Equation linéaire du premier ordre

Exercice 1 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a) $y'+2y=x^2$ b) $y'+y=2\sin x$

c) $y'-y=(x+1)\mathrm{e}^x$ d) $y'+y=x-\mathrm{e}^x+\cos x$.

a) $y(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+C\mathrm{e}^{-2x}$.

b) $y(x)=-\cos x+\sin x+C\mathrm{e}^{-x}$.

c) $y(x)=\left(x^2/2+x\right)\mathrm{e}^x+C\mathrm{e}^x$.

d) $y(x)=x-1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x+C\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 2 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a) $(x^2+1)y'+2xy+1=0$ b) $y'+2xy=2x\mathrm{e}^{-x^2}$

c) $(x^2+1)y'-xy=(x^2+1)^{3/2}$ d) $(x^2+1)^2y'+2x(x^2+1)y=1$

e) $\sqrt{1+x^2}\,y'-y=1$ f) $(2+\cos x)y'+\sin(x)y=(2+\cos x)\sin x$

g) $y'-y=\sin(2x)\mathrm{e}^x$ h) $x(1+\ln^2(x))y'-2\ln(x)y=(1+\ln^2(x))^2$

i) $(1+\mathrm{e}^x)y'+\mathrm{e}^xy=(1+\mathrm{e}^x)$ j) $\mathrm{ch}\,x.y'-\mathrm{sh}\,x.y=\mathrm{sh}^3\,x$

k) $(1+\cos^2x)y'-\sin 2x.y=\cos x$ l) $(x^2+1)y'+xy=1$.

m) $(x^2+1)^2y'+2x(x^2+1)y=1$ n) $y'-\frac{\mathrm{sh}\,x}{1+\mathrm{ch}\,x}y=\mathrm{sh}\,x$.

a) $y(x)=\frac{C-x}{1+x^2}$ b) $y(x)=(x^2+C)\mathrm{e}^{-x^2}$ c) $y(x)=\sqrt{1+x^2}\,(C+x)$ d) $y(x)=\frac{C+\arctan x}{1+x^2}$

e) $y(x)=-1+C\mathrm{e}^{\mathrm{argsh}(x)}=-1+C(x+\sqrt{1+x^2})$ f) $y(x)=(2+\cos x)(C-\ln(2+\cos x))$

g) $y(x)=(C+\sin^2x)\mathrm{e}^x$ h) $y(x)=\frac{C+\ln x}{(1+\ln^2x)}$ i) $y(x)=\frac{C+x+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ j) $y(x)=\mathrm{ch}^2\,x+1+C\,\mathrm{ch}\,x$

k) $y(x)=\frac{C+\sin x}{1+\cos^2x}$ l) $y(x)=\frac{C+\mathrm{argsh}\,x}{\sqrt{x^2+1}}$ m) $y(x)=\frac{C+\arctan x}{x^2+1}$ n) $y(x)=(\ln(1+\mathrm{ch}\,x)+C)(1+\mathrm{ch}\,x)$.

Exercice 3 Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles spécifiés :

a) $xy'+\alpha y=0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (avec $\alpha\in\mathbb{R}$ fixé),

b) $y'\sin x-y\cos x+1=0$ sur $]0,\pi[$,

c) $\sqrt{1-x^2}\,y'+y=1$ sur $]-1,1[$,

d) $(\mathrm{e}^x-1)y'-\mathrm{e}^xy=1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$,

e) $y'+y\tan x=\sin 2x$ sur $]-\pi/2,\pi/2[$,

f) $\mathrm{sh}(x)y'-\mathrm{ch}(x)y=1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$,

g) $\sqrt{x^2-1}\,y'+y=1$ sur $[1,+\infty[$,

h) $(\sin x)^3y'=2(\cos x)y$ sur $]0,\pi[$.

a) $y(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ b) $y(x)=C\sin x+\cos x$

c) $y(x)=1+C\mathrm{e}^{\arccos x}$

d) $y(x)=\frac{C+x}{\mathrm{e}^x-1}$

e) $y(x)=C\cos x-2\cos^2 x$ f) $y(x)=C\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x$

g) $y(x)=1+C\mathrm{e}^{-\operatorname{argch} x}=1+\dfrac{C}{x+\sqrt{x^2-1}}$ h) $y(x)=C\mathrm{e}^{1/\sin^2 x}$.

Exercice 4 Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 donc les fonctions $f(x)=\dfrac{C+x}{1+x^2}$ seraient les solutions.

$(1+x^2)y'+2xy=1$.

Exercice 5 Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ dérivables telles que $\forall s,t\in\mathbb{R}, f(s+t)=f(s)f(t)$.

