



[Accueil](#)
[Sciences de l'Ingénieur](#)
[Mathématiques](#)
[Programmation](#)
[Linux](#)
[Images Fractales](#)
[Rechercher ...](#)
[Courriel](#)
[Haut de la page](#)
[Fermer ce menu](#)

Intégration par décomposition en éléments simples

Cet article a pour but d'expliquer toutes les techniques de décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle afin de pouvoir en trouver une primitive.

Comme tous les articles mathématiques du site Gecif.net, la vulgarisation mathématique permet ici d'expliquer avec des mots et des notions simples (de niveau BAC+1) un résultat qui en principe demande un niveau bien supérieur.

Les techniques d'intégration classiques (primitive de fonctions usuelles, intégration par parties, et changement de variables) sont considérées parfaitement connues.

Sommaire de cette page

Rappels sur les fractions rationnelles

Technique de décomposition en éléments simples

Tables des primitives utiles

Intégration d'un élément simple de première espèce

Intégration d'un élément simple de seconde espèce

Exemples d'intégration de fractions rationnelles :

Exemple 1 : $R(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$

Exemple 2 : $R(x) = \frac{x^2}{x + 1}$

Exemple 3 : $R(x) = \frac{2x}{x^2 + x + 1}$

Exemple 4 : $R(x) = \frac{x^4 + x^2 + 2}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$

Exemple 5 : $R(x) = \frac{2x^5 + 3x^3 - x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^3}$

Exemple 6 : $R(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$

NOUVEAU : Calculez vos primitives en ligne grâce à [Gecif.net](#) !

[Retour en haut de la page](#)

Rappels sur les fractions rationnelles

La décomposition en éléments simples n'est pas une technique propre au calcul intégral. Elle permet de décomposer une fraction rationnelle de la forme $P(x)/Q(x)$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes en x avec $Q(x)$ non nul, en somme de fractions élémentaires que l'on sait intégrer.

La décomposition en éléments simples sera donc bien utile pour trouver les primitives de la forme suivante :

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Appelons **R(x)** la fraction rationnelle présente dans l'intégrale :

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Quelques précisions sur la fraction rationnelle **R(x)** :

- **P(x)** est le polynôme présent au numérateur de **R(x)**
- **Q(x)** est le polynôme présent au dénominateur de **R(x)**
- Les valeurs de x qui annulent **P(x)** (c'est-à-dire les racines de **P(x)**) sont appelées **les racines** de **R(x)**
- Les valeurs de x qui annulent **Q(x)** (c'est-à-dire les racines de **Q(x)**) sont appelées **les pôles** de **R(x)**

Quelques remarques élémentaires sur l'intégration de la fraction rationnelle **R(x)** :

- lorsque **P(x)** est la dérivée de **Q(x)** il est inutile de décomposer **R(x)** en éléments simples
- lorsque **R(x)** admet 0 pour seul pôle il est inutile de décomposer **R(x)** en éléments simples
- lorsque **R(x)** admet un seul pôle **h** on se ramène au cas précédent en posant **u=x-h**

Rappel sur la division euclidienne de deux polynômes :

Si **P** et **Q** sont deux polynômes, alors il existe deux autres polynômes **A** et **B** uniques vérifiant **P=A.Q+B** et $\deg(B) < \deg(Q)$

Le polynôme **A** est appelé « **le quotient de la division euclidienne de P par Q** ».

Le polynôme **B** est appelé « **le reste de la division euclidienne de P par Q** ».

Nous ne rappellerons pas ici les techniques permettant de trouver le résultat (quotient et reste) d'une division euclidienne entre deux polynômes, mais la division euclidienne sera utilisée dans certaines décompositions en éléments simples ci-dessous.

[Retour en haut de la page](#)

Technique de décomposition en éléments simples

Toute fraction rationnelle **R(x)** peut se décomposer en éléments simples sous la forme suivante :

$$R(x) = E(x) + \sum Pe + \sum Se$$

Avec :

- **E(x)** la partie entière
- **Pe** un élément simple de première espèce
- **Se** un élément simple de seconde espèce
- **ΣPe** la somme des éléments simples de première espèce
- **ΣSe** la somme des éléments simples de seconde espèce

Rappel : **R(x)=P(x)/Q(x)** avec **P(x)** et **Q(x)** deux polynômes

Notons **P°** le degré du polynôme **P(x)** présent au numérateur de la fraction **R(x)**.

