

Chapitre 5

TRAVAUX DIRIGES

5.1 Calcul Intégral

Exercice 5.1.1. Répondre par vrai ou faux.

1 Toute fonction qui possède des primitives sur un intervalle I est continue sur I .

2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u) \frac{du}{2}.$

3 L'intégrale sur $[0, 1]$ d'une fonction paire est positive ou nulle.

4 Toute fonction intégrable sur $[a, b]$ est continue.

5 Toute primitive d'une fonction rationnelle est rationnelle.

Exercice 5.1.2. Trouver une primitive des fonctions suivantes :

a) $x \arctan x$ b) $\tan^2 x$ c) $\frac{1}{\arccos(x)\sqrt{1-x^2}}$ d) $\frac{x^3}{1+x^4}$ e) $\frac{1}{x(1+x^7)}$ f) $\frac{2e^{2x}+e^x+1}{e^{2x}+1}$ g) $\frac{1}{2+\cos x}$
h) $e^{2t} \ln(1+e^t)$ i) $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ j) $(x+1) \operatorname{sh} x$ k) $\operatorname{argsh}(3x)$ l) $\operatorname{ch} x \cos x$ m) $\frac{\ln x}{x}$ n) $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
o) $\frac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{sh}^2 x}$ p) $\arctan(\sqrt[3]{x})$ q) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

Exercice 5.1.3. Calculer la limite, lorsque $n \rightarrow \infty$

1 $\sum_1^n \frac{n+k}{n^2+k^2}$

2 $\sum_1^n \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

3 $\frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)}$

4 $-n + \sum_1^n e^{\frac{1}{n+k}}$

Exercice 5.1.4.

On veut déterminer une primitive de $f(x) = \frac{-x^3 - x^2 + 2x + 3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$ sur $[2; +\infty[$.

1 Décomposer $f(x)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$

2 vérifier que

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{2x+p}{x^2+px+q}\right) + \left(b - \frac{ap}{2}\right)\left(\frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}}\right)$$

3 Déterminer une primitive de f sur $[2; +\infty[$.

Exercice 5.1.5.

1 (a) Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et $u = \tan(\theta)$.

i) Exprimer $\cos^2(\theta)$ en fonction de u . En déduire une expression de $\cos(2\theta)$ en fonction de u .

ii) En utilisant une expression de $\tan(2\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$, en déduire une expression de $\sin(2\theta)$ en fonction de u .

(b) On considère l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos(x) + 2\sin(x) - 3}$. On se propose d'effectuer le changement de variables : $t = \tan(\frac{x}{2})$, soit $x = 2 \arctan(t)$.

i) Exprimer, à l'aide de la question précédente, dx , $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de t .

ii) Après avoir effectué le changement de variables proposé, calculer l'intégrale I .

2 (a) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$.

(b) Calculer l'intégrale : $\int_0^1 x(\arctan(x))^2 dx$.

Exercice 5.1.6.

Déterminer la limite de la suite définie par le terme général suivant : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2kn}}$

Exercice 5.1.7.

On veut déterminer une primitive de $f(x) = \frac{x^4}{(x+3)^2(x^2+x+3)}$ sur $[0; +\infty[$.

1 Décomposer $f(x)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$

2 Déterminer une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

Exercice 5.1.8.

(a) Calculer $\int (\sin(x)(\sin(x) - \cos(x))) dx$.

(b) Calculer $\int_{\ln 5}^{\ln 13} \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}} dx$ en posant $t = \frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}$

Exercice 5.1.9.

(I) Soit $f(x) = \frac{4x^2}{1-x^4}$.

Décomposer $f(x)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$;

(II) Soit $g(x) = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. Déterminer une primitive de g sur $[2; +\infty[$.

Exercice 5.1.10.

(I) Soit $f(x) = \frac{4}{x^4 - 16}$.

1 Décomposer $f(x)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$

2 Montrer que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4} \arctan 2 - \frac{1}{8} \ln 3 - \frac{1}{8} \pi$.

(II) Dédurre la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-4n^3}{16n^4 - k^4}$.