Supposons f solution. En évaluant la relation en $s=t=0$ on obtient $f(0)=f(0)^2$ donc $f(0)=0$ ou $f(0)=1$
En dérivant la relation en t on obtient : $f'(s+t)=f(s)f'(t)$ puis en évaluant en $t=0$: $f'(s)=f'(0)f(s)$.
Ainsi f est solution d'une équation différentielle de la forme $y'=\alpha y$ avec $\alpha\in\mathbb{C}$.
On en déduit $f(x)=C\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $C,\alpha\in\mathbb{C}$.
Parmi ces solutions, celles vérifiant $f(0)=0$ ou 1 sont $f(x)=0$ et $f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}$.
Inversement, ces fonctions sont solutions.

Exercice 6 Déterminer les fonctions $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x\in[0,1], f'(x)+f(x)+\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

Supposons f solution.
f est solution d'une équation différentielle de la forme $y'+y+\lambda=0$ donc
$f(x)=C\mathrm{e}^{-x}-\lambda$. De plus, pour une telle fonction, $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{C(\mathrm{e}-1)}{\mathrm{e}}-\lambda$ et donc une telle fonction est solution ssi $\dfrac{C(\mathrm{e}-1)}{\mathrm{e}}-\lambda=\lambda$ d'où $\lambda=\dfrac{C(\mathrm{e}-1)}{2\mathrm{e}}$.
Finalement, les solutions sont $f(x)=C\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{C(\mathrm{e}-1)}{2\mathrm{e}}$.

Exercice 7 Trouver toutes les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :
$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=\mathrm{e}^x f(y)+\mathrm{e}^y f(x)$.

Supposons f solution :
Pour $x=y=0$ on obtient $f(0)=0$.
De plus : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{\mathrm{e}^x f(h)+\mathrm{e}^h f(x)-f(x)}{h}=\mathrm{e}^x\dfrac{f(h)-f(0)}{h}+\dfrac{\mathrm{e}^h-1}{h}f(x)\xrightarrow[h\to 0]{}\mathrm{e}^x f'(0)+f(x)$.
Par suite f est dérivable en x et $f'(x)=f'(0)\mathrm{e}^x+f(x)$.
Après résolution de l'équation différentielle sous-jacente : $f(x)=Cx\mathrm{e}^x$.
Inversement, $f(x)=Cx\mathrm{e}^x$ est solution du problème posé.

Exercice 8 Déterminer les fonctions $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dérivables telles que $f'(x)+f(x)=f(0)+f(1)$.

Une telle fonction est solution d'une équation différentielle de la forme $y'+y=C$ et vérifie $y(0)+y(1)=C$.
Les solutions de cette équation différentielle sont $y(x)=C+D\mathrm{e}^{-x}$.
$y(0)+y(1)=2C+D\dfrac{1+\mathrm{e}}{\mathrm{e}}=C\Leftrightarrow D=-\dfrac{\mathrm{e}C}{\mathrm{e}+1}$. Les solutions sont les $f(x)=\dfrac{C\mathrm{e}+1-C\mathrm{e}^{-x+1}}{\mathrm{e}+1}$.
Inversement : ok

Equation linéaire du second ordre à coefficients constants

Exercice 9 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a) $y''+2y'+2y=2x-\sin x$ b) $y''-3y'+2y=x\operatorname{ch}x$ c) $y''-2y'+y=2\operatorname{ch}x$

d) $y''+y=x\sin x$ e) $y''+2y'+y=x\mathrm{e}^{x}$ f) $y''+2y'+2y=(x+1)\mathrm{e}^{-x}$

g) $y''+y=2\cos^2 x$ h) $y''+y'-2y=x\mathrm{e}^{x}$ i) $y''+2y'+4y=x^2\mathrm{e}^{-x}$

a) $y(x)=x-1+\frac{2}{5}\cos x-\frac{1}{5}\sin x+(C_1\cos x+C_2\sin x)\mathrm{e}^{-x}$.

b) $y(x)=-\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x\right)\mathrm{e}^{x}+\left(\frac{1}{12}x+\frac{5}{72}\right)\mathrm{e}^{-x}+C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$.

c) $y(x)=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}+(C_1x+C_2)\mathrm{e}^{x}$.

d) $y(x)=\frac{1}{4}x\sin x-\frac{1}{4}x^2\cos x+C_1\sin x+C_2\cos x$.

e) $y(x)=(C_1x+C_2)\mathrm{e}^{-x}+\frac{x-1}{4}\mathrm{e}^{x}$.

f) $y(x)=(C_1\cos x+C_2\sin x)\mathrm{e}^{-x}+(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

g) $y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{3}\cos 2x+1$.

h) $y(x)=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{18}(3x^2-2x)\mathrm{e}^{x}$.

i) $y(x)=(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)\mathrm{e}^{-x}+\frac{3x^2-2}{9}\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 10 Soit ω et ω_0 deux réels strictement positifs et distincts.
Résoudre l'équation différentielle $y''+\omega^2y=\cos(\omega_0x)$ avec pour condition initiale $y(0)=1, y'(0)=0$.

