## Calculs de DLs

**Exercice 1 - Somme et produit de DLs** - *L1/Math Sup* - ⋆

1. Il suffit d'écrire
$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+o(x^3)\\ e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\end{aligned}$$
et de faire la différence :
$$\frac{1}{1-x}-e^x=\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+o(x^3).$$
2. Il suffit d'écrire
$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o(x^4)\\ \sqrt{1-x} &= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o(x^4)\end{aligned}$$
et de faire la somme :
$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2-\frac{x^2}{4}-\frac{5x^4}{64}+o(x^4).$$
3. On écrit
$$\begin{aligned}\sin(x) &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\\ \cos(2x) &= 1-2x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^5).\end{aligned}$$
Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre 6 pour $\cos(2x)$ car tous les termes de son développement limité seront au moins multipliés par $x$, et on gagne un ordre. On en déduit, en effectuant le produit
$$\sin(x)\cos(2x)=x-\frac{13x^3}{6}+\frac{121x^5}{120}+o(x^6).$$
4. On écrit les développements limités
$$\begin{aligned}\cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\\ \ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\end{aligned}$$
et on effectue le produit pour trouver
$$(\cos x)\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^4).$$

5. C'est la même méthode, encore plus facile car $1+x^3=1+x^3+o(x^3)$. Puisque d'autre part
$$\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o(x^3)$$
on trouve en effectuant le produit
$$(1+x^3)\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{15x^3}{16}.$$
6. Puisque $\ln(1+x)\sim_0 x$, il est là aussi simplement nécessaire d'effectuer un DL de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3. En effectuant le produit, on va automatiquement gagner un ordre. Donc, en écrivant
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$
on trouve
$$\big(\ln(1+x)\big)^2=x^2-x^3+\frac{11x^4}{12}+o(x^4).$$

**Exercice 2 - Composition de DLs** - *L1/Math Sup* - ⋆

1. On commence par écrire
$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4).$$
On peut donc écrire
$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\ln(1+u)\text{ avec }u=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4).$$
En particulier, on remarque que $o(u^2)=o(x^4)$. De plus, on sait que
$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2).$$
On calcule les puissances de $u$, et on les tronque à l'ordre 4. Ainsi,
$$u=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)$$
$$u^2=\frac{x^4}{36}+o(x^4).$$
Il vient
$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)&=\frac{-x^2}{6}+\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{2\times 36}\right)x^4+o(x^4)\\&=\frac{-x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+o(x^4).\end{aligned}$$

2. On pose $u=\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$. $u$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers 0, et on peut bien écrire que
$$\exp(u)=1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+\frac{u^4}{24}+o(u^4).$$
Mais,
$$\begin{aligned} u &= x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\\ u^2 &= x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\\ u^3 &= x^3+o(x^4)\\ u^4 &= x^4+o(x^4). \end{aligned}$$
En remplaçant, on trouve
$$\exp(\sin(x))=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4).$$

3. On écrit
$$(\cos x)^{\sin x}=\exp\big(\sin x\ln(\cos x)\big).$$
On va donc devoir composer deux DLs, et faire un produit ! Soit d'abord $u=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$. On a
$$\ln(\cos x)=\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\frac{u^5}{5}+o(u^5).$$
D'autre part,
$$\begin{aligned} u &= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\\ u^2 &= \frac{x^4}{4}+o(x^5)\\ u^3 &= o(x^5)\\ u^4 &= o(x^5)\\ u^5 &= o(x^5) \end{aligned}$$
Il vient
$$\ln(\cos x)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^5).$$
On en déduit
$$\begin{aligned} \sin(x)\ln(\cos x) &= \left(x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^5)\right)\\ &= -\frac{x^3}{2}+o(x^5) \end{aligned}$$
Finalement, on pose $v=-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$, et on voit que $v^2=o(x^5)$. On obtient donc
$$\exp\big(\sin x\ln(\cos x)\big)=\exp(v)=1+v+O(v^2)=1-\frac{x^3}{2}+o(x^5).$$
Il y avait finalement moins de calculs que l'on ne pouvait le craindre !

