Fonctions de deux variables réelles

Généralités sur les fonctions de deux variables

Exercice 1 [01733] [correction]
Déterminer tous les couples $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+\star})^2$ pour lesquels il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x, y > 0, x^\alpha y^\beta \leqslant M(x+y)$$

Exercice 2 [01734] [correction]
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ et x un point de $\mathbb{R}^2$. On note $d(x, A) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$.
Montrer que $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne.

Limite

Exercice 3 [01735] [correction]
Etudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :
a) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
b) $f(x,y) = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$
c) $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$
d) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

Exercice 4 [01736] [correction]
Etudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :
a) $f(x,y) = \frac{x^3}{y}$
b) $f(x,y) = \frac{x+2y}{x^2-y^2}$
c) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$

Exercice 5 [00068] [correction]
Etudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :
a) $f(x,y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
b) $f(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{xy^2}$
c) $f(x,y) = x^y = \mathrm{e}^{y \ln x}$
d) $f(x,y) = \frac{\mathrm{sh} x \mathrm{sh} y}{x+y}$

Exercice 6 [01737] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = \frac{f(x^2+y^2) - f(0)}{x^2+y^2}$$

Déterminer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Continuité

Exercice 7 [01738] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 \text{ si } x^2+y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est continue.

Exercice 8 [01739] [correction]
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } y \neq x \\ f'(x) & \text{si } y = x \end{cases}$$

Montrer que la fonction F est continue.

Exercice 9 [01741] [correction]
Soit A une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Soit a et b deux points de A et y un réel tels que $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$.
Montrer qu'il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Dérivées partielles

Exercice 10 [01742] [correction]
Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :
a) $f(x,y) = x^y$ (avec $x > 0$)b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ c) $f(x,y) = x\sin(x+y)$.

Exercice 11 [01743] [correction]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x}, \text{ si } x\neq 0\\ 0, \text{ si } x=0\end{cases}$.

a) Montrer que f admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$.
b) Observer que néanmoins f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 12 [01744] [correction]
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Montrer que f admet une dérivée en $(0,0)$ selon tout vecteur sans pour autant y être continue.

Exercice 13 [01745] [correction]

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{|x|+|y|} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.

Justifier que f est continue en $(0,0)$.
Etudier les dérivées partielles de f en $(0,0)$.

Exercice 14 [01746] [correction]
Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable. On pose $f:\mathbb{R}^\star\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\varphi(y/x)$.
Montrer que f vérifie la relation :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

Exercice 15 [03348] [correction]
Calculer les dérivées partielles de

$$f(x,y)=\min(x,y^2)$$

Fonctions de classe C1

Exercice 16 [01747] [correction]
Etudier la continuité, l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f :

a) $f(x,y)=\begin{cases}x^2y^2\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

b) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Exercice 17 [01748] [correction]
Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\int_x^y\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles premières.

Dérivées de fonctions composées

Exercice 18 [01749] [correction]
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$
On pose $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $g(t)=f(2t,1+t^2)$.
Exprimer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 19 [01755] [correction]
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $g(u,v)=f(u^2+v^2,uv)$.
a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
b) Exprimer $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles de la fonction f notées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 20 [01750] [correction]
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$g(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$$

a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
b) Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.
c) Exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.

Exercice 21 [01752] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+t, y+t) = f(x,y)$$

Montrer que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

Exercice 22 [01753] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(tx, ty) = f(x,y)$$

Montrer que

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

Exercice 23 [00045] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ homogène de degré $n \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(tx, ty) = t^n f(x,y)$$

a) Montrer que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf$$

b) On suppose $n \geqslant 1$. Montrer que les dérivées partielles de f sont elles aussi homogènes, préciser leur degré.

Fonctions de classe C2

Exercice 24 [01756] [correction]
Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions suivantes :
a) $f(x,y) = x^2(x+y)$ b) $f(x,y) = \cos(xy)$.

Exercice 25 [01757] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0$$

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
b) Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et diffèrent. Qu'en déduire ?