Solution générale : $y(x)=\frac{\cos(\omega_0x)}{\omega^2-\omega_0^2}+C_1\cos(\omega x)+C_2\sin(\omega x)$.

Solution vérifiant les conditions initiales : $y(x)=\frac{\cos(\omega_0x)-\cos(\omega x)}{\omega^2-\omega_0^2}+\cos(\omega x)$.

Exercice 11 Déterminer les couples $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que toute solution de $y''+ay'+by=0$ soit bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Posons $\Delta=a^2-4b$ discriminant de l'équation caractéristique $r^2+ar+b=0$.
Si $\Delta>0$ alors les solutions de $y''+ay'+by=0$ seront bornées sur $\mathbb{R}^+$ ssi les deux solutions de l'équation $r^2+ar+b=0$ sont négatives i.e. $a\geq 0$ (opposé de la somme des racines) et $b\geq 0$ (produit des racines).
Si $\Delta=0$ alors les solutions de $y''+ay'+by=0$ seront bornées sur $\mathbb{R}^+$ ssi $a>0$.
Si $\Delta<0$ alors les solutions de $y''+ay'+by=0$ seront bornées sur $\mathbb{R}^+$ ssi elles sont de parties réelles négatives i.e. $a\geq 0$.
Au final les solutions de $y''+ay'+by=0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$ ssi $a,b\geq 0$ et $(a,b)\neq(0,0)$.

Exercice 12 Trouver toutes les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables telles que : $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)+f(-x)=\mathrm{e}^{x}$.

Supposons f est solution. On a $f'(x)=\mathrm{e}^{x}-f(-x)$ donc f' est dérivable et
$f''(x)=\mathrm{e}^{x}+f'(-x)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}-f(x)$ donc f est solution de l'équation différentielle $y''+y=2\operatorname{ch}x$
Après résolution : $f(x)=\operatorname{ch}x+C_1\cos x+C_2\sin x$.

Inversement, une telle fonction est solution du problème si, et seulement si,
$\operatorname{sh} x - C_1 \sin x + C_2 \cos x + \operatorname{ch} x + C_1 \cos x - C_2 \sin x = \mathrm{e}^x$ i.e. $C_1 + C_2 = 0$.
Finalement les solutions du problème posé sont $f(x) = \operatorname{ch} x + C(\cos x - \sin x)$.

Exercice 13 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que
$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ et $f(0) = 1$

En dérivant deux fois par rapport à x on obtient : $f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y)$.
En dérivant deux fois par rapport à y on obtient : $f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$
donc $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$.
Pour $y = 0$: $f''(x) = \lambda f(x)$ avec $\lambda = f''(0)$.
Si $\lambda > 0$ alors $f(x) = \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} x$.
Si $\lambda = 0$ alors $f(x) = 1$.
Si $\lambda < 0$ alors $f(x) = \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} x$.

Exercice 14 Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que :
$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x$.

Soit f une solution du problème posé.
Posons $g(x) = f(x) + f(-x)$. La fonction g est une fonction paire, deux fois dérivable et solution de :
$y'' + y = 0$. Par suite $g(x) = C\cos(x)$
Posons $h(x) = f(x) - f(-x)$. La fonction h est une fonction impaire, deux fois dérivable et solution de :
$y'' - y = 2x$. Par suite $h(x) = D \operatorname{sh} x - 2x$.
On en déduit $f(x) = C\cos x + D \operatorname{sh} x - x$.
Inversement de telles fonctions sont bien solutions.