Notons **Q°** le degré du polynôme **Q(x)** présent au dénominateur de la fraction **R(x)**.

Détermination de la partie entière E(x) :

E(x) est un polynôme en **x** (et non une fraction comme **Pe** ou **Se**).

E(x) est donc intégrable directement.

E(x) peut être égal au polynôme nul : **E(x)=0**

La partie entière **E(x)** de la décomposition en éléments simples de **R(x)** se détermine en fonction du degré de **P(x)** et de **Q(x)** :

- Si **P° < Q°** alors la partie entière **E(x)** est nulle
- Si **P° = Q°** alors la partie entière **E(x)** est une constante égale au rapport des coefficients des monômes de plus haut degré
- Si **P° > Q°** alors la partie entière **E(x)** est un polynôme de degré **P°-Q°**

Remarque : la différence **P°-Q°** s'appelle le degré de la fraction rationnelle **R(x)**, noté **R°**. Concernant la partie entière **E(x)** on peut donc résumer :

Plus de
90 000
questions
dans les
10 QCM
pour tout
réviser !

- $E(x)=0$ si $R^\circ < 0$
- $E(x)$ est une constante si $R^\circ = 0$
- $E(x)$ est un polynôme de degré R° si $R^\circ > 0$

Dans le cas où $R^\circ > 0$ alors le polynôme $E(x)$ est égal au quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$:

$$P(x) = E(x).Q(x) + \text{reste}$$

Détermination des éléments simples de première et de seconde espèce :

En fonction de la nature des pôles (réels ou complexes) de $R(x)$ la décomposition ne sera pas de la même forme :

- si $R(x)$ ne possède que des pôles réels, alors $Q(x)$ est factorisable et la décomposition de $R(x)$ donnera seulement des éléments simples de première espèce
- si $R(x)$ possède des pôles complexes alors il y aura des éléments simples de seconde espèce dans la décomposition de $R(x)$

La décomposition en éléments simples possèdera :

- un élément simple de première espèce pour chaque pôle réel
- un élément simple de seconde espèce pour chaque paire de pôles complexes conjugués

La forme générale d'un élément simple de première espèce est la suivante (avec k et a des constantes réelles) :

$$\frac{k}{(x-a)^n}$$

La forme générale d'un élément simple de seconde espèce est la suivante (avec p , q , a , b et c des constantes réelles) :

$$\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Dans les deux types d'éléments simples ci-dessus, les dénominateurs sont donnés par la fraction rationnelle $R(x)$ à décomposer. Le travail de décomposition consiste à trouver les coefficients des numérateurs (k , p et q dans les écritures ci-dessus).

Pour trouver les coefficients des numérateurs des différents éléments simples il n'y a pas une seule méthode miracle, mais un ensemble de techniques à connaître. Chaque fraction rationnelle étant particulière, à chaque décomposition une technique sera plus efficace qu'une autre. Parmi les différentes techniques de décomposition en éléments simples on peut citer :

- la méthode directe (factorisation, identité remarquable, évaluation directe des coefficients en donnant une valeur à x , etc.)
- l'identification des coefficients par résolution d'un système d'équations
- la division euclidienne
- l'emploi des nombres complexes

Selon la forme de la fraction rationnelle à décomposer et la nature de ses pôles (réels, complexes, simples ou multiples), certaines techniques ne donneront que quelques coefficients, et une seconde technique sera alors utilisée pour trouver les autres coefficients. On utilise souvent également un "mélange" des différentes techniques. Plus que jamais l'expérience compte pour maîtriser la décomposition en éléments simples, ce qui est traditionnellement de nature à faire peur aux débutants ...

Cependant la méthode universelle qui marchera dans tous les cas (mais qui peut devenir vite très complexe pour un calcul "manuel") reste l'identification des coefficients par résolution d'un système d'équations après avoir mis la forme décomposée de $R(x)$ au même dénominateur que la forme originale. Le système d'équations à résoudre pour trouver les coefficients peut être résolu de manière classique (par addition ou substitution) ou en utilisant les matrices (et l'algèbre linéaire). Cette technique d'identification des coefficients par résolution d'un système d'équations est celle utilisée par les logiciels effectuant une décomposition en éléments simples : le logiciel effectue alors un "simple calcul matriciel" pour lui. Les 3 autres techniques ne sont que des "raccourcis" à utiliser dans certains cas particuliers, et bien plus rapide pour un calcul "manuel" qu'une résolution d'un système d'équations.