Exercice 5.1.11.

(I) Soit $f(x) = \frac{6x+6}{(2x+1)^2(x^2+x+1)}$.

1 Décomposer $f(x)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$

2 Montrer que $\int_0^1 f(x) dx = \ln(3) - \frac{1}{9} \pi \sqrt{3} + \frac{4}{3}$.

(II) Dédurre la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{6n^2(k+n)}{(2k+n)^2(k^2+kn+n^2)}$

Exercice 5.1.12.

Calculer les intégrales suivantes

1 $I = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$

2 $J = \int_{-2}^1 \frac{x}{x^2+4x+13} dx$

3 $K = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(x-1)^2} dx$

Exercice 5.1.13.

(I) Soit $g(x) = \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx$ avec $p^2 - 4q < 0$.

1 vérifier que

$$g(x) = \left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{2x+p}{x^2+px+q}\right) + \left(b - \frac{ap}{2}\right)\left(\frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}}\right)$$

2 Dédurre que la fonction G définie par

$$G(x) = \frac{a}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2b - ap}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan\left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}\right)$$

est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

(II) Soit $f(x) = \frac{6x+6}{(2x+1)^2(x^2+x+1)}$.

1 Décomposer $f(x)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$

2 Montrer que $\int_0^1 f(x)dx = \ln(3) - \frac{1}{9}\pi\sqrt{3} + \frac{4}{3}$.

(III) Dédurre la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{6n^3(k+n)}{(2k+n)^2(k^2+kn+n^2)}$

Exercice 5.1.14.

(I) Calculer la limite de

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+8n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+16n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+24n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9n^2}}$$

(II) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + 3k^2}$$

Exercice 5.1.15. Soient a et x deux nombres réels strictement supérieurs à 1 et tels que $a < x$. Calculer les intégrales des fonctions rationnelles suivantes.

1 $I = \int_a^x \frac{3t^3 + 10t^2 - 2t}{(t^2 - l)^2} dt$

2 $J = \int_a^x \frac{1}{t^3(1+t^3)} dt$

Exercice 5.1.16.

1 Déterminer une primitive de f sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, avec $f(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$.

2 Déterminer une primitive de g sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, avec $g(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \cos x}$.

Exercice 5.1.17.*Calculer*

1 $K = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}} dx$

2 $L = \int_0^1 \frac{1}{e^t + 1} dt.$

3 $N = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx.$

Exercice 5.1.18.

1 Déterminer une primitive de f sur $[3; +\infty[$, avec $f(x) = \frac{x}{x^3 - 3x + 2}$.

2 Déterminer une primitive de g sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, avec $g(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x + 2 \tan^2 x}$.

Exercice 5.1.19.

1 Calculer $\int_0^1 e^{-x} \ln(1 + e^x) dx$

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$

a Montrer que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2$.

b Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, de terme général

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{\sqrt{(n^2 + k^2)^3}}$$

3 On considère l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\cos^4 x + \sin^4 x}} dx.$

a Montrer que $J = -J$.

b En déduire la valeur de J .

Exercice 5.1.20.

On considère l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{dx}{2 + \sqrt{4x - x^2}}$.

1) Montrer par un changement de variables que : $I = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{du}{1 + \sqrt{1 - u^2}}$.

2) Effectuer le changement de variable $u = \cos t$ dans l'intégrale $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{du}{1 + \sqrt{1 - u^2}}$.

3) (a) Exprimer $\sin \theta$ en fonction de $\tan \frac{\theta}{2}$ pour $\theta \in]-\pi; \pi[$.

(b) En déduire que $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)} dt$.

4) En déduire enfin la valeur de I .

Exercice 5.1.21.

Calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_{-1}^0 \frac{x dx}{x^2 + 2x - 3} \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

Exercice 5.1.22.