Exercice 15 Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue non nulle.
On se propose de montrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + p(x)y = 0$ s'annule.
Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que f est une solution ne s'annulant pas.
a) Justifier que f est de signe constant.
Quitte à considérer $-f$ au lieu de f, on peut supposer $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.
b) Etudier le signe de f''.
c) Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. Quelle est l'équation de la tangente à f en a ?
d) Montrer que le graphe de f est en dessous de sa tangente en a.
e) En déduire que $f'(a) = 0$ et conclure.

a) f est continue, si f n'est pas de signe constant alors f s'annule.
b) $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -p(x)f(x) \leq 0$.
c) $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
d) Considérons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - \big(f'(a)(x-a) + f(a)\big)$.
g est dérivable et $g'(x) = f'(x) - f'(a)$. Or f' est décroissante, on peut donc dresser le tableau de variation de g et puisque $g(a) = 0$, constater $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 0$.
e) Si $f'(a) \neq 0$ alors f étant en dessous de sa tangente prend des valeurs négatives, impossible.
On en déduit que $\forall a \in \mathbb{R}, f'(a) = 0$ donc f est constante et $f'' = 0$.
Pour que f vérifie l'équation $y'' + p(x)y = 0$ (sachant $p \neq 0$) il est nécessaire que f soit constante égale à 0.
C'est absurde.

Résolution par changement de fonction inconnue

Exercice 16 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(1+x^2)y''+2xy'=0$.

Soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Posons $z=y'$, z est dérivable.
y est solution de l'équation différentielle ssi z solution de $(1+x^2)z'+2xz=0$
On obtient $z(x)=\dfrac{C}{1+x^2}$ puis $y(x)=C\arctan x+D$.

Exercice 17 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(1+\mathrm{e}^x)y''+y'-\mathrm{e}^x y=0$ en introduisant la fonction $z=y'+y$.

Soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Posons $z=y+y'$, z est dérivable.
y est solution de l'équation différentielle ssi z solution de $(1+\mathrm{e}^x)z'-\mathrm{e}^x z=0$.
On obtient $z(x)=C(\mathrm{e}^x+1)$ et on en déduit $y(x)=\alpha\mathrm{e}^{-x}+\beta(\mathrm{e}^x+2)$.

Exercice 18 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y''+4xy'+(3+4x^2)y=0$ en introduisant la fonction $z(x)=\mathrm{e}^{x^2}y(x)$.

Soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Posons $z:x\mapsto\mathrm{e}^{x^2}y(x)$, z est deux fois dérivable.
y est solution de l'équation différentielle ssi z solution de $z''+z=0$.
On obtient $z(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$ et on en déduit $y(x)=(C_1\cos x+C_2\sin x)\mathrm{e}^{-x^2}$.

Exercice 19 Résoudre l'équation différentielle : $(1+\mathrm{e}^x)^2y''-2\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)y'-(3\mathrm{e}^x+1)y=0$ en introduisant $z(x)=\dfrac{y(x)}{1+\mathrm{e}^x}$.

$y(x)=(1+\mathrm{e}^x)z(x)$, $y'(x)=(1+\mathrm{e}^x)z'(x)+\mathrm{e}^x z(x)$, $y''(x)=(1+\mathrm{e}^x)z''(x)+2\mathrm{e}^x z'(x)+\mathrm{e}^x z(x)$.
$(1+\mathrm{e}^x)^2y''(x)-2\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)y'(x)-(3\mathrm{e}^x+1)y(x)=0\Leftrightarrow z''(x)-z(x)=0$.
Solution générale : $z(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$, $y(x)=(C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x})(1+\mathrm{e}^x)$.

Exercice 20 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $E:xy''-(1+x)y'+y=1$ en posant $z=y'-y$.

Soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $z=y'-y$.
z est dérivable et $z'=y''-y'$.
y est solution de E ssi $F:xz'-z=1$.
F est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
Solution générale de F sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$: $z(x)=Cx-1$.
Après recollement, solution générale de F sur $\mathbb{R}$: $z(x)=Cx-1$.
Reste à résoudre $G:y'-y=Cx-1$.
Solution homogène : $y_0(x)=D\mathrm{e}^{-x}$.
Solution particulière $y_1(x)=-C(x+1)+1$.
Solution générale de E : $y(x)=-C(x+1)+D\mathrm{e}^{-x}+1$ avec $C,D\in\mathbb{R}$.

Exercice 21 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $E:(1+\mathrm{e}^x)y''+2\mathrm{e}^x y'+(2\mathrm{e}^x+1)y=x\mathrm{e}^x$ via $z(x)=(1+\mathrm{e}^x)y(x)$.

Soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $z(x)=(1+\mathrm{e}^x)y(x)$.
z est deux fois dérivable et $z'(x)=(1+\mathrm{e}^x)y'(x)+\mathrm{e}^x y(x)$, $z''(x)=(1+\mathrm{e}^x)y''(x)+2\mathrm{e}^x y'(x)+\mathrm{e}^x y(x)$
y est solution de E ssi z est solution de $F:z''+z=x\mathrm{e}^x$.
F est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants de solution homogène

$z_0(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x$ et de solution particulière : $z_1(x)=\dfrac{x-1}{2}\mathrm{e}^x$.

