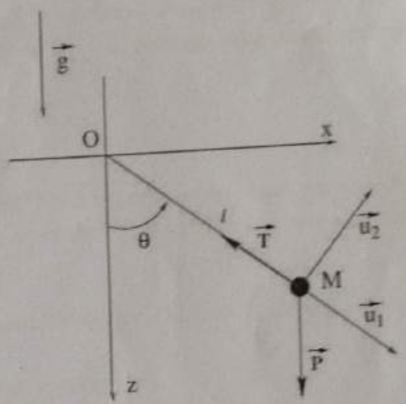
Exercice 6

Considérons un pendule simple oscillant dans un plan vertical d'un référentiel terrestre galiléen. La position du point matériel est repérée à l'aide de l'angle $\theta(t)$.



1) *Calculer le moment des forces par rapport à l'axe (Δ) passant par O et perpendiculaire au plan osculateur.*
2) *Exprimer le moment cinétique $L_\Delta(M)$ du point matériel.*
3) *A l'aide du théorème du moment cinétique, trouvez l'équation différentielle que vérifie $\theta(t)$.*

Exercice 7

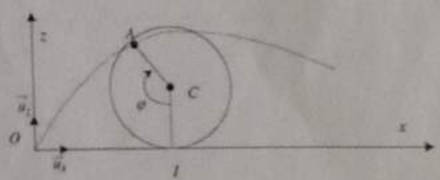
Une particule M se déplace dans le plan xOy. Sa vitesse est définie par $\vec{v} = a\vec{u}_\theta + b\vec{u}_y$ où a et b sont des constantes.

4) *Déterminer l'équation $\rho(\theta)$ de la trajectoire en coordonnées polaires.*
5) *On choisit $a = 3b$. Sachant que pour $\theta = 0$, l'abscisse du point M est $1\,m$, donner l'expression de $\rho(\theta)$.*
6) *Déterminer l'allure de la trajectoire dans le plan xOy.*

Exercice 8

Une roue circulaire de centre C, de rayon a, roule sans glisser sur Ox, tout en restant dans le plan Ox, Oz.

Un point A de la roue coïncide à l'instant $t = 0$ avec l'origine O du repère. Le centre C a une vitesse constante V_0.



1) Déterminer les coordonnées de A à l'instant t.
2) Calculer $\vec{V}$ le vecteur vitesse de A par rapport au sol.
3) Donner l'expression du vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$. Calculer le produit vectoriel $\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{IA}$. Que peut-on en déduire ?
4) Calculer $\vec{a}$, le vecteur accélération de A par rapport au sol.
5) Retrouver les vecteurs vitesse $\vec{V}$ et accélération $\vec{a}$ en utilisant la loi de composition des mouvement.

Email : coulnamson@hotmail.com

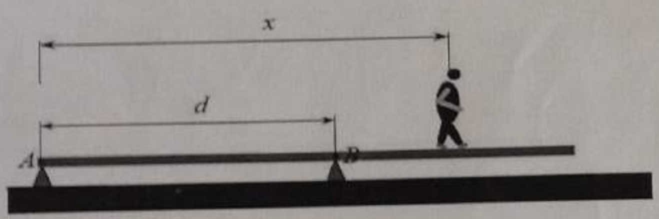
Exercice 9

Un véhicule de masse $m = 300\ kg$, animé d'une vitesse $\vec{v} = 80\ km/h$. Pour éviter d'entrer en collision avec un automobiliste stationné à $20\ m$. Calculer la force de freinage nécessaire pendant une durée de $3\ s$ pour éviter la collision.

Exercice 10

Une poutre de masse $M = 100\ kg$ et de longueur $l = 5\ m$, repose sur deux support A et B distant de $d = 3\ m$. Un individu de masse $m = 75\ kg$ se déplace le long de la poutre en partant de l'extrémité A.

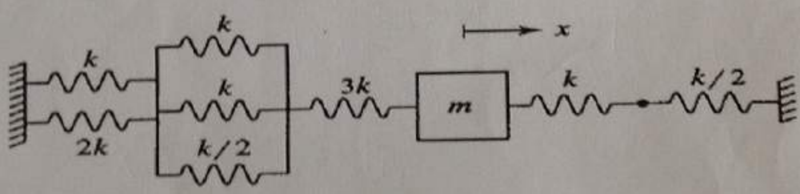
1) *Calculer la distance maximale à laquelle peut s'éloigner l'individu tout en conservant l'équilibre de la poutre*
2) *Exprimer la réaction du support A sur la poutre en fonction de x.*



Exercice 11

Considérons le système ci-dessous formé d'une combinaison de ressorts. Le corps solide de masse m se déplace horizontalement suivant la direction x.