4. On commence par étudier le DL de $\frac{1}{x}\ln(\cos hx)$. Au voisinage de 0, le DL à l'ordre 4 du cosinus hyperbolique est donné par
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$
Celui de $\ln(1+u)$ est donné par
$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$
Il est n'est pas nécessaire d'aller plus loin, car en posant $u = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, on a déjà $o(u^2) = o(x^4)$. Puisque $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$, on a en introduisant dans le DL de $\ln(1+u)$ :
$$\frac{1}{x}\ln(\cosh x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$
(on se contente de DLs à l'ordre 3 car on va les multiplier par $x$ à la fin). Pour trouver le DL de $(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$, on doit encore composer par l'exponentielle :
$$\exp(v) = v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + o(v^3)$$
avec
$$\begin{array}{rcl} v &=& \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3) \\ v^2 &=& \frac{x^2}{4} + o(x^3) \\ v^3 &=& \frac{x^3}{8} + o(x^3). \end{array}$$
On trouve donc
$$(\cosh x)^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$
Pour la fonction initiale, ceci donne
$$x(\cosh x)^{\frac{1}{x}} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{16} + o(x^4).$$

**Exercice 3 - Inverse de DL** - *L1/Math Sup* - $\star$

1. On pose $u = x + x^2$, qui tend bien vers 0 lorsque $x$ tend vers 0, et on utilise
$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4).$$
On calcule les puissances de $u$, mais bien sûr on les tronque à l'ordre 4. On trouve :
$$\begin{array}{rcl} u &=& x + x^2 \\ u^2 &=& x^2 + 2x^3 + x^4 \\ u^3 &=& x^3 + 3x^4 + o(x^4) \\ u^4 &=& x^4 + o(x^4) \end{array}$$

Ainsi, en remplaçant, on trouve

$$\frac{1}{1+x+x^2}=1-x+x^3-x^4+o(x^4).$$

2. On commence par calculer le DL (à l'ordre 4 simplement !) de $g(x)=\frac{1}{\cos x}$. Pour cela, on remarque que

$$g(x)=\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}=\frac{1}{1-u}$$

avec

$$\begin{aligned} u &= \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4) \\ u^2 &= \frac{x^4}{4}+o(x^4) \end{aligned}$$

On déduit du DL de $\frac{1}{1-u}$ que

$$g(x)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^4).$$

On multiplie alors ce DL avec celui du sinus :

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$

et on trouve

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5).$$

3. A l'ordre 2, on a

$$\cos(x)+1=2-\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

d'où

$$\frac{1}{\cos x+1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{x^2}{4}+o(x^2)}=\frac{1}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^2).$$

On multiplie ce DL par celui de $\sin x-1$

$$\sin x-1=-1+x+o(x^2).$$

On trouve finalement

$$\frac{\sin x-1}{2+\cos x}=-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2).$$

4. Ici, il faut faire un DL à l'ordre 4 du numérateur et du dénominateur car les termes en $x$ vont se simplifier. On trouve

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x}=\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)}=\frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}.$$

On effectue ensuite le DL à l'ordre 3 de
$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}=1+\frac{x^2}{6}+o(x^3)$$
puis le produit et on trouve finalement
$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

**Exercice 4 - DLs pas en 0 !** - *L1/Math Sup* - $\star$

1. On pose $x=2+h$, d'où
$$\begin{aligned}\sqrt{2+h} &= \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h}{2}}=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{h}{2}-\frac{1}{8}\left(\frac{h}{2}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{h}{2}\right)^3+o(h^3)\right)\\ &= \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}h-\frac{\sqrt{2}}{32}h^2+\frac{\sqrt{2}}{128}h^3+o(h^3).\end{aligned}$$
En revenant à $x$, on a
$$\sqrt{x}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}(x-2)-\frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2+\frac{\sqrt{2}}{128}(x-2)^3+o((x-2)^3).$$
2. On pose $u=\frac{1}{x}$, de sorte que
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} &= \sqrt{1+2u}\\ &= 1+u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{2}+o(u^3)\\ &= 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).\end{aligned}$$
3. On commence par écrire
$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln x=\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right).$$
On pose alors $u=\frac{1}{x}$, puis on écrit, pour se ramener à un DL du logarithme en 0,
$$\ln\left(1+\sqrt{1+u^2}\right)=\ln\left(1+\frac{\sqrt{1+u^2}-1}{2}\right).$$
Or,
$$\frac{\sqrt{1+u^2}-1}{2}=\frac{u^2}{4}-\frac{u^4}{16}+o(u^4)$$
d'où, par composition de DLS,
$$\ln\left(1+\sqrt{1+u^2}\right)=\frac{u^2}{4}-\frac{3u^4}{32}+o(u^4).$$
Revenant à la fonction initiale, on trouve
$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln x=\ln 2+\frac{1}{4x^2}-\frac{3}{32x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