Exercice 26 [01758] [correction]
On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
b) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice 27 [01759] [correction]
Soit f et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^2$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x,y) = f(x + \varphi(y))$.
a) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$.
b) Vérifier l'égalité : $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0$.

Exercice 28 [01760] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(u,v) = f(uv, u^2+v^2)$.
a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$.
b) Exprimer les dérivées partielles d'ordre 2 de g en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 29 [01761] [correction]
Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Justifier que g est $\mathcal{C}^2$ et exprimer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de g.

Extremum de fonctions de deux variables

Exercice 30 [01762] [correction]
Déterminer les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :
a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
b) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$
c) $f(x,y) = x^3 + y^3$
d) $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$
e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Equations aux dérivées partielles

Exercice 31 [01763] [correction]
En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x + 3y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Exercice 32 [01764] [correction]
En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x \\ v = y - x \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Exercice 33 [01766] [correction]
En passant en coordonnées polaires, résoudre sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ l'équation aux dérivées partielles

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Exercice 34 [01768] [correction]
En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exercice 35 [01769] [correction]
Soit $c > 0$. En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Problème de primitivation

Exercice 36 [01772] [correction]
Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ solutions des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 y \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$.

Analyse vectorielle

Exercice 37 [01773] [correction]
On appelle laplacien d'un champ scalaire F de classe $\mathcal{C}^2$ le champ scalaire défini par

$$\Delta F = \operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} F\right)$$

a) Montrer

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

b) Exprimer $\frac{\partial F}{\partial \rho}(M)$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}(M)$ en fonction de $\frac{\partial F}{\partial x}(M)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(M)$

c) Exprimer ΔF en fonction de $\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}$, $\frac{\partial F}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$.

Exercice 38 [01774] [correction]
Soit F un champ scalaire de classe $\mathcal{C}^1$ de l'espace. Exprimer $\overrightarrow{\operatorname{grad}} F(M)$ en fonction $\frac{\partial F}{\partial \rho}(M)$, $\frac{\partial F}{\partial \varphi}(M)$, $\frac{\partial F}{\partial z}(M)$ et des vecteurs du repère cylindrique associé au point M.

Exercice 39 [01775] [correction]
Soit $\vec{F}$ le champ de vecteurs du plan défini par $\vec{F}(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$.
a) Calculer $\mathrm{div}\vec{F}(M)$
b) Le champ de vecteurs $\vec{F}$ dérive-t-il d'un potentiel ?

Exercice 40 [01776] [correction]
Soit $\vec{F}$ le champ de vecteurs de l'espace défini par $\vec{F}(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$.
a) Ce champ de vecteur dérive-t-il d'un potentiel ?
b) Calculer $\mathrm{div}\vec{F}(M)$ et $\mathrm{Rot}\vec{F}(M)$.

Exercice 41 [01777] [correction]
Soit $\vec{\omega}$ un vecteur de l'espace et $\vec{F}$ le champ de vecteurs de l'espace défini par $\vec{F}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$.
a) Calculer $\mathrm{div}\vec{F}(M)$ et $\mathrm{Rot}\vec{F}(M)$.
b) Le champ de vecteur $\vec{F}$ dérive-t-il d'un potentiel ?

Exercice 42 [01778] [correction]
[Fonctions harmoniques]
Une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ est dite harmonique si, et seulement si, son laplacien $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est nul.
a) Montrer que si f est harmonique et de classe $\mathcal{C}^3$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ le sont aussi.
On suppose que $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est radiale i.e. qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$.
b) Montrer que f est harmonique si, et seulement si,φ' est solution d'une équation différentielle qu'on précisera.
c) En résolvant cette équation, déterminer f.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Soit (α,β) solution. Considérons
$$f(x,y)=\frac{x^\alpha y^\beta}{x+y}$$
sur $(\mathbb{R}^{+\star})^2$.
On a
$$f(x,x)=\frac{x^{\alpha+\beta}}{2x}$$
f bornée implique $\alpha+\beta=1$.
Inversement, supposons $\alpha+\beta=1$.
Si $y\geqslant x$ alors
$$0\leqslant f(x,y)=\frac{x^\alpha y^{1-\alpha}}{x+y}\leqslant\frac{y}{x+y}\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha\leqslant 1$$
Si $x\geqslant y$ alors idem.

