers 0 en 0. On peut donc la prolonger par continuité à $[0, 1]$ en posant $f(0) = 0$, ce qui donne un sens à J . Pour calculer cette intégrale, on va intégrer par parties entre $a > 0$ et 1, pour ne pas être gêné par les problèmes en 0. On pose donc $J(a) = \int_a^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}$, puis :

$$\begin{aligned} u(x) &= (\ln x) & v'(x) &= \frac{x}{(x^2+1)^2} \\ u'(x) &= \frac{1}{x} & v(x) &= -\frac{1}{2(x^2+1)} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$J(a) = \left[-\frac{\ln x}{2(x^2+1)} \right]_a^1 + \frac{1}{2} \int_a^1 \frac{dx}{x(x^2+1)}.$$

De plus,

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

de sorte que

$$\int_a^1 \frac{dx}{x(x^2+1)} = \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_a^1 = -\frac{1}{2} \ln 2 - \ln(a) + \frac{1}{2} \ln(1+a^2).$$

On obtient donc que

$$J(a) = \frac{\ln a}{2(a^2+1)} - \frac{\ln 2}{4} - \frac{\ln a}{2} + \frac{1}{4} \ln(1+a^2).$$

Reste à faire tendre a vers 0. Pour cela, on factorise par $\ln a$, et on trouve

$$J(a) = \frac{-a^2 \ln(a)}{2(a^2+1)} - \frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{4} \ln(1+a^2).$$

Comme $a^2 \ln(a)$ tend vers 0 lorsque a tend vers 0, de même que $\ln(1+a^2)$, on conclut finalement que

$$J = -\frac{\ln 2}{4}.$$

Exercice 6 - Une suite d'intégrales - L1/Math Sup - ★★

Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, l'application $x \mapsto x^n (\ln x)^p$ est définie et continue sur $]0, 1]$. De plus, les théorèmes de comparaison usuels entraînent que cette fonction se prolonge par continuité en 0 (remarquons l'importance de $n > 0$). Ceci justifie l'existence de $I_{n,p}$. Pour calculer $I_{n,p}$, nous allons réaliser une intégration par parties. On la réalise entre $a > 0$ et 1, pour prendre garde au fait que la fonction logarithme n'est pas définie en 0. On remarque aussi que $I_{n,0} = \frac{1}{n+1}$, et donc il suffit de traiter le cas $p > 0$.

On pose donc

$$I_{n,p}(a) = \int_0^a x^n (\ln x)^p dx$$

puis

$$\begin{aligned} u(x) &= (\ln x)^p & v'(x) &= x^n \\ u'(x) &= \frac{p(\ln x)^{p-1}}{x} & v(x) &= \frac{x^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

On trouve alors,

$$I_{n,p}(a) = \frac{1}{n+1} \left[x^{n+1} (\ln x)^p \right]_a^1 - \frac{p}{n+1} \int_a^1 x^n (\ln x)^{p-1} dx = \frac{-a^{n+1}}{n+1} - \frac{p}{n+1} I_{n,p-1}.$$

On passe à la limite en faisant tendre a vers 0, et on trouve :

$$I_{n,p} = -\frac{p}{n+1} I_{n,p-1}.$$

On trouve alors

$$I_{n,p} = \frac{(-p) \times (-(p-1)) \times \cdots \times (-1)}{(n+1) \times (n+1) \times \cdots \times (n+1)} I_{n,0} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^p} \times \frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}.$$

Exercice 7 - Une autre suite d'intégrales - L1/Math Sup - ★★

On pose, pour $(\alpha, \beta, n, m) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^2$,

$$I_{m,n} = \int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)^m (t - \beta)^n dt.$$

On intègre par parties pour obtenir une relation entre $I_{m,n}$ et $I_{m-1,n+1}$, et on trouve

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \left[(t - \alpha)^m \frac{(t - \beta)^{n+1}}{n+1} \right]_{\alpha}^{\beta} - \frac{m}{n+1} \int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)^{m-1} (t - \beta)^{n+1} dt \\ &= -\frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{0,p} = \int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)^p dt = -\frac{(\alpha - \beta)^{p+1}}{p+1}.$$