1) Calculer la raideur du ressort équivalent.
2) Calculer la pulsation propre du système.



Email : coulnamson@hotmail.com

[redacted]

Année 2013 2014

ESATIC

TD DE MECANIQUE 1

Fiche 3 : Mécanique du point matériel

Exercice 1 : On considère les repères orthonormés directs $\mathcal{R}(O; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ et $\mathcal{R}'(O; \overrightarrow{x'}, \overrightarrow{y'}, \overrightarrow{z})$. Le plan $(O; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ est fixe et la droite $(O; \overrightarrow{x'})$ tourne autour de $(O; \overrightarrow{z})$ avec une vitesse angulaire ω, $\omega = \dot{\theta}$ et $\theta = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x'})$. Un mobile $M(\| \overrightarrow{OM} \| = r)$ se déplace sur la droite $(O; \overrightarrow{x'})$ suivant la loi : $r = r_0(\cos\omega t + \sin\omega t)(r_0 = cte)$.

Déterminer à l'instant t, en fonction de r_0 et ω, en composantes de $\mathcal{R}'$:

1) a) La vitesse relatve et la vitesse d'entraînement de M;

b) Le module de la vitesse absolue $\overrightarrow{V_a}$ de M et sa direction(on déterminera $\tan\varphi$, $\varphi = (\overrightarrow{V_a}, \overrightarrow{x'})$) Cas particuler où M passe en M_0, défini par $\| \overrightarrow{OM_0} \| = r_0$;

2) a) L'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis de M.

b) Le module et la direction de l'accélération absolue de M.

3) A l'instant initial, le module est 14.1 cm de O. Aux instants t où le mobile possède une vitesse absolue de 10 m/s, dirigée à 60° de l'axe $(O; \overrightarrow{x'})$, déterminer :

- l'accélération absolue $\overrightarrow{\gamma_a}$, en grandeur et en direction;
- les instants t correspondants.

Exercice 2 : Un automobile se déplace d'un mouvement uniforme de vitesse v sur une route horizontale dirigée suivant l'axe $(O; \overrightarrow{x})$ du référentiel $\mathcal{R}(O; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$, où $(O; \overrightarrow{z})$ est verticale ascendante. On admettra que les pneus roulent sans glisser sur la route. On considère le référentiel $\mathcal{R}'(A; \overrightarrow{x'}, \overrightarrow{y'}, \overrightarrow{z'})$ lié à l'une des roues de centre A, de rayon r, et dont les axes sont parallèles à ceux de $\mathcal{R}$.

1) Quelle est, dans le référentiel $\mathcal{R}$, la trajectoire d'un point M de la roue de centre A, si, à l'instant $t = 0$, M est en contact avec le sol en O?

2) a) Déterminer la grandeur et la direction, par rapport à la route, de la vitesse de M, à l'instant t :

- par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ lié au sol;
- par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la roue.

Faire la représentation vectorielle traduisant la loi de composition des vitesses de M.

b) Montrer que le support de la vitesse v de M, dans $\mathcal{R}$, passe à chaque instant par le point $\dot{I}'$, diametralement opposé au point $\dot{I}$ du pneu avec le sol.

3) Déterminer dans le référentiel $\mathcal{R}$:

a) l'accélération de M;

b) le rayon de courbure ρ de la trajectoire, et la position du centre de courbure.

Exercice 3 : 1) Une particule M, de masse m, décrit une spirale sous l'action d'une force centrale constamment dirigée vers le point O . M est reperée par ses coordonnées polaires r et θ : $r = \| \overrightarrow{OM} \|$ et $\theta = (O\overrightarrow{x}, \overrightarrow{OM})$.

a) Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_0}$ de M par rapport à O reste constant au cours du mouvement.

b) En déduire que $r^2\dot{\theta} = cte = C$.

c) Montrer que le mouvement obéit à la loi des aires.

d) Exprimer la force F agissant sur M, en fonction de C, $u = 1/r$ et $d^2u/d\theta^2$;

2) En déduire la loi de force $F(r)$:

a) Si la spirale est décrite par l'équation : $r\theta = cte = K$;

[redacted]

b) Si la spirale est décrite par l'équation : $r = e^{-a\theta}$ $(a = cte > 0)$.