Exercice 2 : [énoncé]
Pour tout $a\in A$, $d(x,A)\leqslant\|x-a\|\leqslant\|x-y\|+\|y-a\|$ donc
$d(x,A)-\|x-y\|\leqslant d(y,A)$.
Ainsi $|d(x,A)-d(y,A)|\leqslant\|x-y\|$ et donc $x\mapsto d(x,A)$ est lipschitzienne.

Exercice 3 : [énoncé]
a) $f(0,1/n)=0\to 0$ et $f(1/n,1/n)=1/2\to 1/2$. Pas de limite en $(0,0)$.
b) $f(1/n,0)\to 1$ et $f(1/n,-1/n)\to 1/2$. Pas de limite en $(0,0)$.
c) $|f(x,y)|=|x|\frac{|xy|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{2}|x|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$ ou
$f(x,y)=r\cos^2\theta\sin\theta\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$.
d) $|f(x,y)|\leqslant|xy|\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|xy|\to 0$ ou $f(x,y)=r^2\cos^2\theta\sin^2\theta\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$.

Exercice 4 : [énoncé]
a) $f(0,1/n)\to 0$ et $f(1/n,1/n^3)\to 1$. Pas de limite en $(0,0)$
b) $f(0,-1/n)=2n\to+\infty$ et $f(0,1/n)=-2n\to-\infty$. Pas de limite en $(0,0)$.
c) $0\leqslant f(x,y)\leqslant\frac{1}{2}|xy|\to 0$ ou $f(r\cos\theta,r\sin\theta)=O(r^2)$.

Exercice 5 : [énoncé]
a) $|f(x,y)|\leqslant\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}=r|\sin\theta\cos\theta|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$
b) $f(x,y)=x\frac{1-\cos(xy)}{x^2y^2}$ or $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2}$ donc $f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$.
c) $f(1/n,0)\to 1$ et $f(1/n,1/\ln n)\to 1/\mathrm{e}$. Pas de limite en $(0,0)$.
d) Quand $x\to 0$, $f(x,-x+x^3)\sim-\frac{1}{x}$. La fonction f n'a pas de limite en $(0,0)$.

Exercice 6 : [énoncé]
Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_{x,y}\in\left]0,x^2+y^2\right[$ tel que
$F(x,y)=f'(c)$.
Quand $(x,y)\to(0,0)$ alors $c_{x,y}\to 0$ puis $F(x,y)\to f'(0)$.

Exercice 7 : [énoncé]
Notons $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2<1\right\}$ et $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2>1\right\}$.
f est continue sur D et E.
Soit (x_0,y_0) tel que $x_0^2+y_0^2=1$.
Si $(x,y)\to(x_0,y_0)$ avec $(x,y)\in D$ alors
$f(x,y)\to\frac{1}{2}x_0^2+y_0^2-1=-\frac{1}{2}x_0^2=f(x_0,y_0)$.
Si $(x,y)\to(x_0,y_0)$ avec $(x,y)\in E$ alors $f(x,y)\to-\frac{1}{2}x_0^2=f(x_0,y_0)$.
Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$ et finalement f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8 : [énoncé]
Soit $a=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.
Si $\alpha\neq\beta$ alors au voisinage de a,
$$F(x,y)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\xrightarrow[(x,y)\to a]{}\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=F(\alpha,\beta)$$
Si $\alpha=\beta$ alors :
Quand $(x,y)\to a$ avec $x=y$, $F(x,x)=f'(x)\to f'(\alpha)=F(a)$.
Quand $(x,y)\to a$ avec $x\neq y$, par le théorème des accroissements finis
$$F(x,y)=f'(c)$$
avec c compris entre x et y. Par le théorème des gendarmes, $c\to\alpha$ et par composition
$$F(x,y)\to f'(\alpha)=F(a)$$
Finalement F est continue en tout $a\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 9 : [énoncé]
Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(t) = a + t.(b-a)$.
Par composition $f \circ \varphi$ est continue sur le segment $[0,1]$.
Comme $(f\circ\varphi)(0) = f(a)$ et $(f\circ\varphi)(1) = f(b)$, par le théorème des valeurs intermédiaire, il existe $t \in [0,1]$ tel que $(f\circ\varphi)(t) = y$.
Pour $x = \varphi(t) \in A$ on a $y = f(x)$.