Une récurrence immédiate donne alors

$$I_{m,n} = (-1)^{m+1} \frac{m(m-1) \dots 1}{(n+1)(n+2) \dots (n+m)} \frac{(\alpha - \beta)^{m+n+1}}{m+n+1}.$$

En particulier, l'intégrale recherché vaut $I_{n,n}$, c'est-à-dire

$$I_{n,n} = (-1)^{n+1} \frac{n!}{(n+1) \dots (2n)} \frac{(\alpha - \beta)^{2n+1}}{2n+1} = (-1)^{n+1} \frac{(\alpha - \beta)^{2n+1}}{(2n+1) \binom{2n}{n}}.$$

FRACTIONS RATIONNELLES

Exercice 8 - Fractions rationnelles - Niveau 1 - L1/Math Sup - ★

1. On commence par faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur.

$$\frac{3x+2}{x^2+x+1} = \frac{3}{2} \times \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+x+1}.$$

On intègre alors. Pour la première partie, c'est facile, car :

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \ln|x^2+x+1|.$$

Pour la seconde, on se ramène à écrire le dénominateur sous la forme $X^2 + \omega^2$, ce qui nécessite en plus un changement de variables. Ici, on a $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ soit, avec le changement de variables $u = x + 1/2$,

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{du}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Finalement, une primitive de la fonction recherchée est

$$x \mapsto \frac{3}{2} \ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

2. C'est plus facile, car le numérateur est une constante. On écrit simplement que $x^2+4x+5 = (x+2)^2 + 1$ et la méthode précédente donne

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \arctan(x+2).$$

3. On commence par effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur. On trouve que

$$x^3 + 2x = (x-1)(x^2+x+1) + 2x+1$$

d'où

$$\frac{x^3+2x}{x^2+x+1} = x-1 + \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Une primitive est donc la fonction

$$x \mapsto \frac{x^2}{2} - x + \ln|x^2+x+1|.$$

4. On sait que la fraction rationnelle peut s'écrire

$$\frac{2x-1}{(x+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$

Par identification (par exemple...), on trouve que $a = 2$ et $b = -3$. Une primitive de la fonction est donc

$$x \mapsto 2 \ln|x+1| + \frac{3}{x+1}.$$

Exercice 9 - Fractions rationnelles - Niveau 2 - L1/Math Sup - ★

1. Le dénominateur se factorise en $(x-1)(x^2+x+1)$. On cherche alors à écrire

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}.$$

Par identification (par exemple...) on trouve $a = 1/3$, $b = -1/3$ et $c = -2/3$, soit

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \times \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

On cherche alors à faire apparaître la dérivée de x^2+x+1 pour faciliter l'intégration, et on trouve

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \times \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Pour intégrer le dernier terme, on écrit

$$x^2+x+1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

ce qui donne finalement qu'une primitive de la fonction est

$$x \mapsto \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

2. C'est assez difficile si on ne pense pas à faire un changement de variables. On peut en effet poser $u = x^2$, et

$$\int \frac{x}{(x^2-4)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(u-4)^2} du = -\frac{1}{2(u-4)} = -\frac{1}{2(x^2-4)}.$$

Exercice 10 - Grande puissance - L1/Math Sup - ★★

Une intégration par parties donne

$$I_n = \left[\frac{x}{(x^2+1)^n} \right]_0^1 + 2n \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \frac{1}{2^n} + 2n \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^{n+1}} dx.$$

Or,

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} = \int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}} - \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx = I_n - I_{n+1}.$$

Regroupant les termes, on trouve

$$2nI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{1}{2^n} \iff I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}.$$

Sachant que $I_1 = \frac{\pi}{4}$, on trouve

$$I_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \text{ et } I_3 = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}.$$

AVEC LA FONCTION EXPONENTIELLE

Exercice 11 - Fonction exponentielle - Niveau 1 - Math Sup/L1 - ★

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\cosh x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule pas). Une primitive est par exemple la fonction F définie par

$$x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\cosh t} dt = \int_0^x \frac{2e^t}{1+e^t} dt.$$