Le paragraphe « **Exemples d'intégration de fractions rationnelles** » ci-dessous montre ces différentes techniques dans des cas concrets.

[Retour en haut de la page](#)

Table des primitives utiles

Voici un rappel des primitives à avoir en tête avant de vouloir intégrer une fraction rationnelle par décomposition en éléments simples. Cette table des primitives n'est pas exhaustive (je considère que les primitives des fonctions usuelles sont connues) et donne seulement les relations utiles pour trouver une primitive d'une fraction rationnelle :

Fonction f(x)	Primitive de f(x)
Dérivée de g(x)	Fonction g(x)
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
$\frac{1}{x-a}$	$\ln x-a $
$\frac{u'}{u^n} \quad \forall n \neq 1$	$\frac{-1}{(n-1) \cdot u^{n-1}}$
$\frac{1}{(x-a)^n} \quad \forall n > 1$	$\frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \cdot \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right $
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan u$
$\frac{1}{(x+b)^2+a^2} \quad \forall a \neq 0$	$\frac{1}{a} \cdot \arctan \frac{x+b}{a}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{argcosh}(x)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{argsinh}(x)$
Consultez également les dérivées des 24 fonctions trigonométriques : elles constituent 24 nouvelles primitives "prêtes à l'emploi" !	

[Retour en haut de la page](#)

Intégration d'un élément simple de première espèce

La forme générale d'un élément simple de première espèce est la suivante (avec **k** et **a** des constantes réelles) :

$$\frac{k}{(x-a)^n}$$

Il faut donc savoir intégrer les fractions de la forme suivante :

$$\frac{1}{(x-a)^n}$$

Dans la cas où **n=1** la primitive s'obtient par la relation suivante :

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln |x-a|$$

Remarque : dans ce cas la fonction à intégrer est simplement sous la forme u'/u , d'où une intégration directe.

Dans la cas où **n>1** la primitive s'obtient par la relation suivante :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}$$

Remarque : dans ce cas la fonction à intégrer est de la forme u'/u^n , d'où une intégration directe.

On retiendra que dans tous les cas l'intégration d'un élément simple de première espèce est immédiate.

[Retour en haut de la page](#)

Intégration d'un élément simple de seconde espèce

La forme générale d'un élément simple de seconde espèce est la suivante (avec **p**, **q**, **a**, **b** et **c** des constantes réelles) :

$$\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}$$

On peut toujours la décomposer en deux fractions :

$$\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n} = p \cdot \frac{x}{(ax^2+bx+c)^n} + q \cdot \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Il existe alors deux types d'éléments simples de seconde espèce qu'il faut savoir intégrer :

Cas 1 : il n'y a pas de x au numérateur :

$$\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Dans ce cas 1 on écrit le dénominateur sous sa forme canonique, puis on procède à un changement de variable afin de reconnaître la dérivée d'une fonction trigonométrique (arctan si $n=1$, arcsin, arsinh ou argcosh si $n=1/2$) :

1 - On écrit le dénominateur sous sa forme canonique :

$$ax^2+bx+c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2} \right)$$

2 - On effectue un premier changement de variable :

$$u = x + \frac{b}{2a}$$

3 - On effectue un second changement de variable :

$$t = u \cdot \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}$$

L'intégrale de l'élément simple de seconde espèce devient :

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$$

Si **n=1** on reconnaît la dérivée d'**arctan(t)** et on s'arrête ici.

Si **n=1/2** on reconnaît la dérivée d'**arsinh(t)** et on s'arrête ici.

Sinon on continue :

4 - On effectue un troisième changement de variable :

$$t = \tan(y)$$

Et l'intégrale devient :

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \int \frac{1}{(\tan^2(y)+1)^n} \cdot \frac{dy}{\cos^2(y)} = \int \cos^{2n-2}(y) \cdot dy$$

Il suffit maintenant de trouver une primitive de la fonction cosinus élevée à une puissance. Cliquez ici pour obtenir toutes les techniques permettant de trouver de telles primitives.