3) Une particule P, de masse m, est soumise à une force centrale $\overrightarrow{F}$: $\overrightarrow{F} = m\frac{C^2}{r^3}\overrightarrow{r}$.

a) Ecrire l'équation différentielle à laquelle satisfait $u(\theta)$. Quelle est la trajectoire de P?

b) Comment faut-il choisir la vitesse initiale v_0 pour que la trajectoire soit un cercle de centre O, et de rayon r_0?

Exercice 4 : Une particule P, de masse m, est assujeti à se déplacer, sans frottement, sur un plan horizontal. La particule est lancée dans le plan $(O; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ à partir de P_o de coordonnées cartésiennes $(0, \alpha)$ dans un champ de force $\overrightarrow{F} = -K\overrightarrow{OP}$, et subit, en outre, une force résistante $\overrightarrow{F'}$ proportionnelle à sa vitesse $\overrightarrow{V}$: $\overrightarrow{F'} = -b\overrightarrow{V}$ (K et b sont des cstes >0). On pose $r = \| \overrightarrow{OP} \|$ et $\theta = (O\overrightarrow{x}, \overrightarrow{OP})$.

1) Etablir en coordonnées polaires (r, θ) les équations différentielles du mouvement de P.

2) En déduire, dans le cas où $\dot{\theta} = \omega = cte$:

a) l'équation horaire $r(t)$;

b) la valeur de la vitesse angulaire ω.

A.N : $m = 40\ g$; $K = 200\ N/m$; $b = 4\ N/ms^{-1}$.

Exercice 5 : Une particule de masse m, de vitesse initiale v_0, se déplace verticalement de haut en bas. La résistance de l'air $\overrightarrow{f}$ opposée à la vitesse, est proportionnelle à la vitesse instantanée $\overrightarrow{v}$: $\overrightarrow{f} = -bm\overrightarrow{V}$ $(b = cte)$.

Déterminer :

1) a) la vitesse v de la particule à l'instant t $v = \| \overrightarrow{V} \|$.

b) la vitesse limite V_l de la particule.

2) L'équation horaire exprimant le chemin parcouru z en fonction du temps t;

3) A quel instant la particule atteint-elle sa vitesse à $1°/_{\circ}$ près? Quelles sont alors son accélération et la distance parcourue? A.N : $g = 10\ m/s^2$; $b = 25\ s^{-1}$; $v_0 = 10\ cm.s^{-1}$.

ESATIC

Ecole Supérieure Africaine des TIC

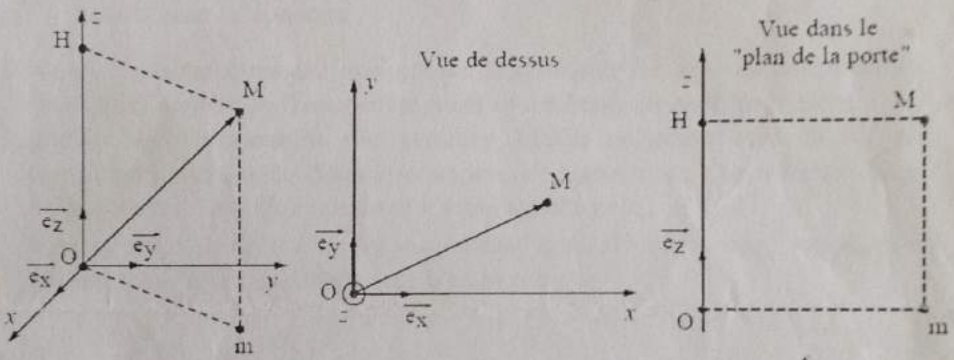
Année Académique 2012-2013

DEVOIR DE MECANIQUE

Exercice 1

Considérons un point matériel M dans le système de coordonnées cartésiennes représenté par les schémas ci-dessous.

1) *Recopier ces schémas puis faire apparaître sur les schémas ; les vecteurs de base du système de coordonnées sphériques.*
2) *Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}$ au point M en coordonnées sphériques sachant que* $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$, *avec* $\vec{e}_r = (\cos\theta)\vec{e}_z + (\sin\theta)\vec{e}_\rho$ *et* $\vec{e}_\rho = (\cos\varphi)\vec{e}_x + (\sin\varphi)\vec{e}_y$.