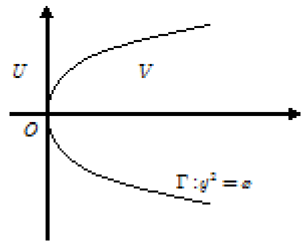
Exercice 10 : [énoncé]
a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln x.x^y$.
b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(x+y) + x\cos(x+y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(x+y)$.

Exercice 11 : [énoncé]
a) Soit $h = (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
$\frac{1}{t}(f(t.h) - f(0,0)) = \frac{1}{t}(f(t\alpha,t\beta)) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ \beta^2/\alpha & \text{sinon}\end{array}\right.$.
Donc $D_h f(0,0) = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha = 0 \\ \beta^2/\alpha \text{ si } \alpha \neq 0\end{cases}$.
b) $f(1/n, 1/\sqrt{n}) = 1 \to 1 \neq f(0,0)$ donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 12 : [énoncé]
Quand $n \to +\infty$
$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right) \to \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$
donc f n'est pas continue en $(0,0)$.
Soit $h = (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{1}{t}(f(t\alpha,t\beta) - f(0,0)) = \frac{t^2\alpha^2\beta}{t^4\alpha^4 + t^2\beta^2} \to \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } \beta = 0 \\ \alpha^2/\beta & \text{sinon}\end{array}\right.$$

Exercice 13 : [énoncé]
$|f(x,y)| \leqslant |y| \frac{|x|}{|x|+|y|} \leqslant |y| \to 0$ donc $f(x,y) \to 0$.
$\frac{1}{h}(f(h,0) - f(0,0)) = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Exercice 14 : [énoncé]
On a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2}\varphi'(y/x) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x}\varphi'(y/x)$$
d'où la relation.

Exercice 15 : [énoncé]
La courbe Γ d'équation $y^2 = x$ est une parabole séparant le plan en deux portions ouvertes
$$U = \left\{(x,y)/x < y^2\right\} \text{ et } V = \left\{(x,y)/x > y^2\right\}$$


Soit $(x_0,y_0) \in U$. Au voisinage de ce couple, $f(x,y) = x$ et donc
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 1 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$
Soit $(x_0,y_0) \in V$. Au voisinage de ce couple, $f(x,y) = y^2$ et donc
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 2y_0$$
Soit $(x_0,y_0) \in \Gamma$ (on a donc $x_0 = y_0^2$). Sous réserve d'existence
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(x_0+t,y_0) - f(x_0,y_0)\right)$$
Pour $t > 0$,
$$\frac{1}{t}\left(f(x_0+t,y_0) - f(x_0,y_0)\right) = \frac{1}{t}\left(y_0^2 - y_0^2\right) = 0$$
et pour $t < 0$,
$$\frac{1}{t}\left(f(x_0+t,y_0) - f(x_0,y_0)\right) = \frac{1}{t}\left(x_0 + t - x_0\right) = 1$$
On en déduit que la première dérivée partielle de f en (x_0,y_0) n'est pas définie.

Sous réserve d'existence

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)\right)$$

Si $y_0\neq 0$ alors pour t du signe de y_0,

$$\frac{1}{t}\left(f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)\right)=\frac{1}{t}\left(x_0-x_0\right)=0$$

et pour t du signe opposé à celui de y_0,

$$\frac{1}{t}\left(f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)\right)=\frac{1}{t}\left((y_0+t)^2-y_0^2\right)=2y_0+t$$

On en déduit que la deuxième dérivée partielle de f en (x_0,y_0) n'est pas définie.
Si $y_0=0$ (et alors $x_0=0$) alors pour tout $t\neq 0$
$\frac{1}{t}\left(f(0,0+t)-f(0,0)\right)=0$
donc la deuxième dérivée partielle de f en $(0,0)$ est définie et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