1 A l'aide du changement de variable $u = \ln(x)$, d'intégrations par partie bien choisies, calculer

$$\int_1^e (\ln(x))^2 dx$$

2 Déterminer la limite de la suite définie par le terme général suivant : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^4 - (kn)^2}}$

3 Soit $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 4x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

a Décomposer $f(x)$ en éléments simples.

b Déterminer une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

4 Soient $F = \int_0^1 \frac{\cos x}{\cos x + 1} dx$ et $G = \int_0^1 \frac{1}{\cos x + 1} dx$

a A l'aide des règles de Bioche, déterminer un changement de variable pour le calcul de F .

b A l'aide des règles de Bioche, déterminer un changement de variable pour le calcul de G .

5.2 Equations Différentielles Ordinaires

Exercice 5.2.1. Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont les fonctions

$$f(x) = \frac{C+x}{1+x^2}$$

seraient les solutions.

Exercice 5.2.2. Résoudre sur des intervalles appropriés les équations différentielles suivantes :

a) $y' + 2y = x^2$

- b) $\frac{yy'}{1+y^2} = \frac{1}{x}$
 c) $y' - y = (x+1)e^x$
 d) $y' + y = x - e^x + \cos x$

Exercice 5.2.3. Résoudre sur des intervalles appropriés les équations différentielles suivantes :

- a) $xy' - y = 2x^2, \quad y(1) = 5,$
 b) $(1 + e^x)y' + e^xy = (1 + e^x)$
 c) $(2 + \cos x)y' + \sin(x)y = (2 + \cos x) \sin x$

Exercice 5.2.4. Résoudre sur des intervalles appropriés, les équations de Bernoulli et les équations de Riccati suivantes

- 1) $y' + 2y = 4y^3$
 2) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$
 2) $y' - 2xy + y^2 = 2 - x^2$

Exercice 5.2.5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

- a) $y'' - 3y' + 2y = 0$
 b) $y'' + 2y' + 2y = 0$
 c) $y'' + 2y' + y = e^x$
 d) $y'' - 3y' + 2y = \sin(2x)$

Exercice 5.2.6. Le but de l'exercice est de déterminer sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ la solution générale de l'équation différentielle (E) suivante.

$$(E) \quad y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = (\pi - t)e^{-2t} + \frac{e^t}{\cos^2(t)}.$$

- 1** Déterminer l'ensemble des solutions sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ de l'équation homogène

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0.$$

- 2** Sans utiliser la méthode de la variation des constantes, déterminer une solution particulière de l'équation $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = (\pi - t)e^{-2t}$.

- 3** En utilisant la méthode de la variation des constantes, déterminer une solution particulière de l'équation $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = \frac{e^t}{\cos^2(t)}$.

- 4** Dédurre des questions précédentes la solution générale de (E) sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

- 5** Déterminer la solution f de (E) sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 5.2.7. *Le but de l'exercice est de déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E) suivante.*

$$(E) \quad y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = (t^2 + 1)e^t + 2e^{2t}.$$

- 1** Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sans second membre $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$.
- 2** Déterminer les trois réels a, b, c tels que $t \mapsto (at^2 + bt + c)e^t$ est solution de l'équation $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = (t^2 + 1)e^t$.
- 3** Déterminer le réel a tel que $t \mapsto at^2e^{2t}$ est solution de l'équation $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 2e^{2t}$.
- 4** Dédire des questions précédentes la solution générale de (E).
- 5** Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 5.2.8.

Le but de l'exercice est de déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E) suivante.

$$(E) \quad y''(t) + 4y'(t) + 13y(t) = (\pi - t)e^{-2t}.$$

- 1** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène

$$y''(t) + 4y'(t) + 13y(t) = 0.$$

- 2** Déterminer une solution particulière de l'équation (E).
- 3** Dédire des questions précédentes la solution générale de (E).
- 4** Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

5.3 Développements Limités (DL)

Exercice 5.3.1.

- 1** Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\sqrt[3]{\frac{e^x - 1}{x}}$.
- 2** Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $\ln(1 + x) - \sin(x)$.
- 3** Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{4+x}}$.
- 4** Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1 de $\frac{x^2 - 1}{e^x - e}$.