**Exercice 5** - **Ordre le plus grand possible** - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

On écrit :

$$\frac{1}{1+bx^2}=1-bx^2+b^2x^4-b^3x^6+o(x^6)$$

ce qui donne, par produit

$$\frac{1+ax^2}{1+bx^2}=1+(a-b)x^2+(b^2-ab)x^4+(-b^3+ab^2)x^6+o(x^6).$$

Finalement, le développement limité de la fonction est donné par

$$\cos x-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}=\left(-a+b-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(-b^2+ab+\frac{1}{24}\right)x^4+\left(+b^3-ab^2-\frac{1}{120}\right)x^6.$$

Le terme d'ordre 2 disparait si $b-a=1/2$, et celui d'ordre 4 disparait aussi si

$$-b(b-a)=-\frac{1}{24}\iff b=1/12.$$

Dans ce cas, on trouve $a=-5/12$ et pour ces valeurs de $a$ et $b$, on trouve une partie principale de degré 6 :

$$\cos x-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}=\frac{1}{480}x^6.$$

**Exercice 6** - **Astucieux !** - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

On écrit $e^x=\sum_{k=1}^{100}\frac{x^k}{k!}+o(x^{100})$, de sorte que

$$\begin{aligned}\ln\left(\sum_{k=1}^{99}\frac{x^k}{k!}\right) &= \ln\left(e^x-\frac{x^{100}}{100!}+o(x^{100})\right)\\ &= x-\ln\left(1-e^{-x}\left(\frac{x^{100}}{100!}+o(x^{100})\right)\right)\\ &= x-e^{-x}\frac{x^{100}}{100!}+o(e^{-x}x^{100}).\end{aligned}$$

Mais $e^{-x}=1+o(1)$, et donc

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)=x-\frac{x^{100}}{100!}+o(x^{100}).$$

**Exercice 7** - **Développement limité d'une fonction réciproque** - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. $f$ est clairement de classe $C^\infty$ et sa dérivée qui vérifie $f'(x)=1+2\tan^2 x$ est strictement positive sur $]-\pi/2,\pi/2[$. Puisque $\lim_{-\pi/2} f=-\infty$ et $\lim_{\pi/2} f=+\infty$, $f$ réalise une bijection de $]-\pi/2,\pi/2[$ sur $\mathbb{R}$. Comme $f'$ ne s'annule pas, $f^{-1}$ est également de classe $C^\infty$.

2. La fonction réciproque d'une fonction impaire est elle-même impaire. En effet, soit $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x)$. Alors on a
$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(-y) &=& f^{-1}(-f(x)) \\ &=& f^{-1}(f(-x)) \\ &=& -x \\ &=& -f^{-1}(f(x)) \\ &=& -f^{-1}(y). \end{array}$$

3. Puisque $f^{-1}$ est de classe $C^\infty$ et est impaire, elle admet un développement limité à l'ordre 6 en 0 qu'on peut écrire sous la forme suivante :
$$f^{-1}(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^6).$$
D'autre part, on sait que
$$f(x) = x + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o(x^6).$$
Le développement limité de $f^{-1}\circ f$ en 0 s'obtient en composant les développements limités. On obtient donc
$$f^{-1}\circ f(x) = a_1x + \left(a_3 + \frac{2a_1}{3}\right)x^3 + \left(a_5 + \frac{4a_1}{15} + 2a_3\right)x^5 + o(x^6).$$
D'autre part, on sait que
$$f^{-1}\circ f(x) = x = x + o(x^6).$$
Par unicité du développement limité en 0, on en déduit le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1 &=& 1 \\ a_3 + \frac{2a_1}{3} &=& 0 \\ a_5 + \frac{4a_1}{15} + 2a_3 &=& 0 \end{array}\right.$$
soit $a_1 = 1$, $a_3 = -2/3$, $a_5 = 16/15$. Le développement limité de $f^{-1}$ à l'ordre 6 en 0 est donc donné par
$$f^{-1}(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{15}x^5 + o(x^5).$$