Exercice 16 : [énoncé]
a) f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
Etudions la continuité en $(0,0)$

$$f(x,y)=(xy)\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\left((x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$

f est donc continue en $(0,0)$.
Etudions l'existence de la dérivée partielle par rapport à x.
Par composition $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
De plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy^2\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^3y^2}{x^2+y^2}$$

et

$$\frac{1}{t}\left(f(t,0)-f(0,0)\right)=0\xrightarrow[t\to 0]{}0$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.
Enfin

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$

car

$$2xy^2\ln(x^2+y^2)=2y\frac{xy}{x^2+y^2}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$$

Par suite $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}^2$.
Etudions l'existence de la dérivée partielles par rapport à y.
Comme $f(x,y)=f(y,x)$ l'étude de $\frac{\partial f}{\partial y}$ est identique.
b) Soit $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(t)=\begin{cases} t\sin 1/\sqrt{t} & \text{si } t\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

La fonction g et continue sur $\mathbb{R}^+$ et comme $f(x,y)=g(x^2+y^2)$, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ donc f admet des dérivées partielles continues sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
De plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Etudions l'existence de dérivées partielles en $(0,0)$.

$$\frac{1}{t}\left(f(t,0)-f(0,0)\right)=t\sin\frac{1}{|t|}=O(t)\xrightarrow[t\to 0]{}0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe pas et vaut 0. Il en est de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{n},0\right)=\frac{2}{n}\sin n-\cos n$$

diverge quand $n\to+\infty$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.
Il en est de même de $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 17 : [énoncé]
Introduisons ϑ primitive de φ sur $\mathbb{R}$. ϑ existe et est $\mathcal{C}^1$ car φ est continue.
$f(x,y)=\vartheta(y)-\vartheta(x)$
donc par opérations f est $\mathcal{C}^1$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\vartheta'(x)=-\varphi(x)\text{ et }\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\vartheta'(y)=\varphi(y)$$

Exercice 18 : [énoncé]
Par composition la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$g'(t) = 2\mathrm{D}_1 f(2t, 1+t^2) + 2t\mathrm{D}_2 f(2t, 1+t^2)$$

Exercice 19 : [énoncé]
a) $(u,v) \mapsto (u^2+v^2, uv)$ est $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ car à composantes polynomiales. Par composition g est de classe $\mathcal{C}^1$.
b) $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 2u\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2, uv) + v\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2, uv)$ et
$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 2v\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2, uv) + u\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2, uv)$.

Exercice 20 : [énoncé]
a) $(\rho,\theta) \mapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc g l'est aussi par composition.
b) Par dérivation de fonctions composées
$\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ et
$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho,\theta) = -\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$
c) En résolvant le système formé par les deux équations précédentes.
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = r\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial g}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = r\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial g}{\partial \theta}$ avec $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Exercice 21 : [énoncé]
On dérive la relation par rapport à t avant d'évaluer en $t=0$.

Exercice 22 : [énoncé]
On dérive la relation par rapport à t avant d'évaluer en $t=1$.

Exercice 23 : [énoncé]
a) En dérivant la relation $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ en la variable t

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = nt^{n-1}f(x,y)$$

En évaluant en $t=1$, on obtient

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = nf(x,y)$$

b) En dérivant la relation $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ en la variable x

$$t\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) = t^n\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

donc, pour $t \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) = t^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

Cette identité se prolonge aussi en $t=0$ grâce à la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$.
On peut conclure que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est de homogène de degré $n-1$.
Idem pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 24 : [énoncé]
a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2+2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x+2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = 2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$.
b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y\sin(xy)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x\sin(xy)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2\cos(xy)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = -\sin xy - xy\cos(xy)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2\cos(xy)$.