On calcule cette intégrale à l'aide du changement de variables $u = e^t$ (la fonction $t \mapsto e^t$ est une bijection de classe C^1 de $[0, x]$ sur $[1, e^x]$, de bijection réciproque $u \mapsto \ln u$). On en déduit que

$$F(x) = \int_1^{e^x} \frac{2du}{1+u^2} = [2 \arctan(u)]_1^{e^x} = 2 \arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}.$$

2. On réalise là-aussi le changement de variables $u = e^x$, $du = e^x dx$ soit $dx = du/u$ et on trouve :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+e^x} dx &= \int \frac{1}{u(1+u)} du \\ &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} \right) du \\ &= \ln \left(\frac{u}{1+u} \right) + C \\ &= \ln \left(\frac{e^x}{1+e^x} \right) + C. \end{aligned}$$

3. On peut intégrer par parties, ou rechercher une primitive de la même forme, c'est-à-dire une fonction $F : x \mapsto e^x(ax^3 + bx^2 + cx + d)$. On a alors

$$F'(x) = e^x(ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + (c+d)).$$

Par identification, on trouve que F est une primitive de $x \mapsto e^x(2x^3 + 3x^2 - x + 1)$ lorsque $a = 2$, $3a + b = -3$, $2b + c = 5$ et $c + d = 1$, soit $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$ et $d = -4$. Les primitives sont donc les fonctions

$$x \mapsto e^x(2x^3 - 3x^2 + 5x - 4) + C.$$

Exercice 12 - Fonction exponentielle - Niveau 2 - Math Sup/L1 - ★

1. On pose $u = e^x$, de sorte que

$$\begin{aligned} \int \frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1} e^x dx &= \int \frac{u^2 - 2u + 1}{u^2 + 2u + 1} du \\ &= \int du - \int \frac{4u}{(u+1)^2} du \\ &= u - \int \frac{4}{u+1} + \int \frac{4}{(u+1)^2} \\ &= u - 4 \ln(1+u) - \frac{4}{1+u} + C \\ &= e^x - 4 \ln(1+e^x) - \frac{4}{1+e^x} + C. \end{aligned}$$

2. Le changement de variables le plus malin ici est $u = \sinh x$, de sorte que

$$\frac{dx}{\cosh x} = \frac{\cosh x dx}{\cosh^2 x} = \frac{du}{1+u^2}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cosh x(1+\sinh x)} dx &= \int \frac{du}{(1+u^2)(1+u)} \\ &= \int \frac{-u/2 + 1/2}{u^2+1} du + \int \frac{1/2}{1+u} du \\ &= \frac{-1}{4} \int \frac{2u}{u^2+1} du + \int \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2+1} + \frac{1}{2} \ln|1+u| \\ &= \frac{-1}{4} \ln(u^2+1) + \frac{1}{2} \arctan(u) + \frac{1}{2} \ln|1+u| + C \\ &= \frac{-1}{2} \ln(\cosh x) + \frac{1}{2} \arctan(\sinh x) + \frac{1}{2} \ln|1+\sinh x| + C. \end{aligned}$$

Exercice 13 - Exponentielle et trigonométrie - Math Sup/L1 - ★

1. I est égal à $\Re(J)$ avec $J = \int_0^\pi x^2 e^{(1+i)x}$ (on a posé $\cos x = \Re(e^{ix})$). En intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned} J &= \left[\frac{x^2 e^{(1+i)x}}{1+i} \right]_0^\pi - \frac{2}{1+i} \int_0^\pi x e^{(1+i)x} dx \\ &= -\frac{\pi^2 e^\pi}{1+i} - \frac{2}{1+i} \int_0^\pi x e^{(1+i)x} dx. \end{aligned}$$

On fait une deuxième intégration par parties pour calculer cette dernière intégrale, et on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x e^{(1+i)x} dx &= \left[\frac{x e^{(1+i)x}}{1+i} \right]_0^\pi - \frac{1}{1+i} \int_0^\pi e^{(1+i)x} dx \\ &= -\frac{\pi e^\pi}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^2} \left[e^{(1+i)x} \right]_0^\pi \\ &= -\frac{\pi e^\pi}{1+i} + \frac{i}{2} (1 - e^\pi). \end{aligned}$$