**Exercice 8 - Développement limité d'une fonction réciproque** - *L1/Math Sup/Oral Mines* - ⋆⋆

On remarque d'abord que $f(x) = x+x^3/2+o(x^3)$. Ainsi, $f$ est continue en 0 avec $f(0) = 0$ et $f$ est dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$. Ainsi, $f$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ensuite, on vérifie (par exemple en la dérivant) que $f$ est strictement croissante. De plus, $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. Ainsi, $f$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque $g = f^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}$. Puisque $f'(0) \neq 0$ et que $f$ est $C^\infty$ au voisinage de 0, $g$ est indéfiniment dérivable en 0.
Ainsi, $g$ admet un DL à tout ordre en 0. De $f(0) = 0$, on tire $g(0) = 0$ et donc le DL à l'ordre

3 de $g$ en 0 s'écrit $g(x)=ax+bx^2+cx^3+o(x^3)$. Pour calculer $a,b,c$, écrivons quel est le développement limité à l'ordre 3 de $f\circ g$. On a

$$f\circ g(x)=(ax+bx^2+cx^3+o(x^3))+(ax+bx^2+cx^3+o(x^3))^3/2+o(g(x)^3)=x$$

soit

$$ax+bx^2+(a^3/2+c)x^3+o(x^3)=x.$$

Par unicité du développement limité, on extrait

$$a=1,\ b=0,\ a^3/2+c=0$$

soit $g(x)=x-x^3/2+o(x^3)$.

## Application des développements limités

**Exercice 9 - Limites de fonctions** - *L1/Math Sup* - $\star$

1. Rappelons les développements limités à l'ordre 3 de sin et tan :

$$\begin{array}{rcl}\sin(x)&=&x-x^3/6+o(x^3)\\ \tan(x)&=&x+x^3/3+o(x^3)\end{array}$$

On en déduit que

$$\exp(\sin x)=\exp\left(x-x^3/6+o(x^3)\right)=\exp(x)\exp\left(-x^3/3+o(x^3)\right)=\exp(x)\left(1-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)$$

où on a utilisé le DL de $\exp(u)=1+u+o(u)$ et où on a composé les développements limités. Avec la même méthode, on trouve

$$\exp(\tan x)=\exp(x)\left(1+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right).$$

Il vient :

$$\frac{\exp(\sin x)-\exp(\tan x)}{\sin x-\tan x}=\exp(x)\frac{-x^3/6-x^3/3+o(x^3)}{-x^3/6-x^3/3+o(x^3)}=\exp(x)\frac{1+o(1)}{1+o(1)}\to 1$$

lorsque $x$ tend vers 0.

2. On écrit

$$x^{x^x}\ln x=\exp(x\ln(x^x))\ln x=\exp(x^2\ln x)\ln x.$$

Puisque $x^2\ln x$ tend vers 0 en $O^+$, on en déduit que $\exp(x^2\ln x)$ tend vers 1 et donc que

$$x^{x^x}\sim_{0^+}\ln x.$$

D'autre part,

$$x^x-1=\exp(x\ln x)-1=1+x\ln x+o(x\ln x)-1=x\ln x+o(x\ln x),$$

la composition des développements limités étant légitime puisque $x\ln x$ tend vers 0 en $0^+$. On en déduit que

$$\frac{x^{x^x}\ln x}{x^x-1}\sim_{0^+}\frac{\ln x}{x\ln x}=\frac{1}{x}$$

et donc que la fonction tend vers $+\infty$ en $0^+$.

3. On passe au logarithme :

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{2}\left(e^{x\ln a}+e^{x\ln b}\right)\right)=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{2}(\ln a+\ln b)\right)\sim_0\frac{1}{x}\frac{x}{2}\ln(ab).$$

Repassant par l'exponentielle, on trouve que la limite recherchée est

$$\exp\left(\frac{1}{2}\ln(ab)\right)=\sqrt{ab}.$$

4. Il suffit d'écrire

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)=x+o(x)-(-x+o(x))=2x+o(x).$$

La limite recherchée est donc égale à 1.