Solution générale de F : $z(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x+\dfrac{x-1}{2}\mathrm{e}^x$.

La solution générale de E est donc : $y(x)=\dfrac{\lambda\cos x+\mu\sin x+\dfrac{x-1}{2}\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

Exercice 22 Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $t^3y''-2ty+3=0$ en posant $z=ty'+y$.

Soit $y:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z:t\mapsto ty'(t)+y(t)$ dérivable sur $]0,+\infty[$.

On vérifie $z'(t)=ty''(t)+2y'(t)$ de sorte que $t^3y''-2ty+3=0\Leftrightarrow t^2z'-2tz+3=0$

La résolution de cette dernière équation donne la solution générale $z(t)=Ct^2+\dfrac{1}{t}$.

La résolution de l'équation $ty'+y=Ct^2+\dfrac{1}{t}$ donne $y(t)=\dfrac{D}{t}+\dfrac{1}{3}Ct^2+\dfrac{\ln t}{t}$.

Résolution par changement de variable

Exercice 23 Résoudre $(1+x^2)^2y''+2(x-1)(1+x^2)y'+y=0$ par le changement de variable $t=\arctan x$.

Soit y une fonction deux fois dérivable définie sur $\mathbb{R}$.

Posons z la fonction définie sur $]-\pi/2,\pi/2[$ par $z(t)="y(x)"=y(\tan t)$. z est deux fois dérivable.

Après calculs :

y est solution de l'équation différentielle proposée ssi z solution de l'équation $z''-2z'+z=0$.

On obtient $z(t)=(C_1t+C_2)\mathrm{e}^t$ puis $y(x)=(C_1\arctan x+C_2)\mathrm{e}^{\arctan x}$.

Exercice 24 Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(t^2+1)^2y''+2t(t^2+1)y'+y=0$ via $x=\arctan t$.

Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z:I=]-\pi/2,\pi/2[\to\mathbb{R}$ définie par $z(x)=y(\tan x)$.

z est deux fois dérivable et $\forall t\in\mathbb{R},y(t)=z(\arctan t)$.

$y'(t)=\dfrac{z'(\arctan t)}{1+t^2}$ et $y''(t)=-\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}z'(\arctan t)+\dfrac{1}{(1+t^2)^2}z''(\arctan t)$.

y est solution ssi $z''(\arctan t)+z(\arctan t)=0$

soit $z''(x)+z(x)=0$ sur I puis $z=\lambda\cos x+\mu\sin x$ et $y(t)=\dfrac{\lambda+\mu t}{\sqrt{1+t^2}}$.

Exercice 25 Résoudre $(1-x^2)y''-xy'+4y=\arccos x$ sur $]-1,1[$ par le changement de variable $t=\arccos x$.

Soit y une fonction deux fois dérivable définie sur $]-1,1[$.

Posons z la fonction définie sur $]0,\pi[$ par $z(t)="y(x)"=y(\cos t)$. z est deux fois dérivable.

Après calculs :

y est solution de l'équation différentielle proposée ssi z est solution de $z''+4z=t$.

On obtient $z(t)=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+\dfrac{1}{4}t$ puis $y(x)=C_1(2x^2-1)+2C_2x\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{4}\arccos x$.

Exercice 26 Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ les équations suivantes via le changement de variable $t=\ln t$.

a) $x^2y''+xy'-y=x^2$ b) $x^2y''-2y=x$

a) Les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont : $y(x)=\dfrac{C_1}{x}+C_2x+\dfrac{x^2}{3}$.

b) Les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont : $y(x)=\dfrac{C_1}{x}+C_2x^2-\dfrac{x}{2}$.

Exercice 27 Résoudre $(1+x^2)y''+xy'-4y=0$ en posant $x=\operatorname{sh}t$.

Soit y une fonction deux fois dérivable définie sur $\mathbb{R}$.
Posons z la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t)=y(\operatorname{sh}t)$. z est deux fois dérivable.
Après calculs : y est solution de l'équation différentielle proposée ssi z est solution de l'équation $z''-4z=0$.
On obtient $z(t)=C_1\mathrm{e}^{2t}+C_2\mathrm{e}^{-2t}$ puis $y(x)=C_1\mathrm{e}^{2\operatorname{argsh}x}+C_2\mathrm{e}^{-2\operatorname{argsh}x}=C_1(x+\sqrt{1+x^2})^2+\dfrac{C_2}{(x+\sqrt{1+x^2})^2}$

david Delaunay http://mpsiddl.free.fr