Exercice 5.3.2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\cos \frac{1}{x}}$.

- 1) Montrer que la droite d'équation $\Delta : y = ex - e$ est une asymptote de (Cf) la courbe représentative de f .
- 2) Donner les positions relatives de (Cf) et Δ .

Exercice 5.3.3. Soit $f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$. Peut-on prolonger f en une fonction continue, dérivable en $x = 0$? Préciser alors la position de la courbe vis à vis de sa tangente en 0.

Exercice 5.3.4. Déterminer s'il existe un réel α tel que $x^\alpha \frac{(\sinh(\sqrt[3]{x}))^3 - x}{\sqrt[3]{\sinh(x^3)} - x}$ admette une limite non nulle en 0.

Exercice 5.3.5. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{x^{\frac{1}{x}}} - x}{(\ln x)^2}$

Exercice 5.3.6. Déterminer D.L des fonctions suivantes :

- 1 $\frac{\ln x}{x^2}$ en 1 à l'ordre 4.
- 2 $\frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$ en 0 à l'ordre 3.
- 3 $\ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right)$ 0 à l'ordre 1000.
- 4 $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3.
- 5 $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \ln x$ en $+\infty$ à l'ordre 4.

Exercice 5.3.7. A l'aide du développement limité, déterminer les limites suivantes

- 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$
- 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1-x)}{\ln x}\right)^{x \ln x}$
- 3 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a}, \quad a > 0.$

Exercice 5.3.8. Montrer que la fonction $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ peut être prolongée de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.3.9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.

Exercice 5.3.10. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x \exp(x^2)$.

- 1 Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
- 2 Justifier que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 4 en 0.
- 3 Donner ce développement limité.

Exercice 5.3.11.

On considère les fonctions g , h et f définies respectivement par $g(x) = \ln(1 + x^2) + x$,
 $h(x) = \sqrt{1 + x^2} + x - 1$ et $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$.

- 1** Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0 de g ;
- 2** Déterminer le développement limité à l'ordre 5, au voisinage de 0 de h ;
- 3** En déduire le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de f ;
- 4** Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et que la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0, on donnera $k'(0)$;
- 5** Déterminer une équation de la tangente à la courbe de k (C_k) au point d'abscisse 0, et préciser la position de la courbe de k par rapport à la tangente au voisinage de 0;
- 6** Déterminer $(a_1; a_2; b_1; b_2; c_1; c_2) \in \mathbb{R}^6$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que
 $h(x) = a_1x + b_1 + \frac{c_1}{x^p} + o(\frac{1}{x^p})$ au voisinage de $+\infty$ et
 $h(x) = a_2x + b_2 + \frac{c_2}{x^p} + o(\frac{1}{x^p})$ au voisinage de $-\infty$;
- 7** En déduire que (Ch) admet des asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$ que l'on précisera, puis, étudier leurs positions relatives par rapport à (Ch) ;
- 8** Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 1 de g .

Exercice 5.3.12.

- 1** Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 de

$$f(x) = (1 + 2 \arctan x)(2e^x - \sin x);$$

- 2** En déduire le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de $+\infty$ de

$$h(x) = (x - 1)e^{\frac{1}{x+1}};$$

- 3** Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 1 de

$$i(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3);$$

- 4** Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ de

$$j(x) = (1 + \sin x)^x.$$

- 5** En utilisant le développement limité au voisinage de 0 de $\ln(1 + x)$, déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 2 de

$$g(x) = \ln(x).$$

Exercice 5.3.13.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par $f(x) = (x^2 - 1) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$,

- 1** Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 de f ;
- 2** En déduire que (Cf) la courbe représentative de f admet une tangente (T) au point d'abscisse 0. Donner une équation cartésienne de (T) et préciser la position de (Cf) par rapport à (T) au voisinage de 0;
- 3** Déterminer $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right)$ au voisinage de $+\infty$;
- 4** Démontrer que (Cf) admet une asymptote (D) au voisinage de $+\infty$. Donner une équation cartésienne de (D) et préciser la position de (Cf) par rapport à (D) au voisinage de $+\infty$.