Cas 2 : il y a un x au numérateur :

$$\frac{x}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Dans ce cas 2 on écrit le numérateur sous la forme suivante (dans laquelle $2ax+b$ est la dérivée du polynôme du dénominateur) puis on décompose la fraction en deux ce qui nous ramène à des primitives connues :

$$x = \frac{1}{2a}(2ax + b) - \frac{b}{2a}$$

On obtient alors une fraction de la forme u'/u^n et une autre de la forme du cas 1 ci-dessus :

$$\begin{aligned} \frac{x}{(ax^2 + bx + c)^n} &= \frac{\frac{1}{2a}(2ax + b) - \frac{b}{2a}}{(ax^2 + bx + c)^n} \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n} - \frac{b}{2a} \cdot \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n} \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \frac{u'}{u^n} - \frac{b}{2a} \cdot \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n} \end{aligned}$$

Voyons maintenant différents exemples concrets d'intégration de fractions rationnelles.

[Retour en haut de la page](#)

EXEMPLE 1

Comment obtenir une primitive de la fraction rationnelle $R(x)$ suivante après l'avoir décomposée en éléments simples ?

$$R(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$$

SOLUTION :

$R^\circ < 0$ donc il n'y a pas de partie entière : $E(x)=0$.

Les deux pôles de $R(x)$ sont les réels **-1** et **2**. Le dénominateur de $R(x)$ se factorise alors ainsi :

$$R(x) = \frac{1}{(x+1) \cdot (x-2)}$$

Comme $R(x)$ possède 2 pôles réels (et aucun pôle complexe) sa décomposition en éléments simples possède 2 éléments simples de première espèce :

$$R(x) = \frac{1}{(x+1) \cdot (x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$$

a et **b** sont deux constantes réelles qu'il nous faut maintenant déterminer.

On pourrait très bien mettre la décomposition au même dénominateur que la forme originelle de $R(x)$ puis déduire **a** et **b** par identification en résolvant un système à deux équations et deux inconnues.

Mais il y a plus rapide :

Pour calculer **a** directement on commence par multiplier par **x+1** les deux membres de l'égalité :

$$\frac{1}{x-2} = a + (x+1) \cdot \frac{b}{x-2}$$

Puis on donne à **x** une valeur qui annule **x+1**, ce qui nous donne instantanément la valeur de **a** :

$$a = \frac{1}{(-1) - 2} = -\frac{1}{3}$$

De même pour **b**, on multiplie par **x-2**

$$\frac{1}{x+1} = (x-2) \cdot \frac{a}{x+1} + b$$

Puis on donne à **x** la valeur **2** afin d'annuler **x-2** :

$$b = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

On en déduit la décomposition en éléments simples de **R(x)** :

$$R(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2} = -\frac{1}{3 \cdot (x+1)} + \frac{1}{3 \cdot (x-2)}$$

L'intégration des éléments simples de première espèce étant immédiate on en déduit une primitive de **R(x)** :

$$\begin{aligned} \int R(x) \cdot dx &= \int \frac{dx}{x^2 - x - 2} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dx}{x-2} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \ln|x+1| + \frac{1}{3} \cdot \ln|x-2| \\ &= \frac{1}{3} \cdot \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| \end{aligned}$$

[Retour en haut de la page](#)

EXEMPLE 2

Comment obtenir une primitive de la fraction rationnelle **R(x)** suivante après l'avoir décomposée en éléments simples ?

$$R(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

SOLUTION :

R(x) est une fraction rationnelle de degré 1, donc la partie entière **E(x)** est un polynôme de degré 1. De plus le seul pôle simple de **R(x)** étant le réel -1 on en déduit la forme de la décomposition en éléments simples de **R(x)** :

$$\frac{x^2}{x+1} = E(x) + \frac{a}{x+1}$$

Pour déterminer la partie entière **E(x)** et la constante **a** nous n'allons pas procéder par identification, mais nous allons utiliser une simple identité remarquable. Commençons par remplacer **x²** par **x²-1+1** au numérateur de **R(x)** :

$$\frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} = \frac{x^2 - 1}{x+1} + \frac{1}{x+1}$$

Appliquons à **x²-1** l'identité remarquable **a²-b²=(a+b).(a-b)** :

$$\frac{x^2 - 1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1) \cdot (x-1)}{x+1} + \frac{1}{x+1}$$

Et après simplification par **x+1** on en déduit la forme décomposée de **R(x)**, avec **E(x)=x-1** et **a=1** :

$$R(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

L'intégration de la partie entière **E(x)** et de l'élément simple de première espèce étant immédiate on en déduit une primitive de **R(x)** :

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|$$

Exemple d'application numérique :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \ln(2) - \frac{1}{2}$$

EXEMPLE 3

Comment obtenir une primitive de la fraction rationnelle $R(x)$ suivante ?

$$R(x) = \frac{2x}{x^2 + x + 1}$$

SOLUTION :

$R^\circ < 0$ donc il n'y a pas de partie entière : $E(x) = 0$.

