ESATIC ANNÉE ACADÉMIQUE 2018-2019
Complément d'analyse *SRIT 1 - RTEL 1 - SIGL 1 - TWIN 1*

FICHE DE T D :

1 Dévéloppements Limités

Exercice 1.

1. *Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de*

$$f(x) = \frac{e^{\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{x^2}{\sin x}\right)} - e}{\ln(1+x)};$$

2. *En déduire le développement limité a l'ordre 2, au voisinage de* $+\infty$ *de*

$$h(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x;$$

3. *Déterminer le développement limité a l'ordre 3, au voisinage de* $\frac{\pi}{4}$ *de*

$$i(x) = (\tan x)^{\tan(2x)};$$

Exercice 2. *A l'aide du developpement limité, déterminer les limites suivantes*

1. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{4+x}} + e^{\sqrt{4-x}} - 2e^2}{\tan^2 x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a}, \quad a > 0.$

Exercice 3.
On donne $f(x) = \dfrac{xe^x}{\sqrt{1+x}} \qquad x \in \mathbb{R}.$

1. *Déterminer le développement limité de* $f(x)$ *à l'ordre 3 en 1 sous la forme*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + o[(x-1)^3]$$

2. *En déduire :*
   (a) *le nombre* $f^{(3)}(1)$.
   (b) *l'équation de la tangente* (D) *au point d'abscisse 1 à la courbe de* f, *puis étudier leurs positions relatives.*

Exercice 4.
On considère les fonctions g, h et f définies respectivement par

$$g(x) = \frac{2}{2-x^2}, \quad h(x) = \exp(1-\cos(x)) \quad et \quad f(x) = \frac{g(x)-h(x)}{x^4}.$$

1. *Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0 de g ;*
2. *Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0 de h ;*
3. *En déduire le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de f ;*
4. *Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ;*
5. *Soit k le prolongement par continuité de f en 0. Montrer que k est dérivable en 0 et préciser $k'(0)$;*
6. *Déterminer une équation de la tangente à la courbe (Ck) de k au point d'abscisse 0, et préciser la position de la courbe de k par rapport à la tangente au voisinage de 0 ;*
7. *Déterminer le développement limité a l'ordre 2, au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ de h*

2 Fonctions de deux variables

Exercice 5.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On note :

$$\begin{array}{rlcl} g: & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (t,u) & \mapsto & f(2t-u, 4t+3u), \\ h: & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (t,u) & \mapsto & f(t^2+2u^2, e^{tu}), \\ k: & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t & \mapsto & f(t^2, t^3). \end{array}$$

Calculer les derivees partielles premieres de g, h et la dérivée première de k en fonction de celles de f.

Exercice 6. *Étudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en (0,0) pour les fonctions f de deux variables réelles définies par les formules suivantes :*

$$a)\ \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad b)\ \frac{xy^2}{x^2+y^2} \qquad c)\ \frac{\sin x shy}{xy} \qquad d)\ \frac{\sin x - shy}{shx - \sin y}.$$

Exercice 7. *Étudier la limite en (1,0) de la fonctions f de deux variables réelles définies par la formule :*

$$f(x,y) = \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2}.$$

Exercice 8.
On considère la fonction f de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

1. *Calculer les dérivées partielles premières de f.*
2. *Déterminer les éventuels points critiques de f.*

3. *Calculer les dérivées partielles secondes de f.*
4. *Déterminer la nature de chaque point critique.*
5. *Montrer que f admet un minimum absolu égal à -8, et préciser les points critiques aux quels il est atteint.*

<u>Exercice</u> 9. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. *f est elle continue sur $\mathbb{R}^2$?*
2. *Calculer $\nabla f(x,y)$. f est elle de classe C^1 ?*
3. *Montrer que f admet des dérivées partielles secondes en tout points. Que pouvez vous déduire du calcul de $\partial_{xy} f(0,0)$ et $\partial_{yx} f(0,0)$?*