**Exercice 10 - Étude locale d'une courbe** - *L1/Math Sup* - $\star$

1. Les techniques classiques de calcul montrent que :

$$\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{48}x^3+x^3\varepsilon(x).$$

2. Au point d'abscisse 0, on a $f(0)=1/2$, $f$ est dérivable et vérifie $f'(0)=-1/4$. Le graphe est donc tangent à la droite d'équation $y=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}$.
3. Au voisinage de 0, on a :

$$\frac{1}{1+e^x}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x\right)=\frac{1}{48}x^3+x^3\varepsilon(x).$$

Si $x$ est assez petit, cette quantité est positive pour $x>0$, et négative pour $x<0$ : la courbe traverse sa tangente.

**Exercice 11 - Position relative d'une courbe et de sa tangente** - *L1/Math Sup* - $\star$

On va effectuer un DL jusqu'à l'ordre 3 de $f$. Pour cela, on écrit

$$f(x)=\ln 2+\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$$

et posons $u=x+\frac{x^2}{2}$. On a $\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o(u^3)$, et

$$\begin{aligned}u&=x+\frac{x^2}{2}\\u^2&=x^2+x^3+o(x^3)\\u^3&=x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

ce qui donne

$$f(x)=\ln 2+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3).$$

La courbe représentative de $f$ admet donc au point $(0,\ln 2)$ une tangente d'équation $y=\ln 2+x$. De plus,

$$f(x)-(\ln 2+x)=-\frac{x^3}{6}+o(x^3).$$

Cette différence est donc positive au voisinage de $0^-$, et négative au voisinage de $0^+$. La courbe traverse donc sa tangente en $(0,\ln 2)$.

**Exercice 12 - Branches infinies** - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

On commence par l'étude au voisinage de $+\infty$. On met $x^2$ en facteur sous les racines pour se ramener à effectuer un développement limité en 0 :

$$\sqrt{x^2+1}=x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=x\left(1+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon(1/x)\right).$$

De même,

$$\sqrt{x^2-1}=x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=x\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon(1/x)\right).$$

On en déduit :

$$f(x)=2x+\frac{1}{x}\varepsilon(1/x).$$

La courbe d'équation $y=2x$ est donc asymptote à la courbe au voisinage de $=+\infty$. Pour obtenir la position relative de la courbe par rapport à l'asymptote, il faut pousser le développement limité un peu plus loin...jusqu'à obtenir le premier terme non nul !

$$\sqrt{x^2+1}=x\left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\frac{1}{x^4}\varepsilon(1/x)\right),$$

$$\sqrt{x^2-1}=x\left(1-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\frac{1}{x^4}\varepsilon(1/x)\right),$$

ce qui donne :

$$f(x)=2x-\frac{1}{4x^3}+\frac{1}{x^3}\varepsilon(1/x).$$

Au voisinage de $+\infty$, $-\frac{1}{4x^3}+\frac{1}{x^3}\varepsilon(1/x)$ est négatif : la courbe est sous l'asymptote. L'étude au voisinage de $-\infty$ peut se faire en remarquant que la fonction étudiée est paire. On en déduit alors que la droite d'équation $y=-2x$ est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$, et que la courbe est située au-dessous de son asymptote.

**Exercice 13 - Asymptotes** - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. Remplaçons les cosinus hyperboliques et sinus hyperboliques par leur développement en fonction de l'exponentielle. On obtient

$$f(x)=\frac{xe^x-e^x+xe^{-x}+e^{-x}}{e^x+e^{-x}-2}.$$

On met en facteur $e^x$, d'où

$$f(x)=\frac{x-1+xe^{-2x}+e^{-2x}}{1-2e^{-x}+e^{-2x}}.$$

Ce qui nous intéresse, ce sont les termes en $x$ et les termes constants. On peut donc écrire

$$f(x)=\frac{x-1+o(1)}{1+o(1)}.$$

Il vient

$$f(x)=x-1+o(1).$$

La droite d'équation $y=x-1$ est asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$. Si on cherche en plus la position par rapport à l'asymptote, on doit pousser un cran plus loin. On trouve

$$f(x)=\frac{x-1+o(e^{-x})}{1-2e^{-x}+o(e^{-x})}=(x-1+o(e^{-x}))(1+2e^{-x}+o(e^{-x})=(x-1)+2xe^{-x}+o(e^{-x}).$$

Au voisinage de $+\infty$, la courbe est au-dessus de son asymptote.