Les pôles de cette fraction $R(x)$ étant complexes, $R(x)$ est un élément simple de seconde espèce et il n'est pas possible de la décomposer en deux éléments simples de première espèce dans le corps des réels.

Nous sommes donc amené à intégrer un élément simple de seconde espèce possédant un x au numérateur. La méthode consiste à ré-écrire le numérateur afin d'y faire apparaître la dérivée du dénominateur :

- le dénominateur est $x^2 + x + 1$
- la dérivée du dénominateur est $2x + 1$

Nous remplaçons donc au numérateur $2x$ par $2x + 1 - 1$:

$$R(x) = \frac{2x}{x^2 + x + 1} = \frac{2x + 1 - 1}{x^2 + x + 1} = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

La première fraction est de la forme u'/u , écrivons le dénominateur de la seconde sous forme canonique afin de faire apparaître la dérivée d'arctangente :

$$R(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

On en déduit alors une primitive de $R(x)$:

$$\int R(x) dx = \ln(x^2 + x + 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)\right)$$

Remarque : le polynôme $x^2 + x + 1$ n'ayant pas de racines réelles, il est toujours du signe du coefficient du monôme de plus haut degré, c'est-à-dire positif. Cela explique l'absence du symbole valeur absolue dans le logarithme népérien de $x^2 + x + 1$.

Exemple d'application numérique :

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + x + 1} = \ln(3) - \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

EXEMPLE 4

Comment obtenir une primitive de la fraction rationnelle $R(x)$ suivante après l'avoir décomposée en éléments simples ?

$$R(x) = \frac{x^4 + x^2 + 2}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$$

SOLUTION :

$R(x)$ est une fraction rationnelle de degré 1.

Comme le degré de cette fraction rationnelle est strictement positif il y a une partie entière $E(x)$ à déterminer.

Comme le numérateur $P(x)$ est de degré 4 et le dénominateur $Q(x)$ est de degré 3, la partie entière $E(x)$ est un polynôme de degré 1.

De plus le dénominateur $Q(x)$ de la fraction rationnelle $R(x)$ se factorise comme ceci :

$$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x + 1) \cdot (x + 2)^2$$

$R(x)$ possède donc 2 pôles réels : -1 est un pôle simple (d'ordre 1), et -2 est un pôle multiple (d'ordre 2). Comme $R(x)$ ne possède pas de pôles complexes, sa décomposition en éléments simples ne possède que

des éléments simples de première espèce.

On en déduit la forme de la décomposition en éléments simples de **R(x)** :

$$R(x) = E(x) + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$$

a, **b** et **c** sont 3 constantes réelles à déterminer, et la partie entière **E(x)** est un polynôme de premier degré.

E(x) s'obtient par division euclidienne de P(x) par Q(x) :

$$x^4 + x^2 + 2 = (x-5) \cdot (x^3 + 5x^2 + 8x + 4) + 18x^2 + 36x + 22$$

La partie entière E(x) est égale au quotient de la division euclidienne de P(x) par Q(x) :

$$E(x) = x - 5$$

Calcul de **a** : on multiplie par x+1 puis on donne à x la valeur qui annule x+1

$$(x+1) \cdot R(x) = a + (x+1) \cdot \left(E(x) + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2} \right)$$

En posant x=-1 on trouve **a=4**

Calcul de **c** : on multiplie par (x+2)² puis on donne à x la valeur qui annule x+2

$$(x+2)^2 \cdot R(x) = c + (x+2)^2 \cdot \left(E(x) + \frac{a}{x+1} \right) + (x+2) \cdot b$$