Exercice 2

Etant donné trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ non nuls, trouver le vecteur $\vec{x}$ solution de l'équation de

$$\vec{x} + (\vec{x}.\vec{b})\vec{a} = \vec{c}$$

On supposera que $1 + \vec{a}.\vec{b} \neq 0$.

Exercice 3

Une particule M de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) décrit une hélice telle que :

$\rho = R$, $\theta = \omega t$, $z = bt$ *où b, ω et R sont des constantes.*

1) *Exprimer le pas h de l'hélice.*
2) *Exprimer la vitesse et l'accélération de M en coordonnées cylindriques et déterminer la distance parcourue par M pendant le temps t.*
3) *Déterminer le trièdre de Frénet $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$.*

Université FHB - UFR Mathématiques-Informatique - Laboratoire de Mécanique.
Email : coulnamson@hotmail.com

Ecole Supérieure Africaine des
Technologies de l'Information
et de la Communication

Année Académique 2013-2014

DEVOIR
Mécanique du Point
Durée: 02 heures

Exercice 1

Résoudre l'équation $\vec{a} \wedge \vec{x} + \vec{x} = \vec{b}$

Exercice 2

Un point M se déplace sur une trajectoire (spirale logarithmique) d'équation polaire

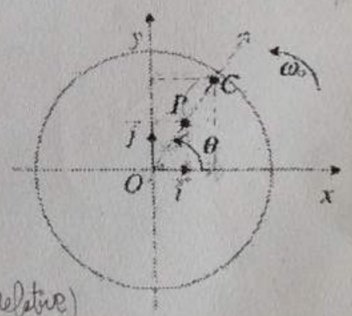
$\rho = \rho_0 e^{\theta}$, $\theta = \omega t$ *avec* ω *constant.*

1) *Dessiner schématiquement une spirale. Représenter les axes de coordonnées polaires et le repère de Frenet en un point M arbitraire de cette trajectoire.*
2) *Calculer les composantes des vecteurs vitesse et accélération de M en coordonnées polaires. En déduire les normes de ces vecteurs. Quelle est la valeur de l'angle entre le vecteur vitesse et le vecteur unitaire* $\vec{u}_\rho$.
3) *A partir des expressions de la composante normale du vecteur accélération déterminer le rayon de courbure de la trajectoire.*

Exercice 3

Un manège tourne à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{k}$. *Le point P se déplace du centre vers le point C avec une accélération constante* a_0. *(voir figure). A* $t = 0$ *le point P est en O et part avec une vitesse nulle. OC coïncide avec l'axe Ox.*

a) *Quelle est la nature du mouvement de P dans le repère lié au manège ?*
b) *Déterminer le vecteur vitesse de P dans le repère lié au manège.* (Vitesse relative)
c) *Déterminer les vecteurs vitesse et accélération de P dans le repère fixe en fonction.*
d) *Donner l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires.*



ESATIC Année 2013 - 2014

INTERRO N°2 MECA1

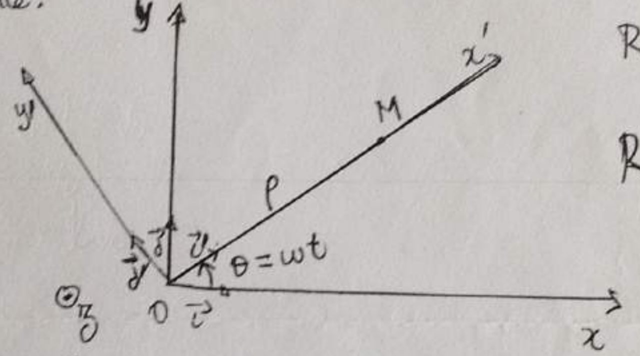
Durée : 1H.

Exercice 1

Dans le plan fixe xOy, une droite Ox' tourne autour de Oz, avec une vitesse angulaire constante $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. Un mobile M ($OM = \rho$) se déplace sur la droite Ox' suivant la loi $\rho = \rho_0(\cos\omega t + \sin\omega t)$ avec ρ_0 = constante.

$R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$R'(O, \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k})$



1) Déterminer à l'instant t, en fonction de ρ_0 et ω dans le repère x'Oy' :

a) la vitesse du point M

b) l'accélération du point M

2) Retrouver les vecteurs vitesse et accélération de M en utilisant la loi de composition des mouvement.

Exercice 2

Un mobile animé d'une vitesse $\vec{V_0} = V_0\vec{i}$ constante, pénètre dans un milieu résistant dans lequel il est soumis à une accélération $\vec{a} = -kV^2\vec{i}$; k est une constante et V la norme de la vitesse instantanée.