Regroupant tous les termes, et multipliant par la quantité conjuguée au dénominateur, on trouve :

$$J = -\pi^2 e^\pi \frac{1-i}{2} - i\pi e^\pi - \frac{1+i}{2} (1 - e^\pi),$$

soit

$$I = -\frac{1}{2} + \frac{1-\pi^2}{2} e^\pi.$$

2. On commence par linéariser $\sin^2 x$ et on trouve

$$J = \int_0^{2\pi} e^{-x} \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right) dx = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-x} \cos(2x) dx.$$

On calcule alors la dernière intégrale en utilisant les complexes. On trouve

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{-x} \cos(2x) dx &= \Re e \left(\int_0^{2\pi} e^{(2i-1)x} dx \right) \\ &= \Re e \left(\left[\frac{1}{2i-1} e^{(2i-1)x} \right]_0^{2\pi} \right) \\ &= \Re e \left(\frac{1}{5} (2i+1)(1 - e^{-2\pi}) \right) \\ &= \frac{1}{5} (1 - e^{-2\pi}).\end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$J = \frac{2}{5} (1 - e^{-2\pi}).$$

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Exercice 14 - Puissances et produits - L1/Math Sup - ★

1. On a

$$\begin{aligned}\sin^5 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^5 \\ &= \frac{1}{2^5 i} (e^{5ix} - e^{-5ix} - 5e^{3ix} + 5e^{-3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix}) \\ &= \frac{\sin(5x)}{16} - \frac{5 \sin(3x)}{16} + \frac{5 \sin(x)}{8}.\end{aligned}$$

Une primitive de la fonction recherchée est donc la fonction

$$x \mapsto \frac{-\cos(5x)}{80} + \frac{5 \cos(3x)}{48} - \frac{5 \cos(x)}{8}.$$

2. On écrit, pour éviter le calcul d'un produit, $\cos^4 x \sin^2 x = \cos^4 x - \cos^6 x$. Or,

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{1}{2^4} (e^{i4x} + e^{-i4x} + 4e^{2ix} + 4e^{-2ix} + 6) \\ &= \frac{1}{2^4} (2 \cos(4x) + 8 \cos(2x) + 6).\end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\cos^6 x = \frac{1}{2^6} (2 \cos(6x) + 12 \cos(4x) + 30 \cos(2x) + 20).$$

On a donc

$$\cos^4 x - \cos^6 x = -\frac{1}{32} \cos(6x) - \frac{1}{16} \cos(4x) + \frac{1}{32} \cos(2x) + \frac{1}{16}.$$

Une primitive de la fonction étudiée est donc la fonction

$$x \mapsto \frac{-1}{192} \sin(6x) - \frac{1}{64} \sin(4x) + \frac{1}{64} \sin(2x) + \frac{x}{16}.$$

3. On commence par linéariser $\cos^3 x$ en $(\cos(3x) + 3\cos(x))/4$. Avec la formule

$$\cos p \cos q = \frac{1}{2}(\cos(p+q) + \cos(p-q))$$

on trouve finalement

$$\begin{aligned} \int \cos(3x) \cos^3 x &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos(6x) + 3\cos(4x) + 3\cos(2x)) dx \\ &= \frac{x}{8} + \frac{\sin(6x)}{48} + \frac{3\sin(4x)}{32} + \frac{3\sin(2x)}{16} + C. \end{aligned}$$

Exercice 15 - Intégrale trigonométrique - Niveau 1 - L1/Math Sup - ★★

1. On pose $u = \cos t$, de sorte que $dt = -\cos u du$. Il vient $\sin^3 t dt = (\sin^2 t) \sin t dt = -(1 - u^2)du$. De plus, pour $t = 0$, $u = 1$ et pour $t = \pi/4$, $u = \sqrt{2}/2$. L'intégrale est donc égale à

$$I = \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{1-u^2}{1+u^2} du = - \int_{\sqrt{2}/2}^1 du + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{2}{u^2+1} du$$

soit

$$I = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - 2 \arctan(\sqrt{2}/2).$$

2. Là aussi, le meilleur changement de variables est $u = \cos x$, de sorte que $du = -\sin x dx$. Pour le faire apparaître dans l'intégrale, on écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} &= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx \\ &= \int_{1/2}^0 \frac{-du}{1 - u^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \right]_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