Exercice 25 : [énoncé]
a) Par composition f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3xy^2}{x^2+y^2} - \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$.
De plus $\frac{1}{t}(f(t,0)-f(0,0)) = 0$ et $\frac{1}{t}(f(0,t)-f(0,0)) = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
De plus $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant |y|\frac{y^2}{x^2+y^2} + 2|y|\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$
et $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant 3|y|\frac{|xy|}{x^2+y^2} + 2|y|\frac{|xy|}{x^2+y^2}\frac{y^2}{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.
Par suite f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
b) $\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = 1 \to 1$ et $\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = 0 \to 0$.
Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent et on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = 1$.
On en déduit que f n'est pas $\mathcal{C}^2$.

Exercice 26 : [énoncé]
a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(t,0)-f(0,0)\right) = 0$$

et de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.
Par opérations, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

En passant en coordonnées polaires, on vérifie aisément

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

Il en est de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
b)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,t)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right)=-1\text{ et }\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1$$

On en déduit que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ car la conclusion du théorème de Schwarz n'est pas vérifié.

Exercice 27 : [énoncé]
a) Par composition F est $\mathcal{C}^2$.
b) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=f'(x+\varphi(y))$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\varphi'(y)f'(x+\varphi(y))$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)=f''(x+\varphi(y))$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)=\varphi'(y)f''(x+\varphi(y))$. Par suite l'égalité proposée est vérifiée.

Exercice 28 : [énoncé]
a) g est $\mathcal{C}^2$ par composition.
b) $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=v\frac{\partial f}{\partial x}(uv,u^2+v^2)+2u\frac{\partial f}{\partial y}(uv,u^2+v^2)$,
$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=u\frac{\partial f}{\partial x}(uv,u^2+v^2)+2v\frac{\partial f}{\partial y}(uv,u^2+v^2)$,
$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)=$
$v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(uv,u^2+v^2)+4uv\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(uv,u^2+v^2)+4u^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(uv,u^2+v^2)+2\frac{\partial f}{\partial y}(uv,u^2+v^2)$,
$\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)=$
$uv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(uv,u^2+v^2)+2(u^2+v^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(uv,u^2+v^2)+4uv\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(uv,u^2+v^2)+\frac{\partial f}{\partial x}(,)$,
$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)=u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(uv,u^2+v^2)+4uv\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\dots)+4v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\dots)+2\frac{\partial f}{\partial y}(\dots)$

Exercice 29 : [énoncé]
$\frac{\partial g}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial\theta}=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$,
$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$,
$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}=\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$
donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$.

Exercice 30 : [énoncé]
a) Point critique $(0,3)$, $f(0,3)=-9$. Posons $u=x$ et $v=y-3$.

$$f(x,y)-f(0,3)=u^2+uv+v^2=\frac{1}{2}(u^2+v^2)+\frac{1}{2}(u+v)^2\geqslant 0$$

f admet un minimum en $(0,3)$.
b) Point critique $(1,1)$, $f(1,1)=4$. Posons $u=x-1$ et $v=y-1$

$$f(x,y)-f(1,1)=u^2+2v^2-2uv=(u-v)^2+v^2\geqslant 0$$

f admet un minimum en $(1,1)$.
c) Point critique $(0,0)$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$,

$$f(1/n,0)>0\text{ et }f(-1/n,0)<0$$

Pas d'extremum.
d) Point critique $(0,0)$.

$$f(1/n,0)=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\sim\frac{1}{n^2}>0\text{ et }f(-1/n,-1/n+1/n^2)\sim-\frac{2}{n^3}<0$$

Pas d'extremum.
e) Points critiques $(0,0)$ et $(1,1)$.
Etude en $(0,0)$:

$$f(1/n,0)>0\text{ et }f(1/n,1/n)\sim-3/n^2<0$$

Pas d'extremum en $(0,0)$.
Etude en $(1,1)$:
Posons $u=x-1$ et $v=y-1$.

$$f(x,y)-f(1,1)=u^3+3u^2+v^3+3v^2-3uv=\left(u^3+\frac{3}{2}u^2\right)+\left(v^3+\frac{3}{2}v^2\right)+\frac{3}{2}(u-v)^2$$

Comme

$$u^3+\frac{3}{2}u^2\underset{0}{\sim}\frac{3}{2}u^2\geqslant 0\text{ et }v^3+\frac{3}{2}v^2\underset{0}{\sim}\frac{3}{2}v^2\geqslant 0$$

on a localement

$$f(x,y)-f(1,1)\geqslant 0$$

f admet un minimum relatif en $(1,1)$.
Ce minimum ne peut être absolu car $f(-n,0)\to-\infty$.