En posant x=-2 on trouve **c=-22**

Pour calculer **b** on ne peut pas simplement multiplier par x+2 puis donner à x la valeur -2. Mais connaissant les valeurs de **a** et de **c**, il suffit de donner à x une valeur particulière (qui ne soit pas un pôle de **R(x)**) pour déterminer **b** en fonction de **a** et de **c** avec la relation suivante :

$$R(x) = E(x) + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$$

Par exemple en prenant x=0 on obtient :

$$\frac{1}{2} = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} - 5$$

Sachant que **a=4** et **c=-22** on trouve **b=14**

La décomposition en éléments simples de **R(x)** s'écrit donc :

$$R(x) = x - 5 + \frac{4}{x+1} + \frac{14}{x+2} - \frac{22}{(x+2)^2}$$

On peut maintenant intégrer directement **E(x)** et les 3 éléments simples de première espèce :

$$\int R(x) dx = \int x - 5 dx + 4 \int \frac{1}{x+1} dx + 14 \int \frac{1}{x+2} dx - 22 \int \frac{1}{(x+2)^2} dx$$

Et on en déduit une primitive de **R(x)** :

$$\int \frac{x^4 + x^2 + 2}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} dx = \frac{x^2}{2} - 5x + 4 \ln |x+1| + 14 \ln |x+2| + \frac{22}{x+2}$$

Remarque : dans cet exemple le gros du travail a été la division euclidienne pour trouver **E(x)** et la factorisation du dénominateur de **R(x)**.

[Retour en haut de la page](#)

EXEMPLE 5

Comment obtenir une primitive de la fraction rationnelle **R(x)** suivante après l'avoir décomposée en éléments simples ?

$$R(x) = \frac{2x^5 + 3x^3 - x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^3}$$

SOLUTION :

Comme le degré du numérateur (c'est-à-dire 5) de $R(x)$ est inférieur au degré du dénominateur (c'est-à-dire 6) il n'y a pas de partie entière à déterminer : $E(x)=0$

Le polynôme x^2+x+1 ne possédant pas de racines réelles, la décomposition de $R(x)$ ne possède que des éléments simples de seconde espèce.

Comme le polynôme x^2+x+1 est élevé au cube au dénominateur de $R(x)$, la décomposition possède 3 éléments simples de seconde espèce, avec une puissance allant de 1 à 3.

On en déduit la forme de la décomposition en éléments simples de $R(x)$:

$$R(x) = \frac{ax+b}{x^2+x+1} + \frac{cx+d}{(x^2+x+1)^2} + \frac{ex+f}{(x^2+x+1)^3}$$

On a ici 6 constantes à déterminer : de a à f . La méthode classique par identification qui consiste à mettre la forme décomposée au même dénominateur que la fraction rationnelle $R(x)$ puis à résoudre un système à 6 équations et 6 inconnues en identifiant les coefficients du numérateur serait ici très longue et complexe "à faire à la main". Nous allons donc procéder autrement pour trouver les 6 constantes, en utilisant la division euclidienne :

Ecrivons le numérateur de $R(x)$ en fonction de x^2+x+1 et de $(x^2+x+1)^2$:

$$2x^5 + 3x^3 - x^2 + 1 = (2x - 4)(x^2 + x + 1)^2 + (5x + 2)(x^2 + x + 1) + (-x + 3)$$

En divisant cette relation par $(x^2+x+1)^3$ on en déduit instantanément les 3 éléments simples de seconde espèce de la décomposition de $R(x)$, et donc la valeur des 6 constantes de a à f :

$$\frac{2x^5 + 3x^3 - x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^3} = \frac{2x - 4}{x^2 + x + 1} + \frac{5x + 2}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{-x + 3}{(x^2 + x + 1)^3}$$

Remarque : la relation ci-dessus donnant le numérateur de $R(x)$ en fonction de x^2+x+1 et de $(x^2+x+1)^2$ est obtenue par 3 divisions euclidiennes successives de $2x^5+3x^3-x^2+1$ par x^2+x+1 :

⇒ en bleu les quotients

⇒ en rouge les restes

⇒ chaque quotient est à son tour divisé par x^2+x+1 jusqu'à obtenir un quotient nul :

$$\Rightarrow 2x^5+3x^3-x^2+1=(2x^3-2x^2+3x^2-2)(x^2+x+1)-x+3$$

$$\Rightarrow 2x^3-2x^2+3x^2-2=(2x-4)(x^2+x+1)+5x+2$$

$$\Rightarrow 2x-4=(0)(x^2+x+1)+2x-4$$

⇒ les 3 restes en rouge ci-dessus sont les numérateurs des 3 éléments simples de seconde espèce de la décomposition de $R(x)$: ils nous donnent donc la valeur des 6 constantes de a à f

