Calcul de développements limités

Exercice 1 [01447] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_3(\pi/4)$ de $\sin x$ b) $DL_4(1)$ de $\frac{\ln x}{x^2}$ c) $DL_5(0)$ de $\mathrm{sh}x\mathrm{ch}(2x)-\mathrm{ch}x$.

Exercice 2 [00226] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_3(0)$ de $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$ b) $DL_3(0)$ de $\ln(1+\sin x)$ c) $DL_3(1)$ de $\cos(\ln(x))$

Exercice 3 [00745] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_3(0)$ de $\ln(1+\mathrm{e}^x)$ b) $DL_3(0)$ de $\ln(2+\sin x)$c) $DL_3(0)$ de $\sqrt{3+\cos x}$

Exercice 4 [00292] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_3(0)$ de $\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$ b) $DL_3(0)$ de $\ln(1+\sqrt{1+x})$c) $DL_3(0)$ de $\ln(3\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$

Exercice 5 [01448] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_2(0)$ de $(1+x)^{1/x}$ b) $DL_4(0)$ de $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$c) $DL_4(0)$ de $\ln\left(\frac{\mathrm{sh}x}{x}\right)$

Exercice 6 [01451] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_3(0)$ de $\frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x-1}$ b) $DL_2(0)$ de $\frac{\arctan x}{\tan x}$ c) $DL_2(1)$ de $\frac{x-1}{\ln x}$

Exercice 7 [00751] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_3(0)$ de $\frac{x-\sin x}{1-\cos x}$b) $DL_2(0)$ de $\frac{\sin(x)}{\exp(x)-1}$ c) $DL_3(0)$ de $\frac{x\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x-1}$

Exercice 8 [01449] [correction]
Former le $DL_3(1)$ de $\arctan x$

Exercice 9 [01452] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_{10}(0)$ de $\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$ b) $DL_{1000}(0)$ de $\ln\left(\sum_{k=0}^{999}\frac{x^k}{k!}\right)$.

Exercice 10 [01453] [correction]
Exprimer le développement limité à l'ordre n en 0 de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ à l'aide de nombres factoriels.

Exercice 11 [01454] [correction]
Pour $\alpha=-1/2$ et $k\in\mathbb{N}$, exprimer

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

à l'aide de nombres factoriels.
En déduire une expression du $DL_{2n+1}(0)$ de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ puis du $DL_{2n+2}(0)$ de $\arcsin(x)$.

Exercice 12 [01455] [correction]
Pour $n\in\mathbb{N}$, déterminer le développement limité à l'ordre $2n+2$ de $x\mapsto\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.
On pourra commencer par calculer la dérivée de cette fonction.

Exercice 13 [01456] [correction]
Montrer que l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x\mathrm{e}^{x^2}$ admet une application réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et former le $DL_5(0)$ de f^{-1}.

Exercice 14 [03025] [correction]
En calculant de deux façons le développement limité à l'ordre n de $(\mathrm{e}^x-1)^n$, établir que pour tout $0\leqslant\ell\leqslant n$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n-k}k^\ell}{\ell!}=\begin{cases}0 & \text{si } \ell<n\\ 1 & \text{si } \ell=n\end{cases}$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(x - \frac{\pi}{4})^3 + o((x - \frac{\pi}{4})^3)$
b) $\frac{\ln x}{x^2} = (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 - \frac{77}{12}(x-1)^4 + o((x-1))^4$.
c) $\mathrm{sh}x\mathrm{ch}(2x) - \mathrm{ch}x = -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{121}{120}x^5 + o(x^5)$.

Exercice 2 : [énoncé]
a) $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) = \ln(1+x^2) - \ln(1+x) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
b) $\ln(1+\sin x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.
c) $\cos(\ln x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \mathrm{o}((x-1)^3)$.

Exercice 3 : [énoncé]
a) $\ln(1+\mathrm{e}^x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \mathrm{o}(x^3)$
b) $\ln(2+\sin x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$
c) $\sqrt{3+\cos x} = 2 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$

Exercice 4 : [énoncé]
a) $\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}} = \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{\mathrm{e}}{48}x^3 + o(x^3)$.
b) $\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right) = \ln 2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{5}{96}x^3 + o(x^3)$
c) $\ln(3\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = 2\ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$

Exercice 5 : [énoncé]
a) $(1+x)^{1/x} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{11\mathrm{e}}{24}x^2 + o(x^2)$
b) $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$
c) $\ln\left(\frac{\mathrm{sh}x}{x}\right) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$

Exercice 6 : [énoncé]
a) $\frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x - 1} = 1 - x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + o(x^3)$
b) $\frac{\arctan x}{\tan x} = 1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)$
c) $\frac{x-1}{\ln x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{12}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

Exercice 7 : [énoncé]
a) $\frac{x - \sin x}{1 - \cos x} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{90}x^3 + o(x^3)$
b) $\frac{\sin x}{\exp(x) - 1} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$
c) $\frac{x\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x - 1} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{90}x^3 + o(x^3)$

Exercice 8 : [énoncé]
On primitive de $DL_2(1)$ de $\frac{1}{1+x^2}$:
$\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.

Exercice 9 : [énoncé]
a) $\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} = 1 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{8}t^8 + o(t^9)$ dont $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = t - \frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{24}t^9 + o(t^{10})$
puis $\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = -x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + o(x^{10})$
b) $\ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right) = \ln(\mathrm{e}^x - \frac{x^{1000}}{1000!} + o(x^{1000})) = \ln(\mathrm{e}^x) + \ln(1 - \frac{x^{1000}\mathrm{e}^{-x}}{1000!} + o(x^{1000})) = x - \frac{1}{1000!}x^{1000} + o(x^{1000})$.

Exercice 10 : [énoncé]
$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{k} (-x)^k + o(x^n)$ avec
$\binom{-1/2}{k} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2k-1}{2})}{k!} = (-1)^k \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2^k k!} = (-1)^k \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}$.
Au final, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} x^k + o(x^n)$

Exercice 11 : [énoncé]
On a

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k \frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}}{k!} = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

puis

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(2k+1)(k!)^2} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

Exercice 12 : [énoncé]
$\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1-x^2}$ et $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n+1})$.
Donc $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$.

Exercice 13 : [énoncé]
f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2} > 0$, de plus $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty, \lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.
Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et f^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
En particulier f^{-1} admet une $DL_5(0)$, de plus comme f est impaire, f^{-1} l'est aussi et le $DL_5(0)$ de f^{-1} est de la forme : $f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$.
En réalisant un $DL_5(0)$ de $f^{-1}(f(x))$ on obtient :
$f^{-1}(f(x)) = ax + (a+b)x^3 + (\frac{1}{2}a + 3b + c)x^5 + o(x^5)$.
Or $f^{-1}(f(x)) = x$, donc : $a = 1, b = -1$ et $c = \frac{5}{2}$.

Exercice 14 : [énoncé]
D'une part $\mathrm{e}^x - 1 = x + o(x)$ donne

$$(\mathrm{e}^x - 1)^n = x^n + o(x^n)$$

D'autre part

$$(\mathrm{e}^x - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\mathrm{e}^{kx}$$

or

$$\mathrm{e}^{kx} = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{k^\ell}{\ell!}x^\ell + o(x^n)$$

donc, en réordonnant les sommes

$$(\mathrm{e}^x - 1)^n = \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}k^\ell}{\ell!}x^\ell$$

L'unicité des développements limités entraîne la relation proposée.