Exercice 5.3.14.

On considère les fonctions g , h et f définies respectivement par $g(x) = \sin(x)$, $h(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ et $f(x) = g(x)h(x)$.

- 1** Déterminer le développement limité à l'ordre 5, au voisinage de 0 de g ;
- 2** Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de h ;
- 3** En déduire le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de f ;
- 4** En déduire $f(0)$ et $f'(0)$;
- 5** Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f (Cf) au point d'abscisse 0, et préciser la position de la courbe de f par rapport à la tangente au voisinage de 0;
- 6** Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - 2f(x) - 2(f(x))^3}{x^5} = 2$.

Exercice 5.3.15.

On considère les fonctions g , h et f définies respectivement par $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $h(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ et $f(x) = x^2 \left[(1 + \frac{1}{x})^x - 4(1 + \frac{1}{2x})^{2x} + 3(1 + \frac{1}{3x})^{3x} \right]$.

- 1** Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 de g ;
- 2** Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que k la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0, on donnera $k'(0)$;
- 3** Déterminer une équation de la tangente à la courbe de k (Ck) au point d'abscisse 0, et préciser la position de la courbe de k par rapport à la tangente au voisinage de 0;
- 4** Montrer que $h(x) = e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$. On pourra utiliser le résultat de la question 1;

- 5** En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 5.3.16.

On considère les fonctions g , h et f définies respectivement par $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$,
 $h(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ et $f(x) = x^2 \left[(1 + \frac{1}{x})^x - 4(1 + \frac{1}{2x})^{2x} + 3(1 + \frac{1}{3x})^{3x} \right]$.

- 1** Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 de g ;
- 2** Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0, on donnera $k'(0)$;
- 3** Déterminer une équation de la tangente à la courbe de k (C_k) au point d'abscisse 0, et préciser la position de la courbe de k par rapport à la tangente au voisinage de 0;
- 4** Montrer que $h(x) = e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o(\frac{1}{x^2})$ au voisinage de $+\infty$. On pourra utiliser le résultat de la question 1;
- 5** En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 5.3.17.

On donne $f(x) = \frac{xe^x}{\sqrt{1+x}}$ $x \in \mathbb{R}$.

- 1** Déterminer le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 3 en 1 sous la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + o[(x-1)^3]$$

- 2** En déduire :
- a** le nombre $f^{(3)}(1)$.
 - b** l'équation de la tangente (D) au point d'abscisse 1 à la courbe de f , puis étudier leurs positions relatives.

Exercice 5.3.18.

On considère les fonctions g , h et f définies respectivement par

$$g(x) = \frac{2}{2-x^2}, \quad h(x) = \exp(1 - \cos(x)) \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{g(x) - h(x)}{x^4}.$$

- 1** Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0 de g ;
- 2** Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0 de h ;
- 3** En déduire le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de f ;
- 4** Montrer que f est prolongeable par continuité en 0;
- 5** Soit k le prolongement par continuité de f en 0. Montrer que k est dérivable en 0 et préciser $k'(0)$;

- 6** Déterminer une équation de la tangente à la courbe (Ck) de k au point d'abscisse 0, et préciser la position de la courbe de k par rapport à la tangente au voisinage de 0;
- 7** Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ de h

5.4 Notions Sur Les Fonctions à Deux Variables

Exercice 5.4.1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On note :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, u) \mapsto f(2t - u, 4t + 3u), \\ h : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, u) \mapsto f(t^2 + 2u^2, e^{tu}), \\ k : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(t^2, t^3). \end{aligned}$$

Calculer les dérivées partielles premières de g , h et la dérivée première de k en fonction de celles de f .

