# Calculs de DLs

**Exercice 1 - Somme et produit de DLs** - *L1/Math Sup* - ⋆

Calculer les développements limités suivants :

**1.** $\dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0 **2.** $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0

**3.** $\sin x\cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0 **4.** $\cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0

**5.** $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0 **6.** $\big(\ln(1+x)\big)^2$ à l'ordre 4 en 0

**Exercice 2 - Composition de DLs** - *L1/Math Sup* - ⋆

Calculer les développements limités suivants :

**1.** $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0 **2.** $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 en 0

**3.** $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0 **4.** $x\big(\cosh x\big)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4 en 0.

**Exercice 3 - Inverse de DL** - *L1/Math Sup* - ⋆

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

**1.** $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0 **2.** $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0

**3.** $\dfrac{\sin x-1}{\cos x+1}$ à l'ordre 2 en 0 **4.** $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0.

**Exercice 4 - DLs pas en 0 !** - *L1/Math Sup* - ⋆

Calculer les développements limités suivants :

**1.** $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 2 **2.** $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 3 en $+\infty$

**3.** $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln x$ à l'ordre 4 en $+\infty$

**Exercice 5 - Ordre le plus grand possible** - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Déterminer $a$ et $b$ pour que la partie principale du développement limité en 0 de la fonction $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit de degré le plus grand possible.

**Exercice 6 - Astucieux !** - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Calculer, à l'ordre 100, le DL de $\ln\left(\sum_{k=1}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)$.

**Exercice 7 - Développement limité d'une fonction réciproque** - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soit $f$ la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=2\tan x - x$.

1. Montrer que $f$ admet une fonction réciproque de classe $C^\infty$.
2. Justifier que $f^{-1}$ est impaire.
3. Donner le développement limité de $f^{-1}$ à l'ordre 6 en 0. On rappelle que $\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^6)$.

**Exercice 8 - Développement limité d'une fonction réciproque** - *L1/Math Sup/Oral Mines* - ⋆⋆

Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=\frac{e^{x^2}-1}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$. Montrer que $f$ admet une fonction réciproque sur $\mathbb{R}$. Donner un développement limité de $f^{-1}$ à l'ordre 3 en 0.

## Application des développements limités

**Exercice 9 - Limites de fonctions** - *L1/Math Sup* - ⋆

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

**1**. $\dfrac{\exp(\sin x)-\exp(\tan x)}{\sin x-\tan x}$ en 0; **2**. $\dfrac{x^{x^x}\ln x}{x^x-1}$ en $0^+$;

**3**. $\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ en 0; **4**. $\dfrac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ en 0;

**Exercice 10 - Étude locale d'une courbe** - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$.

1. Donner un développement limité de $f$ à l'ordre 3 en zéro.
2. En déduire que la courbe représentative de $f$ admet une tangente au point d'abscisse 0, dont on précisera l'équation.
3. Prouver que la courbe traverse la tangente en 0. Un tel point est appelé point d'inflexion.

**Exercice 11 - Position relative d'une courbe et de sa tangente** - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(x^2+2x+2)$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.

**Exercice 12 - Branches infinies** - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

A l'aide des développements limités, déterminer les asymptotes éventuelles et la position relative par rapport aux asymptotes de la courbe représentative de la fonction :

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}.$$

**Exercice 13 - Asymptotes** - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote dont on donnera l'équation. On précisera aussi la position de la courbe par rapport à son asymptote.

**1**. $f(x)=\dfrac{x\cosh(x)-\sinh(x)}{\cosh x-1}$ **2**. $g(x)=x^2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

**3**. $h(x)=\dfrac{x+1}{1+\exp(1/x)}$ **4**. $u(x)=x\exp\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$

**Exercice 14 - Comparaison de fonction** - *L1/Math Sup* - ⋆

On pose $f(x) = 1/(1+x)$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = \sqrt{1-2\sin x}$, $k(x) = \cos(\sqrt{2x})$. Préciser les positions relatives au voisinage de 0 des courbes représentatives $C_f$, $C_g$, $C_h$, $C_k$.

**Exercice 15 - Dérivée n-ième en 0** - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit $f : x \mapsto \frac{x^4}{1+x^6}$. Déterminer $f^{(n)}(0)$.

**Exercice 16 - Limite un peu théorique** - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit $f$ définie au voisinage de $a$ et deux fois dérivable en $a$. Calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}.$$

**Exercice 17 - Somme des premiers entiers** - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soit $n \geq 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\exp\big((n+1)x\big)-1}{\exp(x)-1} & \text{si } x \neq 0 \\ n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer le développement limité de $f$ en 0 à l'ordre 3.
2. En déduire la valeur de
$$\sum_{k=1}^{n} k^3.$$

## DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DE SUITES IMPLICITES

**Exercice 18 - Tangente** - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ possède une solution unique dans $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Quelle relation lie $x_n$ et $\arctan(x_n)$ ?
3. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$.
4. En écrivant $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n$ et en utilisant le résultat de la question 2., en déduire que
$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

**Exercice 19 - Sinus hyperbolique** - *L1/Math Sup/Petites Mines* - ⋆⋆

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sinh\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\tanh(x) < x$.
2. En déduire le tableau de variations de $f$. On précisera les limites.
3. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $u \mapsto \frac{\sinh u}{u}$.

4. En déduire que $f$ admet au voisinage de $+\infty$ un développement asymptotique de la forme
$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$
où $a_0, a_1, a_2$ sont des réels que l'on précisera.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{n+1}{n}$ admet une unique solution $u_n > 0$.
6. Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.
7. Montrer que la suite $(u_n)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
8. Déterminer un équivalent de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 20 - Suite implicite - exponentielle** - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x + x - n = 0$.

1. Montrer que l'équation admet une unique solution que l'on notera $u_n$.
2. Montrer que la suite $(u_n)$ tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $u_n \sim_{+\infty} \ln n$.
4. En étudiant $v_n = u_n - \ln n$, montrer que
$$u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$