Pour obtenir une primitive de $R(x)$ il nous faut maintenant déterminer les 3 primitives suivantes :

$$\int R(x)dx = \int \frac{2x-4}{x^2+x+1}dx + \int \frac{5x+2}{(x^2+x+1)^2}dx + \int \frac{-x+3}{(x^2+x+1)^3}dx$$

Pour obtenir la primitive de telles fractions (à pôles complexes) la méthode consiste à écrire le dénominateur sous forme canonique puis à effectuer un changement de variable afin de reconnaître la dérivée de la fonction arctangente, et à ré-écrire le numérateur pour y faire apparaître la dérivée $2x+1$ du polynôme du dénominateur afin d'essayer d'obtenir des termes de la forme u'/u ou u'/u^n .

Au final les 3 primitives sont :

$$\int \frac{2x-4}{x^2+x+1}dx = \ln(x^2+x+1) - \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

Remarque : le polynôme x^2+x+1 n'ayant pas de racines réelles, il est toujours du signe du coefficient du monôme de plus haut degré, c'est-à-dire positif. Cela explique l'absence du symbole valeur absolue dans le logarithme népérien de x^2+x+1 .

$$\int \frac{5x+2}{(x^2+x+1)^2}dx = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{x+8}{3x^2+3x+3}$$

Et

$$\int \frac{-x+3}{(x^2+x+1)^3} dx = \frac{14}{3\sqrt{3}} \cdot \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{14x^3+21x^2+28x+12}{6x^4+12x^3+18x^2+12x+6}$$

La primitive de **R(x)** est égale à la somme de ces 3 primitives.

[Retour en haut de la page](#)

EXEMPLE 6

Comment obtenir une primitive de la fraction rationnelle **R(x)** suivante après l'avoir décomposée en éléments simples ?

$$R(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$$

SOLUTION :

Comme le degré du numérateur (c'est-à-dire 0) de **R(x)** est inférieur au degré du dénominateur (c'est-à-dire 4) il n'y a pas de partie entière à déterminer : **E(x)=0**

Nous sommes ici en présence d'une fraction rationnelle possédant 4 pôles simples complexes. Il est alors plus facile de décomposer **R(x)** dans le corps des complexes que dans celui des réels. Appelons **z₁**, **z₂**, **z₃** et **z₄** les 4 pôles complexes de **R(x)**. Le dénominateur de **R(x)** se factorise alors ainsi dans le corps des complexes :

$$x^4 + 1 = (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot (x - z_3) \cdot (x - z_4)$$

Comme **R(x)** possède 4 pôles simples complexes (2 paires de pôles conjugués entre eux), sa décomposition en éléments simples possède 2 éléments simples de seconde espèce dans le corps des réels, ou bien 4 éléments simples de première espèce dans le corps des complexes.

Les 4 pôles de **R(x)** sont les nombres complexes **z₁**, **z₂**, **z₃** et **z₄** suivants (écrit ici sous 3 formes différentes mais égales) :

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} \\ z_2 &= \sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ z_3 &= -\sqrt{-i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ z_4 &= -\sqrt{i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = e^{-i\frac{3\pi}{4}} \end{aligned}$$

Ces nombres complexes sont les quatre racines 4^{ème} de -1 :

$$z_1^4 = z_2^4 = z_3^4 = z_4^4 = -1$$

L'expression suivante (à prendre entre guillemets ou avec des pincettes, au choix ...) permet d'exprimer en une seule relation les quatre racines 4^{ème} de -1, c'est-à-dire les 4 pôles **z₁**, **z₂**, **z₃** et **z₄** de **R(x)** :

$$\sqrt[4]{-1} = \pm\sqrt{\pm i}$$

Ces nombres complexes **z₁**, **z₂**, **z₃** et **z₄** sont conjugués deux à deux :

$$\begin{aligned} z_1 &= \overline{z_2} \\ z_3 &= \overline{z_4} \end{aligned}$$

La forme de la décomposition de **R(x)** dans le corps des complexes est donc la suivante, avec 4 «éléments simples de première espèce complexes» :

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{a}{x - z_1} + \frac{b}{x - z_2} + \frac{c}{x - z_3} + \frac{d}{x - z_4}$$

En utilisant par exemple la forme exponentielle des pôles **z₁**, **z₂**, **z₃** et **z₄** on obtient la relation suivante :

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{a}{x - e^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{b}{x - e^{-i\frac{\pi}{4}}} + \frac{c}{x - e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{d}{x - e^{-i\frac{3\pi}{4}}}$$

Les 2 éléments simples de seconde espèce dans le corps des réels se trouvent en regroupant les expressions conjuguées.

