Equation linéaire du premier ordre

Exercice 1 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
a) $y'+2y=x^2$ b) $y'+y=2\sin x$
c) $y'-y=(x+1)\mathrm{e}^x$ d) $y'+y=x-\mathrm{e}^x+\cos x$.

Exercice 2 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
a) $(x^2+1)y'+2xy+1=0$ b) $y'+2xy=2x\mathrm{e}^{-x^2}$
c) $(x^2+1)y'-xy=(x^2+1)^{3/2}$ d) $(x^2+1)^2y'+2x(x^2+1)y=1$
e) $\sqrt{1+x^2}\,y'-y=1$ f) $(2+\cos x)y'+\sin(x)y=(2+\cos x)\sin x$
g) $y'-y=\sin(2x)\mathrm{e}^x$ h) $x(1+\ln^2(x))y'-2\ln(x)y=(1+\ln^2(x))^2$
i) $(1+\mathrm{e}^x)y'+\mathrm{e}^xy=(1+\mathrm{e}^x)$ j) $\mathrm{ch}\,x.y'-\mathrm{sh}\,x.y=\mathrm{sh}^3\,x$
k) $(1+\cos^2 x)y'-\sin 2x.y=\cos x$ l) $(x^2+1)y'+xy=1$.
m) $(x^2+1)^2y'+2x(x^2+1)y=1$ n) $y'-\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{1+\mathrm{ch}\,x}y=\mathrm{sh}\,x$.

Exercice 3 Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles spécifiés :
a) $xy'+\alpha y=0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (avec $\alpha\in\mathbb{R}$ fixé),
b) $y'\sin x-y\cos x+1=0$ sur $]0,\pi[$,
c) $\sqrt{1-x^2}\,y'+y=1$ sur $]-1,1[$,
d) $(\mathrm{e}^x-1)y'-\mathrm{e}^xy=1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$,
e) $y'+y\tan x=\sin 2x$ sur $]-\pi/2,\pi/2[$,
f) $\mathrm{sh}(x)y'-\mathrm{ch}(x)y=1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$,
g) $\sqrt{x^2-1}\,y'+y=1$ sur $[1,+\infty[$,
h) $(\sin x)^3y'=2(\cos x)y$ sur $]0,\pi[$.

Exercice 4 Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 donc les fonctions $f(x)=\dfrac{C+x}{1+x^2}$ seraient les solutions.

Exercice 5 Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ dérivables telles que $\forall s,t\in\mathbb{R}, f(s+t)=f(s)f(t)$.

Exercice 6 Déterminer les fonctions $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dérivables telles que
$\forall x\in[0,1], f'(x)+f(x)+\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=0$.

Exercice 7 Trouver toutes les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :
$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=\mathrm{e}^xf(y)+\mathrm{e}^yf(x)$.

Exercice 8 Déterminer les fonctions $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dérivables telles que $f'(x)+f(x)=f(0)+f(1)$.

Equation linéaire du second ordre à coefficients constants

Exercice 9 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
a) $y''+2y'+2y=2x-\sin x$ b) $y''-3y'+2y=x\,\mathrm{ch}\,x$ c) $y''-2y'+y=2\,\mathrm{ch}\,x$

d) $y''+y=x\sin x$ e) $y''+2y'+y=x\mathrm{e}^x$ f) $y''+2y'+2y=(x+1)\mathrm{e}^{-x}$
g) $y''+y=2\cos^2 x$ h) $y''+y'-2y=x\mathrm{e}^x$ i) $y''+2y'+4y=x^2\mathrm{e}^{-x}$

Exercice 10 Soit ω et ω_0 deux réels strictement positifs et distincts.
Résoudre l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=\cos(\omega_0 x)$ avec pour condition initiale $y(0)=1, y'(0)=0$.

Exercice 11 Déterminer les couples $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que toute solution de $y''+ay'+by=0$ soit bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 12 Trouver toutes les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables telles que : $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)+f(-x)=\mathrm{e}^x$.

Exercice 13 Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que
$\forall x,y\in\mathbb{R}, f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ et $f(0)=1$

Exercice 14 Trouver toutes les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que :
$\forall x\in\mathbb{R}, f''(x)+f(-x)=x$.

Exercice 15 Soit $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ une fonction continue non nulle.
On se propose de montrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y''+p(x)y=0$ s'annule.
Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que f est une solution ne s'annulant pas.
a) Justifier que f est de signe constant.
Quitte à considérer $-f$ au lieu de f, on peut supposer $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)>0$.
b) Etudier le signe de f''.
c) Soit $a\in\mathbb{R}$ quelconque. Quelle est l'équation de la tangente à f en a ?
d) Montrer que le graphe de f est en dessous de sa tangente en a.
e) En déduire que $f'(a)=0$ et conclure.

Résolution par changement de fonction inconnue

Exercice 16 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(1+x^2)y''+2xy'=0$.

Exercice 17 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(1+\mathrm{e}^x)y''+y'-\mathrm{e}^x y=0$ en introduisant la fonction $z=y'+y$.

Exercice 18 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y''+4xy'+(3+4x^2)y=0$ en introduisant la fonction $z(x)=\mathrm{e}^{x^2}y(x)$.

Exercice 19 Résoudre l'équation différentielle : $(1+\mathrm{e}^x)^2y''-2\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)y'-(3\mathrm{e}^x+1)y=0$
en introduisant $z(x)=\dfrac{y(x)}{1+\mathrm{e}^x}$.

Exercice 20 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $E: xy''-(1+x)y'+y=1$ en posant $z=y'-y$.

Exercice 21 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $E:(1+\mathrm{e}^x)y''+2\mathrm{e}^x y'+(2\mathrm{e}^x+1)y=x\mathrm{e}^x$ via $z(x)=(1+\mathrm{e}^x)y(x)$.

Exercice 22 Résoudre sur $\left]0,+\infty\right[$ l'équation différentielle $t^3y''-2ty+3=0$ en posant $z=ty'+y$.

Résolution par changement de variable

Exercice 23 Résoudre $(1+x^2)^2y''+2(x-1)(1+x^2)y'+y=0$ par le changement de variable $t=\arctan x$.

Exercice 24 Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(t^2+1)^2y''+2t(t^2+1)y'+y=0$ via $x=\arctan t$.

Exercice 25 Résoudre $(1-x^2)y''-xy'+4y=\arccos x$ sur $]-1,1[$ par le changement de variable $t=\arccos x$.

Exercice 26 Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ les équations suivantes via le changement de variable $t=\ln t$.
a) $x^2y''+xy'-y=x^2$ b) $x^2y''-2y=x$

Exercice 27 Résoudre $(1+x^2)y''+xy'-4y=0$ en posant $x=\operatorname{sh} t$.

david Delaunay http://mpsiddl.free.fr