3. C'est encore le même changement de variables qui est le meilleur !

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} (1 + \cos(x)) \tan(x) &= \int_{1/2}^1 \frac{u}{1+u} du \\ &= [u + \ln u]_{1/2}^1 \\ &= \frac{1}{2} + \ln 2. \end{aligned}$$

Exercice 16 - Intégrale trigonométrique - Niveau 2 - Math Sup/L1 - ★★

1. On pose

$$w(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{2} \cos x + 2 \sin^2 x} dx$$

et on remarque que $w(-x) = w(x)$. Ceci nous conduit, par les règles de Bioche, au changement de variables $t = \cos x$. Il vient $dt = -\sin x dx$ et donc

$$I = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{-dt}{t(\sqrt{2}t + 2 - 2t^2)}.$$

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples en remarquant que

$$\frac{-1}{t(\sqrt{2}t + 2 - 2t^2)} = \frac{1}{t(t - \sqrt{2})(2t + \sqrt{2})} = \frac{-1}{2t} + \frac{1}{6(t - \sqrt{2})} + \frac{2}{3(2t + \sqrt{2})}.$$

On en déduit

$$I = \left[-\frac{1}{2} \ln t + \frac{1}{6} \ln(\sqrt{2} - t) + \frac{1}{3} \ln(2t + \sqrt{2}) \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1$$

(il faut prendre garde que $t - \sqrt{2}$ est négatif sur l'intervalle considéré). On trouve alors :

$$I = \frac{1}{6} \ln(\sqrt{2} - 1) + \frac{1}{3} \ln(2 + \sqrt{2}) - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}) - \frac{1}{6} \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \ln(2\sqrt{2}).$$

Ceci peut encore se simplifier, mais c'est sans grand intérêt...

2. Aucune des règles de Bioche ne s'applique, et on est conduit à poser $u = \tan(x/2)$, de sorte que

$$dx = \frac{2du}{1 + u^2}.$$

L'intégrale devient

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \sin x} &= \int_0^1 \frac{1}{2 + \frac{2u}{1+u^2}} \times \frac{2du}{1+u^2} \\ &= \int_0^1 \frac{du}{u^2 + u + 1} \\ &= \int_0^1 \frac{du}{\left(u + \frac{1}{2}\right)^{1/2} + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{2u+1}{\sqrt{3}} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Exercice 17 - Intégrale trigonométrique - Niveau 3 - L1/Math Sup - ★★★

1. La fonction $x \mapsto \frac{1-\cos(x/3)}{\sin(x/2)}$ est continue sur $]0, \pi]$, et elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ (on a $f(x) \sim_0 x/9$). On commence par effectuer le changement de variables $t = x/6$, de sorte que, notant I l'intégrale,

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{1 - \cos(2t)}{\sin(3t)} 6dt = 12 \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 t}{3 \sin t - 4 \sin^3 t} dt,$$

soit encore, après simplification :

$$I = 12 \int_0^{\pi/6} \frac{\sin t}{4 \cos^2 t - 1} dt.$$

On effectue alors le changement de variables $u = \cos t$, de sorte que $du = -\sin t dt$, et

$$I = -12 \int_{\sqrt{3}/2}^1 \frac{du}{4u^2 - 1} = -6 \int_2^{\sqrt{3}} \frac{dv}{v^2 - 1}.$$

Écrivant $\frac{2}{v^2-1} = \frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1}$, puis intégrant, on trouve

$$I = -3 \left[\ln \left| \frac{1+v}{1-v} \right| \right]_2^{\sqrt{3}} = 3 \ln \left(\frac{2+\sqrt{3}}{3} \right).$$

2. La règle de Bioche nous dit que le changement de variables approprié est $u = \cos x$. Pour le faire apparaître, on écrit

$$\frac{dx}{\sin x + \sin 2x} = \frac{dx}{\sin x(1 + 2 \cos x)} = \frac{\sin x dx}{(1 - \cos^2 x)(1 + 2 \cos x)}.$$

On obtient, notant J l'intégrale,

$$J = \int_0^{1/2} \frac{du}{(1-u)(1+u)(1+2u)}.$$

On décompose la fraction rationnelle obtenue en éléments simples :

$$\frac{1}{(1-u)(1+u)(1+2u)} = \frac{1/6}{1-u} - \frac{1/2}{1+u} + \frac{4/3}{1+2u}.$$