2. Posons $u=1/x$. Pour $x\to+\infty$, $u$ est voisin de 0. On a

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o(u^3),$$

soit

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o(x^{-3})\right)\\ &= x-\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Autrement dit, la droite d'équation $y=x-1/2$ est asymptote à la courbe représentative de $g$ au voisinage de $+\infty$ et la courbe est au-dessus de son asymptote (au voisinage de l'infini).

3. On pose encore $u=1/x$, et on obtient

$$h(x)=\frac{1+\frac{1}{u}}{1+e^u}=\frac{1+1/u}{2+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)}.$$

On calcule alors le développement limité avec les techniques usuelles et on trouve que

$$h(x)=\frac{1}{2u}+\frac{1}{4}-\frac{u}{4}+o(u)=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite d'équation $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe représentative de $h$, et la courbe est sous son asymptote (au voisinage de l'infini).

4. On effectue un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$. Pour cela, on remarque que :
$$\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2x}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{2}{x}\left(1+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
Il vient :
$$\begin{aligned}x\exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)&=x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\&=x+2+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$
La droite d'équation $y=x+2$ est donc asymptote à la courbe représentative de $u$ au voisinage de $+\infty$, et la courbe est située au-dessus de son asymptote.

**Exercice 14 - Comparaison de fonction** - *L1/Math Sup* - ⋆

On fait un développement limité en 0 à un ordre suffisamment grand pour qu'on puisse distinguer les fonctions. Le point le plus difficile est pour $h(x)$. Mais
$$1-2\sin x=1-2x+o(x^2)$$
de sorte que
$$h(x)=1-x-\frac{x^2}{2}+o(x).$$
Pour les autres, on a
$$\begin{aligned}f(x)&=1-x+x^2+o(x^2)\\g(x)&=1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\\k(x)&=1-x+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\end{aligned}$$
En comparant donc les termes d'ordre 2, on trouve $h\leq k\leq g\leq f$. Les courbes représentatives sont bien sûr dans le même ordre.

**Exercice 15 - Dérivée n-ième en 0** - *L1/Math Sup* - ⋆

Remarquons que la fonction est de classe $C^\infty$. Par la formule de Taylor-Young, elle admet un développement limité à l'ordre $n$ en 0, et le coefficient devant $x^n$ est $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. D'autre part, on a :
$$\frac{x^4}{1+x^6}=x^4\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{6k}+o(x^{6n+4}).$$
Par unicité de la partie régulière d'un développement limité, si $n\equiv 4 \mod 6$, alors $f^{(n)}(0)=n!(-1)^{(n-4)/6}$, sinon, $f^{(n)}(0)=0$.

**Exercice 16 - Limite un peu théorique** - *L1/Math Sup* - ⋆

Puisque $f$ est deux fois dérivable en $x$, elle admet un développement limité d'ordre 2 en $x$ donné par la formule de Taylor-Young. On trouve donc
$$\begin{aligned}f(x-h)&=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+o(h^2)\\-2f(x)&=-2f(x)\\f(x+h)&=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+o(h^2)\end{aligned}$$

En sommant tout et en divisant par $h^2$, on trouve finalement

$$\frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2}=f''(x)+o(1).$$

La limite recherchée vaut donc $f''(x)$.

**Exercice 17 - Somme des premiers entiers** - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. On commence par écrire que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(n+1)x+\frac{(n+1)^2}{2}x^2+\frac{(n+1)^3}{6}x^3+\frac{(n+1)^4}{24}x^4+o(x^4)}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}\\ &= \frac{(n+1)+\frac{(n+1)^2}{2}x+\frac{(n+1)^3}{6}x^2+\frac{(n+1)^4}{24}x^3+o(x^3)}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)}. \end{aligned}$$

Posons $u=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)$ et utilisant le DL de $\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+o(u^3)$, on trouve

$$\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^3).$$

Il reste à réaliser le produit des deux développements limités. Après simplifications et factorisations, on trouve

$$f(x)=(n+1)+\frac{n(n+1)}{2}x+\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}x^2+\frac{n^2(n+1)^2}{24}x^3+o(x^3).$$

2. On va écrire $f$ d'une autre façon en remarquant que $f$ est somme d'une série géométrique. On a en effet

$$f(x)=\sum_{k=0}^n \exp(kx).$$

On peut alors calculer le développement limité de $f$ en utilisant cette formule, et on trouve

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n\left(1+kx+\frac{k^2x^2}{2}+\frac{k^3x^3}{6}+o(x^3)\right)\\ &= n+1+\left(\sum_{k=1}^n k\right)x+\left(\sum_{k=1}^n k^2\right)\frac{x^2}{2}+\left(\sum_{k=1}^n k^3\right)\frac{x^3}{6}+o(x^3). \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on peut identifier les termes devant $x^3$. On trouve

$$\sum_{k=1}^n k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Cette méthode permet de calculer n'importe quelle somme $\sum_{k=1}^n k^p$ (à condition d'être assez courageux pour déterminer le développement limité jusqu'à l'ordre $p$).