1) En prenant pour origine des temps et des espaces

le moment où le mobile pénètre dans le milieu, établir la loi donnant $V(t)$, où t est le temps.

2) En déduire l'équation horaire du mouvement.

3) Montrer qu'après un parcours x, la vitesse est :

$$V = V_0 e^{-kx}$$

MECANIQUE

I

$(E) : \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$ Résolvons E

1°) si $\begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \\ b = \vec{0} \end{cases}$; $S(E) = E$ st

si $\begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0} \\ (E) \text{ existe si } \vec{a} \perp \vec{b} \end{cases}$

Soit $\vec{x_0}$ une solution particulière ~~tel que~~ de $\vec{a} \perp \vec{x_0}$ tel que $\vec{a} . \vec{x_0} = 0$

$(E') : \vec{a} \wedge \vec{x_0} = \vec{b}$

* Multiplions (E') par $\vec{a} \wedge$

$\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{x_0}) = \vec{a} \wedge \vec{b}$

$(\vec{a} . \vec{x_0}) \vec{a} - (\vec{a} . a) \vec{x_0} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

$+ a^2 \vec{x_0} = \vec{b} \wedge \vec{a}$

$- a^2 \vec{x_0} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

$a^2 x_0 = \vec{b} \wedge \vec{a}$

$\boxed{x_0 = \frac{\vec{b} \wedge \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}}$ ①

$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a} \wedge \vec{x} = b & ① \\ \vec{a} \wedge \vec{x_0} = b & ② \end{cases}$

$\Rightarrow$ ①-② : $\vec{a} \wedge \vec{x} - a \wedge \vec{x_0} = 0$

$\Rightarrow \vec{a} \wedge (\vec{x} - \vec{x_0}) = 0$

$\Rightarrow \vec{a} \parallel (\vec{x} - \vec{x_0}) = 0$

$\Rightarrow \vec{x} - \vec{x_0} = \lambda \vec{a} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \vec{x} = \vec{x_0} + \lambda \vec{a} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

d'après ①

$\Rightarrow \boxed{\vec{x} = \frac{\vec{b} \wedge \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} + \lambda \vec{a} \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}}$

Résolvons dans E

2°) $\vec{a}\wedge(\vec{k}\wedge\vec{b}) = \vec{c}$ ① avec $\vec{a}\wedge\vec{k} = \vec{b} \Rightarrow \vec{k} = \frac{\vec{b}\wedge\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} + \lambda\vec{a}$

posons $\vec{X} = \vec{k}\wedge\vec{b}$

① devient $\vec{a}\wedge\vec{X} = \vec{C}$

$$\vec{X} = \frac{\vec{C}\wedge\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} + \lambda\vec{a}$$

or $\vec{X} = \vec{k}\wedge\vec{b} \Rightarrow \vec{k}\wedge\vec{b} = \vec{X}$

$$\Rightarrow -\vec{b}\wedge\vec{k} = \vec{X}$$

$$\Rightarrow \vec{b}\wedge\vec{k} = -\vec{X}$$

$$\Rightarrow \vec{b}\wedge\vec{k} = \vec{d} \text{ avec } \vec{d} = -\vec{X}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{k} = \frac{\vec{d}\wedge\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} + \gamma\vec{b}} \quad ②$$

On sait que $\vec{d} = -\vec{X}$

$$= -\frac{\vec{C}\wedge\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} + \beta\vec{a},\ \beta = -\lambda$$

$$\boxed{\vec{d} = \frac{\vec{a}\wedge\vec{c}}{\|\vec{a}\|^2} + \beta\vec{a}} \quad ③$$

③ dans ② $\Rightarrow \boxed{\vec{k} = \frac{(\vec{a}\wedge\vec{c})\wedge\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2} + \frac{\beta\vec{a}}{\|\vec{b}\|^2}\wedge\vec{b} + \gamma\vec{b}}$

$$(\vec{a}\wedge\vec{r_0}$$

$$\Rightarrow ①-②:\ \vec{a}\wedge\vec{r} - a\wedge\vec{r_0} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a}\wedge(\vec{r}-\vec{r_0}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a}\,/\!/\,(\vec{r}-\vec{r_0}) = 0$$

$$\vec{r}-\vec{r_0} = \lambda\vec{a} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r_0} + \lambda\vec{a} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