On peut alors finir le calcul de J :

$$\begin{aligned} J &= \left[-\frac{1}{6} \ln |1-u| - \frac{1}{2} \ln |1+u| + \frac{2}{3} \ln |1+2u| \right]_0^{1/2} \\ &= \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{6} \ln 3. \end{aligned}$$

INTÉGRALES ABÉLIENNES

Exercice 18 - Intégrales abéliennes - Niveau 1 - Math Sup/L1 - ★

1. La fonction est définie et continue sur $[-2, +\infty[\setminus \{-1\}$. Le calcul sera donc valable sur les intervalles $[-2, -1[$ et $] -1, +\infty[$. On effectue le changement de variables $u = \sqrt{x+2}$, puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{x+2}$ est bijective et C^∞ sur $] -2, +\infty[$, de sorte que $du = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}dx = \frac{dx}{2u}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 - \sqrt{x+2}} &= \int \frac{2u}{1-u} du \\ &= 2 \int \left(\frac{1}{1-u} - 1 \right) du \\ &= 2(-\ln|1-u| - u) + C \\ &= -2\ln|1 - \sqrt{x+2}| - 2\sqrt{x+2} + C. \end{aligned}$$

2. La fonction est définie sur $] -1, 1[$, et on effectue le changement de variables $x = \sin u$, avec $u \in [-\pi/2, \pi/2]$, de sorte que $dx = \cos u du$. On trouve :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\cos u}{\cos^2 u \cos u} du \\ &= \int \frac{du}{\cos^2 u} \\ &= \tan(u) + C \\ &= \frac{\sin u}{\cos u} + C \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C. \end{aligned}$$

3. On pose $u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, de sorte que $x = \frac{u^2+1}{1-u^2}$ et $dx = \frac{4u}{(1-u^2)^2}$. On en déduit

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx &= \int \frac{4u^2}{(1-u^2)} du \\ &= \int \left(\frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2} - \frac{1}{u+1} + \frac{1}{(u+1)^2} \right) du \\ &= -\frac{1}{u-1} + \ln|u-1| - \frac{1}{u+1} - \ln|1+u| + C \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1} + \ln \left| \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1 \right| - \frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1} - \ln \left| 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right| + C \end{aligned}$$

Exercice 19 - Intégrale abélienne - Niveau 2 - Math Sup/L1 - ★★

On commence par écrire le trinôme sous forme canonique :

$$I = \int_1^2 x \sqrt{x^2 - 2x + 5} dx = \int_1^2 x \sqrt{(x-1)^2 + 4} dx.$$

On trouve un terme de la forme $\sqrt{u^2 + 1}$, pour $(x-1)^2 = 4u^2$. Ceci nous incite à poser $u = \text{sh}(t)$, soit encore $x-1 = 2\text{sh}t$. En posant $\alpha = \text{Argsh}(1/2)$, on obtient

$$I = \int_0^\alpha (1 + 2\text{sh}t) \times 2\text{ch}t \times 2\text{ch}t dt = \int_0^\alpha 4\text{ch}^2 t + 8 \int_0^\alpha \text{sh}(t)\text{ch}^2(t) dt.$$

Utilisant $2\operatorname{ch}^2(t) = 1 + \operatorname{ch}(2t)$, on obtient

$$I = 2 \left[t + \frac{\operatorname{sh}(2t)}{2} \right]_0^\alpha + \frac{8}{3} \left[\operatorname{ch}^3 t \right]_0^\alpha = 2\alpha + \operatorname{sh}(2\alpha) + \frac{8}{3} \operatorname{ch}^3 \alpha - \frac{8}{3}.$$

Ceci peut encore se simplifier en exprimant $\operatorname{sh}(2\alpha)$ en fonction de $\operatorname{sh}(\alpha)$ et $\operatorname{ch}(\alpha)$, ie $\operatorname{sh}(2\alpha) = 2\operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{ch}(\alpha)$, et en remarquant que $\operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha = 1$. On obtient finalement

$$I = 2\alpha + \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{8}{3}.$$