Comme les pôles sont conjugués deux à deux on a :

$$z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_1} = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1$$

$$z_1 + z_2 = z_1 + \overline{z_1} = 2 \cdot \Re(z_1) = \sqrt{2}$$

$$z_3 \cdot z_4 = z_3 \cdot \overline{z_3} = e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 1$$

$$z_3 + z_4 = z_3 + \overline{z_3} = 2 \cdot \Re(z_3) = -\sqrt{2}$$

En regroupant les expressions conjuguées on obtient :

$$(x - z_1) \cdot (x - z_2) = x^2 - x \cdot (z_1 + z_2) + z_1 \cdot z_2 = x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1$$

et

$$(x - z_3) \cdot (x - z_4) = x^2 - x \cdot (z_3 + z_4) + z_3 \cdot z_4 = x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1$$

On en déduit que :

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1)$$

La décomposition en éléments simples de $\mathbf{R(x)}$ s'écrit alors ainsi dans le corps des réels :

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{\alpha_1 \cdot x + \alpha_2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\alpha_3 \cdot x + \alpha_4}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$

Les constantes α_1 à α_4 sont 4 réels à déterminer.

En multipliant l'égalité par chacun des dénominateurs on obtient :

$$\frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 + \frac{\alpha_3 \cdot x + \alpha_4}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \cdot (x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

(donner à x les valeurs z_1 puis z_2 pour déterminer α_1 et α_2)

Et aussi :

$$\frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} = \frac{\alpha_1 \cdot x + \alpha_2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \alpha_3 \cdot x + \alpha_4$$

(donner à x les valeurs z_3 puis z_4 pour déterminer α_3 et α_4)

On en déduit les 2 éléments simples de seconde espèce de la décomposition de $\mathbf{R(x)}$ dans le corps des réels :

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$

Remarque : les 4 éléments simples de première espèce dans le corps des complexes deviennent 2 éléments simples de seconde espèce dans le corps des réels.

Factorisons les éléments simples de seconde espèce pour y faire apparaître des termes de la forme u'/u et des termes correspondant à la dérivée d'arctangente :

$$\frac{1}{x^4 + 1} = -\frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{\sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) + \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right)$$

On en déduit alors une primitive de $\mathbf{R(x)}$:

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} = -\frac{\sqrt{2}}{8} \left(\ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) - 2 \arctan(\sqrt{2}x - 1) \right) + \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + 2 \arctan(\sqrt{2}x + 1) \right)$$

Remarque : les trinômes présents dans les logarithmes népériens n'ayant pas de racines réelles, ils sont toujours du signe du coefficient du monôme de plus haut degré, c'est-à-dire positifs. Cela explique l'absence du symbole valeur absolue dans les logarithmes népériens.

Exemple d'application numérique :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\ln(3 + \sqrt{2}) + \pi \right)$$

Exercice d'application :

Pouvez-vous donner une primitive de chacune des fractions rationnelles suivantes ?

$$\int \frac{x}{x^4 + 1} dx$$

$$\int \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$$

$$\int \frac{x^3}{x^4 + 1} dx$$

$$\int \frac{x^4}{x^4 + 1} dx$$

[Retour en haut de la page](#)

Liens pour aller plus loin :

[Voir d'autres exemples de calculs de primitives par décomposition en éléments simples](#)

[Décomposez vos fractions rationnelles en ligne](#)

[Calculez vos primitives en ligne](#)

[Document PDF sur le calcul de primitives](#)

[Retour en haut de la page](#)

Site Internet : **www.gecif.net**

Auteur : **Jean-Christophe MICHEL**

Professeur de Sciences Industrielles de l'Ingénieur
option Information et Numérique

Courriel : **jc.michel@gecif.net**