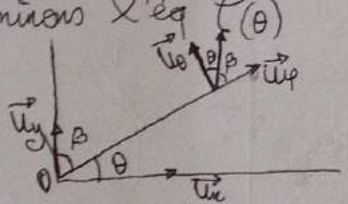
d'après ①

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r} = \frac{\vec{b}\wedge\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} + \lambda\vec{a}\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}}$$

Exercice 7

$\vec{v} = a\vec{u_\theta} + b\vec{u_y}$ a, b sont constants

1) Déterminons l'éq $\rho(\theta)$



$$\vec{u_y} = \cos\theta\,\vec{u_\theta} + \sin\theta\,\vec{u_\rho}$$

$$\vec{v} = b\sin\theta\,\vec{u_\rho} + (a+b\cos\theta)\,\vec{u_\theta} \quad ①$$

$$\vec{v} = a\vec{u_\theta} + b\cos\vec{u_\theta} + b\sin\theta\,\vec{u_\rho}$$

$$\vec{OM} = \rho\vec{u_\rho} \Rightarrow \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{\rho}u_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u_\theta} \quad ②$$

$① = ② \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{\rho} = b\sin\theta & ① \\ \rho\dot{\theta} = a+b\cos\theta & ② \end{cases}$$

$$1/2 :\ \frac{\dot{\varphi}}{\varphi\dot{\theta}} = \frac{b\sin\theta}{a+b\cos\theta}$$

$$\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = \frac{b\dot{\theta}\sin\theta}{a+b\cos\theta}$$

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{b\sin\theta}{(a+b\cos\theta)}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{1}{\varphi}d\varphi = \frac{b\sin\theta}{(a+b\cos\theta)}\cdot d\theta$$

$$\ln\varphi = -\ln(a+b\cos\theta) + c \quad (c\in\mathbb{R})$$

$$\ln\varphi = \ln\left(\frac{1}{a+b\cos\theta}\right) + C$$

$$\varphi(\theta) = \frac{k}{a+b\cos\theta}\ ,\ (k\in\mathbb{R})$$

2) $a = 3b$

Pour $\theta = 0$

$$\varphi(\theta) = 1 = \frac{k}{a+b} = \frac{k}{4b}$$

$$k = 4b$$

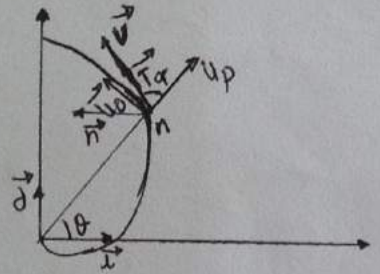
$$\varphi(\theta) = \frac{4b}{3b+b\cos\theta}$$

$$\varphi(\theta) = \frac{4}{3+\cos\theta}$$

l'après ① $\vec{x} =$ ... $\|\vec{a}\|$

Correction du Devoir de Groupe de Mécanique

Exercice 2



2) $\vec{OM} = \rho\vec{u_\rho} = \rho_0 e^{\theta}\vec{u_\rho}$, $\dot\theta = \omega$

$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$

$\boxed{\vec{V} = \rho_0\omega e^{\omega t}(\vec{u_\rho} + \vec{u_\theta})}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$

$\boxed{\vec{a} = 2\rho_0\omega^2 e^{\omega t}\vec{u_\theta}}$

$\|\vec{V}\| = \rho_0\omega e^{\omega t}\sqrt{1+1}$

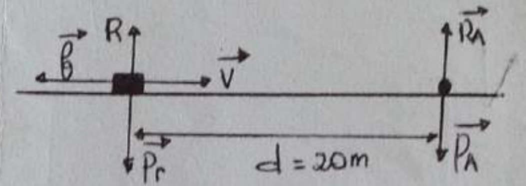
$= \rho_0\omega e^{\omega t}\sqrt{2}$

$\|\vec{a}\| = 2\rho_0\omega^2 e^{\omega t}$

$\cos\alpha = \frac{\rho_0\omega e^{\omega t}}{\rho_0\omega e^{\omega t}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où $\boxed{\alpha = 45°}$

Exo 9 TD2 Mécanique

$V = 80\ km/h$



$\sum\vec{F_{ext}} = m\vec{a}$

$\vec{f} + \vec{R} + \vec{P_v} = m\vec{a}$

$-f = ma$

$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{V}{\Delta t} = -\frac{22{,}22}{3}$