Exercice 31 : [énoncé]

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3u - v \\ y = v - 2u \end{cases}$$

Posons $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(u, v) = (3u - v, v - 2u)$$

ϕ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$.
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(u, v) = f(3u - v, v - 2u)$,
Par composition $g = f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 3\frac{\partial f}{\partial x}(3u - v, v - 2u) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(3u - v, v - 2u)$$

f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si, $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$ ce qui conduit à $g(u, v) = h(v)$ puis $f(x, y) = h(2x + 3y)$ avec h fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 32 : [énoncé]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ solution de

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(u, v) = f(u, u + v)$.
Par composition g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u, u + v) + \frac{\partial f}{\partial y}(u, u + v) = f(u, u + v) = g(u, v)$$

La fonction $u \mapsto g(u, v)$ est solution de l'équation différentielle $y' = y$ donc il existe $C(v) \in \mathbb{R}$ tel que $g(u, v) = C(v)\mathrm{e}^u$.
Notons que $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car $C(v) = g(0, v)$ avec g de classe $\mathcal{C}^1$.
Par suite, on obtient $f(x, y) = C(y - x)\mathrm{e}^x$.
Inversement, de telles fonctions sont solutions.

Exercice 33 : [énoncé]
Soient $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Par composition, g est de classe $\mathcal{C}^1$.
On a

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = \left(-y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)_{x = r\cos\theta, y = r\sin\theta}$$

Par surjectivité de l'application

$$\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, (r, \theta) \to (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

on peut affirmer que f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si,

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = 0$$

c'est-à-dire, si, et seulement si, $g(r, \theta) = C(r)$ avec C fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $]0, +\infty[$.
On obtient alors $f(x, y) = C(\sqrt{x^2 + y^2})$ puis $f(x, y) = D(x^2 + y^2)$ avec D fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $]0, +\infty[$.

Exercice 34 : [énoncé]
Soient $f : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^{+\star} \times]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ définie par $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Par composition g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star} \times]-\pi/2, \pi/2[$ et

$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si,

$$r\frac{\partial g}{\partial r}(\rho, \theta) = r$$

ce qui conduit à $g(r, \theta) = r + h(\theta)$ puis

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + h\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \sqrt{x^2 + y^2} + k\left(\frac{y}{x}\right)$$

avec k fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 35 : [énoncé]
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(u, v) = f((u + v)/2, (u - v)/2c)$.

Par composition g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et, par calculs, f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0$$

On obtient $g(u,v) = C(u) + D(v)$ puis $f(x,t) = C(x+ct) + D(x-ct)$ avec C et D fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 36 : [énoncé]
a) $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + C^{te}$ sur $\mathbb{R}^2$.
b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + C^{te}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
c) Il n'y a pas de solution car $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ donne
$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C(y)$ qui injectée dans la deuxième équation donne :
$\frac{y}{x^2+y^2} + C'(y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ qui est incompatible avec C fonction de la seule variable y.

Exercice 37 : [énoncé]
a) Puisque

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j}$$

on a

$$\Delta F = \text{div}\overrightarrow{\text{grad}}\, F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

b) Introduisons f et $\tilde{f}$ les représentations cartésiennes et polaires de F.
On a

$$F(M) = \tilde{f}(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

donc

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$$

ce qu'on réécrit

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}(M) = \cos\theta\frac{\partial F}{\partial x}(M) + \sin\theta\frac{\partial F}{\partial y}(M)$$

De même

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(M) = -\rho\sin\theta\frac{\partial F}{\partial x}(M) + \rho\cos\theta\frac{\partial F}{\partial y}(M)$$

c) Aussi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}(M) = \cos^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) + \sin^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M) + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(M)$$

et

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(M) = \rho^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) + \rho^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M) - 2\rho^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(M) - \rho\cos\theta\frac{\partial F}{\partial x}(M) -$$