## Développements asymptotiques de suites implicites

**Exercice 18** - **Tangente** - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. La fonction $x \mapsto \tan x - x$ est une bijection strictement croissante de l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. En effet, sa dérivée est égale à $1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x$, qui est strictement positive sauf pour $x = n\pi$. On en déduit que l'équation $\tan x = x$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Il faut prendre garde au fait que arctan est la réciproque de tan $:]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$. Ainsi, on doit écrire
$$\tan(x_n) = x_n \iff \tan(x_n - n\pi) = x_n$$
et là, puisque $x_n$ est élément de $]-\pi/2, \pi/2[$, ceci est équivalent à
$$x_n - n\pi = \arctan(x_n).$$
3. Puisque $(x_n)$ est croissante et que la fonction arctan l'est aussi, la suite $(x_n - n\pi)$ est croissante. Puisqu'elle est majorée par $\pi/2$, elle est convergente, vers $l$. Passant à la limite dans l'équation $x_n - n\pi = \arctan(x_n)$, on trouve $l = \pi/2$. On peut donc bien écrire $x_n = n\pi + \pi/2 + o(1)$.
4. On commence par rappeler le développement limité de arctan en 0. Il s'obtient par intégration du développement limité de $\frac{1}{1+x^2}$. On a donc
$$\arctan(x) = x + o(x^2).$$
On va avoir besoin du développement limité de arctan au voisinage de $+\infty$. Il s'obtient facilement à partir du développement limité précédent et de la relation $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$, vraie pour $x > 0$. On obtient donc, au voisinage de $+\infty$,
$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
Utilisons maintenant la relation démontrée en 2. En posant $x_n = n\pi + \pi/2 + \varepsilon_n$, on obtient
$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon_n = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n\pi + \pi/2 + \varepsilon_n}\right).$$
On utilise le développement limité préalablement calculé (à l'ordre 1) :
$$\varepsilon_n = \frac{-1}{n\pi + \pi/2 + \varepsilon_n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
soit, en développant le terme de droite
$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{-1}{n\pi} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{\pi n}} + o(1/n^2) \\ &= \frac{-1}{n\pi} \times \left(1 - \frac{1}{2n} + o(1/n)\right) + o(1/n^2) \\ &= \frac{-1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o(1/n^2). \end{aligned}$$
Ceci donne le développement limité souhaité pour la suite $(x_n)$.

**Exercice 19** **- Sinus hyperbolique** - *L1/Math Sup/Petites Mines* - ⋆⋆

1. Soit, pour $x \geq 0$, la fonction $g(x) = \tanh(x) - x$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée
$$g'(x) = 1 - \tanh^2 x - 1 = -\tanh^2 x < 0.$$
La fonction $g$ est donc strictement décroissante et puisque $g(0) = 0$, on en déduit que $g(x) < 0$ pour tout $x > 0$.
2. Un calcul direct prouve que
$$f'(x) = \left(\tanh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\cosh\left(\frac{1}{x}\right).$$
Comme cosh est strictement positive, on trouve d'après la question précédente que $f'$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculons ses limites en 0 et en $+\infty$.
   - en 0 : on pose $u = 1/x$, et on a
   $$x\sinh(x) = \frac{\sinh u}{u} = \frac{e^u - e^{-u}}{2u}.$$
   Or, $\lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$ par croissances comparées, et $\lim_{u\to+\infty} \frac{e^{-u}}{u} = 0$. Finalement, on trouve que $\lim_0 f = +\infty$.
   - en $+\infty$ : on pose encore $u = 1/x$, de sorte que
   $$x\sinh(x) = \frac{\sinh u}{u} \sim_0 \frac{u}{u} = 1.$$
   Ainsi, $\lim_{+\infty} f = 1$.
3. C'est du cours, en utilisant le DL à l'ordre 3 de $\sinh u$ :
$$\frac{\sinh u}{u} = 1 + \frac{u^2}{6} + o(u^2).$$
4. On pose $u = 1/x$ et on utilise le résultat de la question précédente. Donc, au voisinage de $+\infty$, on a
$$f(x) = \frac{\sin h}{u} = 1 + \frac{u^2}{6} + o(u^2) = 1 + \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
5. La fonction $f$ est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. C'est donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]\lim_{+\infty} f, \lim_0 f[=]1, +\infty[$. Comme $(n+1)/n \in ]1, +\infty[$, on a bien l'existence d'un unique $u_n$ avec $f(u_n) = \frac{n}{n+1}$.
6. On sait que, pour tout $n \geq 1$, on a
$$\frac{n+1}{n} \geq \frac{n+2}{n+1},$$
c'est-à-dire
$$f(u_n) \geq f(u_{n+1}).$$
La fonction $f$ étant décroissante, ceci signifie que
$$u_n \leq u_{n+1}.$$