$\boxed{a = -7{,}4\ m/s^2}$

$-f = ma$

$f = -ma$

$= -7{,}4 \times 300$

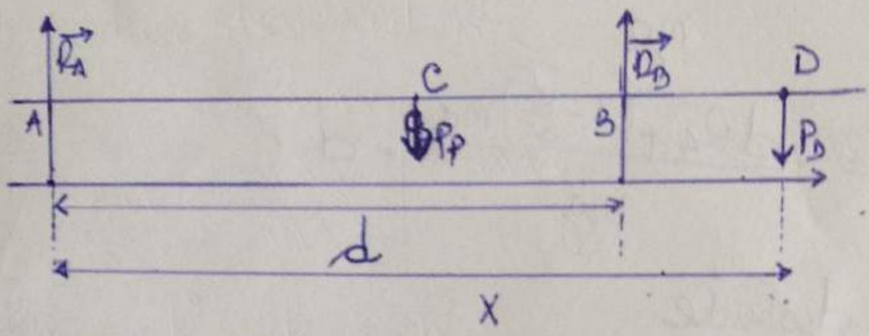
$f = 2220\ N$

$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt = (m\vec{V})_2 - (m\vec{V})_1$

$F = cte \Rightarrow -F\Delta t = -mV_1$

$\boxed{F = \frac{mV_1}{\Delta t}}$

Exercice 10



1°) A l'equilibre

. $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R_A} + \vec{R_B} + \vec{P_P} + \vec{P_D} = \vec{0}$

$R_A + R_B - P_P - P_D = 0$ ①

. $\mathcal{M}_A(\vec{F}) = 0$ ②

- $\mathcal{M}_A(\vec{R_A}) = 0$
- $\mathcal{M}_A(\vec{R_B}) = \vec{AB} \wedge \vec{R_B} = dR_B$
- $\mathcal{M}_A(\vec{P_P}) = \vec{AC} \wedge \vec{P_P} = \frac{\ell}{2} P_P$
- $\mathcal{M}_A(\vec{P_D}) = \vec{AD} \wedge \vec{P_D} = X \vec{P_D}$

. $\mathcal{M}_B(\vec{F}) = 0$ ③

- $\mathcal{M}_B(\vec{R_A}) = \vec{BA} \wedge \vec{R_A} = dR_A$
- $\mathcal{M}_B(\vec{R_B}) = 0$
- $\mathcal{M}_B(\vec{P_P}) = \vec{BC} \wedge \vec{P_P} = \left(d - \frac{\ell}{2}\right) P_P$
- $\mathcal{M}_B(\vec{P_D}) = \vec{BD} \wedge \vec{P_D} = (X - d) P_D$

de ① ② et ③

$$\begin{cases} R_A + R_B - P_P - P_D = 0 & ① \\ dR_B - \frac{\ell}{2} P_P - X P_D = 0 & ② \\ dR_A - \left(d - \frac{\ell}{2}\right) P_P - (X-d) P_D = 0 & ③ \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_A + R_B - Mg - mg = 0 & ① \\ dR_B - \frac{\ell}{2} Mg - X mg = 0 & ② \\ dR_A - \left(d - \frac{\ell}{2}\right) Mg - (X-d) mg = 0 & ③ \end{cases}$$