On observe alors

$$\rho^2\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}(M) + \rho\frac{\partial F}{\partial \rho}(M) + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta}(M) = \rho^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M)\right)$$

et donc

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

Exercice 38 : [énoncé]
Introduisons les représentations cartésiennes et cylindriques de F.

$$F(M) = \tilde{f}(\rho,\varphi,z) = f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)$$

On en tire

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}(\rho,\varphi,z) = \cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z) + \sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)$$

qu'on réécrit :

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}(M) = \cos\varphi\frac{\partial F}{\partial x}(M) + \sin\varphi\frac{\partial F}{\partial y}(M)$$

De même :

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}(M) = -\rho\sin\varphi\frac{\partial F}{\partial x}(M) + \rho\cos\varphi\frac{\partial F}{\partial y}(M)$$

Sachant $\vec{u}_\rho = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}$ et $\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}$, on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}(M)\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \varphi}(M)\vec{u}_\varphi + \frac{\partial F}{\partial z}(M)\vec{k} = \frac{\partial F}{\partial x}(M)\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(M)\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(M)\vec{k}$$

Ainsi

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F = \frac{\partial F}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$$

Exercice 39 : [énoncé]
$\vec{F}(M) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$.
a) $\text{div}\vec{F}(M) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\right) = \frac{1}{OM}$.
b) $\vec{F}$ dérive du potentiel $V(M) = \sqrt{x^2+y^2} = OM$.

Exercice 40 : [énoncé]
$\vec{F}(M) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\vec{k}$
a) $\vec{F}$ dérive du potentiel $V(M) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{1}{OM}$.
b) $\text{div}\vec{F}(M) = \left(\frac{1}{OM^3} - 3\frac{x^2}{OM^5}\right) + \left(\frac{1}{OM^3} - 3\frac{y^2}{OM^5}\right) + \left(\left(\frac{1}{OM^3} - 3\frac{z^2}{OM^5}\right)\right) = -\frac{2}{OM^3}$.
$\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{F} = \vec{o}$ car $\vec{F}$ dérive d'un potentiel.

Exercice 41 : [énoncé]
$\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}$. $\vec{F}(M) = (\omega_y z - \omega_z y)\vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\vec{k}$.
a) $\text{div}\vec{F}(M) = 0$. $\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{F}(M) = 2\omega_x\vec{i} + 2\omega_y\vec{j} + 2\omega_z\vec{k} = 2\vec{\omega}$.
b) Lorsque $\vec{\omega} \neq \vec{o}$, le champ $\vec{F}$ ne dérive pas d'un potentiel.
Lorsque $\vec{\omega} = \vec{o}$, le champ $\vec{F}$ est nul est donc d'un dérive de n'importe quel potentiel constant.

Exercice 42 : [énoncé]
a) $\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta f) = 0$ car $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x}f = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f$ et $\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial x}f = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f$.
Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ est harmonique et il en est de même de $\frac{\partial f}{\partial y}$.
$\Delta\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = x\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} + x\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x} + y\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$
$x\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + y\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \Delta f = 0$.
b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\varphi'(x^2+y^2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\varphi'(x^2+y^2) + 2x^2\varphi''(x^2+y^2)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\varphi'(x^2+y^2) + 2y^2\varphi''(x^2+y^2)$.
$\Delta f = 0 \Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}, (x^2+y^2)\varphi''(x^2+y^2) + \varphi'(x^2+y^2) = 0$
d'où $\Delta(f) = 0 \Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{R}^{+\star}, r\varphi''(r) + \varphi'(r) = 0$.
φ' est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de l'équation différentielle $xy' + y = 0$.
c) Les solutions de l'équation $xy' + y = 0$ sont les fonctions $y(x) = C/x$.
On en déduit $\varphi(x) = C\ln x + D$ avec $C, D \in \mathbb{R}$.
Les fonction harmoniques radiales sont les $f(x,y) = C'\ln(x^2+y^2) + D$ avec $C', D \in \mathbb{R}$.