Exercice 5.4.2. Étudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en $(0,0)$ pour les fonctions f de deux variables réelles définies par les formules suivantes :

$$\text{a) } \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{b) } \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{c) } \frac{\sin x \sin y}{xy} \quad \text{d) } \frac{\sin x - \sin y}{\sin x - \sin y}.$$

Exercice 5.4.3. Étudier la continuité de f , l'existence des dérivées partielles premières de f , la continuité des dérivées partielles premières de f , pour les fonctions de deux variables réelles suivantes :

$$\text{a) } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$\text{b) } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x|y|.$$

$$\text{c) } f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} x(1 - y) & \text{si } y \leq x \\ (1 - x)y & \text{si } y > x. \end{cases}$$

Exercice 5.4.4. a) Déterminer le minimum et le maximum de

$$f : [0; 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + 2xy - 2y^2 + x + 3y.$$

b) Étudier les extremums relatifs de

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x - y)^2 + x^3 + y^3.$$

c) Étudier les extremums relatifs de

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x - y)^2 + x^4 + y^4.$$

Exercice 5.4.5. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$. On recherche toutes les fonctions $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x, y) \in D, x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (5.1)$$

- 1** Vérifier que $\varphi : (x, y) \mapsto \frac{y}{x}$ est solution du problème (5.1).
- 2** Soit $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $g \circ \varphi$ est solution de (5.1).
- 3** Soit f une solution de (5.1), montrer alors que $f(u, uv)$ ne dépend que de v .
- 4** Donner l'ensemble des solutions de (5.1).

Exercice 5.4.6.

On considère la fonction F de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y - y^2 x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- 1** Étudier la continuité de F sur $\mathbb{R}^2$;
- 2** Montrer que F admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les calculer.
- 3** L'application F est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$? sur $\mathbb{R}^2$ tout entier ?
- 4** Étudier la différentiabilité de l'application F au point $(0, 0)$.

Exercice 5.4.7.

(I) On considère la fonction f de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = y^3 - x^2 - 4xy - 5y^2 - y.$$

- 1** Calculer les dérivées partielles premières de f .
- 2** Déterminer les éventuels points critiques de f .
- 3** Calculer les dérivées partielles secondes de f .
- 4** Déterminer la nature de chaque point critique.

(II) On considère la fonction g de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y - xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- 1** Étudier la continuité de g en $(0, 0)$.

Exercice 5.4.8.

(I) On considère la fonction f de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2x + y + 2)e^{-y}.$$

1 Calculer les dérivées partielles premières de f .

2 Déterminer les éventuels points critiques de f .

3 Calculer les dérivées partielles secondes de f .

4 Déterminer la nature de chaque point critique.

(II) On considère la fonction g de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1 Étudier la continuité de g ;

2 Étudier l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de g .

Exercice 5.4.9.

(I) On considère la fonction f de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2x + y + 2)e^{-y}.$$

1 Calculer les dérivées partielles premières de f .

2 Déterminer les éventuels points critiques de f .

3 Calculer les dérivées partielles secondes de f .

4 Déterminer la nature de chaque point critique.

(II) On considère la fonction g de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1 Étudier la continuité de f ;

2 Étudier l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f .

Exercice 5.4.10.

On considère la fonction f de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

1 Calculer les dérivées partielles premières de f .

2 Déterminer les éventuels points critiques de f .

- 3** Calculer les dérivées partielles secondes de f .
- 4** Déterminer la nature de chaque point critique.
- 5** Montrer que f admet un minimum absolu égal à -8 , et préciser les points critiques aux quels il est atteint.

Exercice 5.4.11.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x|x + y|$$

Etudier :

- 1** la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$
- 2** la différentiabilité de f en $(0; 1)$

Exercice 5.4.12.

On considère la fonction f de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = -2x^3 - x^2 - y^2 + 4x + 2y.$$

- 1** Calculer les dérivées partielles premières de f .
- 2** Déterminer les éventuels points critiques de f .
- 3** Calculer les dérivées partielles secondes de f .
- 4** Déterminer la nature de chaque point critique.
- 5** Les extrémums locaux sont ils des extrémums globaux.