7. Première rédaction : on écrit $u_n = f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$. Puisque $\frac{n+1}{n} \to 1$ et que $f^{-1}$ admet une limite en 1, on en déduit par composition des limites que
$$\lim_{+\infty} u_n = \lim_{1} f^{-1} = +\infty.$$
Deuxième rédaction : la suite $(u_n)$ étant croissante, ou bien elle tend vers $+\infty$, ou bien elle est majorée. Si elle est majorée disons par $M$, alors on a, puisque $f$ est décroissante, pour tout entier $n$,
$$\frac{n}{n+1} = f(u_n) \geq f(M).$$
Passons à la limite : on obtient $1 \geq f(M)$. Mais $f(M) > 1$ et on a donc une contradiction. Ainsi, $(u_n)$ ne peut pas être majorée, et elle tend donc vers $+\infty$.
8. Puisque $u_n \to +\infty$, il est légitime d'introduire $u_n$ dans l'expression du développement asymptotique de $f$ trouvé un peu plus haut. On a donc :
$$f(u_n) = 1 + \frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right).$$
On remplace $f(u_n)$ par $1 + 1/n$ et on obtient
$$\frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right) = \frac{1}{n}$$
soit $\frac{1}{6u_n^2} \sim \frac{1}{n}$, donc $\frac{6u_n^2}{n} \to 1$, soit encore, en prenant la racine carrée,
$$\frac{\sqrt{6}u_n}{\sqrt{n}} \to 1.$$
Finalement, on a prouvé que
$$u_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{n}{6}}.$$

**Exercice 20** - **Suite implicite - exponentielle** - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

1. La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x$ est dérivable, et sa dérivée vérifie $f'(x) = e^x + 1 > 0$. Puisque $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, $f$ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, il existe un unique élément $u_n \in \mathbb{R}$ pour lequel $f(u_n) = n$.
2. Puisque $f$ est strictement croissante et que $\lim_{+\infty} f = +\infty$, $f^{-1}$ est aussi strictement croissante et vérifie également $\lim_{+\infty} f^{-1} = +\infty$. Puisque $u_n = f^{-1}(n)$, on en déduit par passage à la limité que $\lim_{+\infty} u_n = +\infty$.
3. Le point clé est de remarquer que, puisque $u_n$ tend vers $+\infty$, on a $u_n = o(e^{u_n})$. De l'équation $e^{u_n} + u_n = n$, on en déduit
$$e^{u_n} + o(e^{u_n}) = e^{u_n}(1 + o(1)) = n.$$
On prend alors le logarithme de cette expression, et on trouve
$$u_n \ln(1 + o(1)) = \ln n$$

soit
$$u_n + o(u_n) = \ln n$$
ce qui dit bien que $u_n \sim \ln n$.

4. On pose donc $v_n = u_n - \ln n$ et on écrit que
$$e^{\ln n + v_n} + \ln n + v_n = n.$$
En isolant $e^{v_n}$ dans l'expression précédente, on obtient
$$e^{v_n} = 1 - \frac{\ln n}{n} - \frac{v_n}{n} = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$
Il suffit de prendre le logarithme de cette expression et d'utiliser le développement limité à l'ordre 1 de $\ln(1-x)$ pour trouver que
$$v_n = -\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$
Ceci donne bien le développement asymptotique demandé pour $u_n$.