② : $X_1 = \dfrac{dR_B - \frac{\ell}{2}Mg}{mg}$

③ : $X_2 = -\dfrac{dR_A + (d-\frac{\ell}{2})mg}{mg} + d$

X_m : la distance

$X_m = Min(X_1, X_2)$

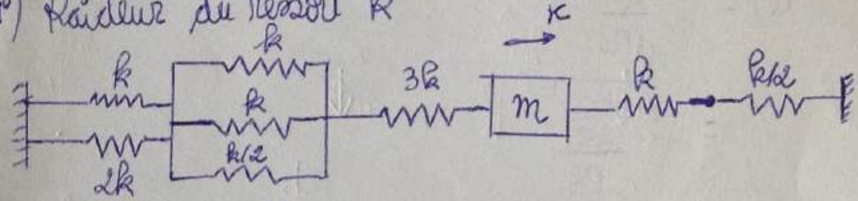
2- Expression de R_A

③ : $R_A = \dfrac{(d-\frac{\ell}{2})Mg - (x-d)mg}{d}$

$R_A = \dfrac{(d-\frac{\ell}{2})Mg + dmg}{d} - \dfrac{mgx}{d}$

Exercice II

1°) Raideur du ressort k



$k_{eq_a} = k + 2k = 3k$

$k_{eqb} = k + k + k/2 = 2k + \frac{k}{2} = \frac{5k}{2}$

$k_{eqc} = 3k$

$k_{eq_1} = \frac{1}{3k} + \frac{2}{5k} + \frac{1}{3k}$

$= \frac{5+6+5}{15k}$

$\boxed{k_{eq_1} = \frac{16}{15k}}$

$k_{eq_2} = \frac{1}{k} + \frac{2}{k} = \frac{3}{k}$

$\cancel{k_{eq_T} = \frac{3}{k} + \frac{16}{15k}}$

$\cancel{= k_{eq_1} + k_{eq_2}}$

$\cancel{= \frac{15\times 3 + 16}{15k}}$

$\cancel{k = \frac{1}{k_{e_1}} +}$ $\frac{1}{k_{e_2}} + \frac{1}{k_{e_1}} = k$

$k = \frac{15k}{16} + \frac{k}{3}$

$\boxed{k = \frac{61k}{48}}$

2°) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$= \sqrt{\frac{\frac{61k}{48}}{m}}$

$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{61k}{48m}}}$

2)

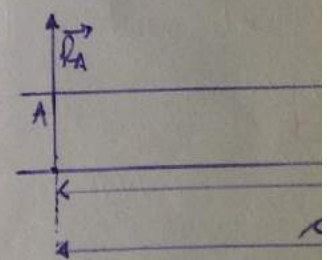
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{61k}{48}}{m}}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{61mk}{48}}}$$

Exercice 10

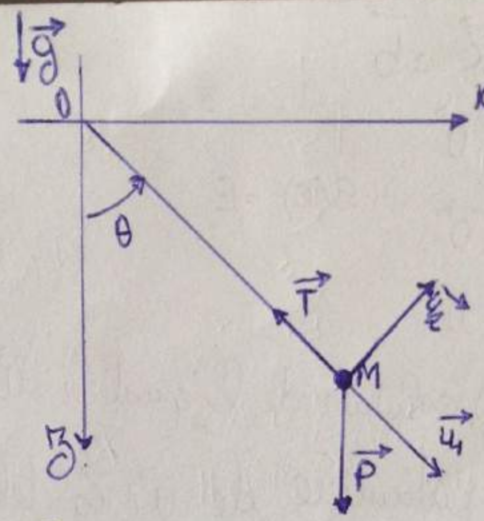
Exercice 10



1°) A l'equilibre

• $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow$

Exercice 6



1°) Moment de forces.

$\mathcal{M}_{\Delta O}(\vec T) = (\vec{OM}\wedge\vec T).\vec y$

$\vec{OM}\wedge\vec T = \vec{OM}.\vec{u_1}\wedge(-\vec T.\vec{u_1})$

$= -\vec{OM}.\vec T(\vec{u_1}\wedge\vec{u_1})$

$= -L.T(\vec{u_1}\wedge\vec{u_1})$

$\vec{OM}\wedge\vec T = 0$

$\boxed{\mathcal{M}_{\Delta O}(\vec T) = 0}$

$\mathcal{M}_{\Delta O}(\vec P) = (\vec{OM}\wedge\vec P)\vec y$

$\vec{OM}\wedge\vec P = \vec{OM}.\vec{u_1}\wedge P\vec z$

$= PL\,\vec{u_1}\wedge\vec z$

$\vec{u_1} = \cos\theta\vec z + \sin\theta\vec x$

$\vec{OM}\wedge\vec P = mgL(\cos\theta\vec z + \sin\theta\vec x)\wedge\vec z$

$\vec{OM}\wedge\vec P = -mgL\vec y\sin\theta$

$\mathcal{M}_{\Delta O}(\vec P) = -mgL\vec y.\vec y\sin\theta$

$\boxed{\mathcal{M}_{\Delta O}(\vec P) = -mgL\sin\theta}$

2°) Expression du moment Cinétique

$L_\Delta(M) = (\vec{OM}\wedge\vec P)\vec y$ avec $P = m\vec U$

$\vec{OM}\wedge\vec P = \vec{OM}.\vec{u_1}\wedge\vec P\vec{u_1} = m(L\vec{u_1}\wedge v.\vec{u_2})$

$= L\vec{u_1}\wedge m\vec v\,\vec{u_2} = mLv\,\vec y$

$= mLv \quad (\vec{OM}\wedge\vec P)\vec y = mLv\vec y.\vec y$

$\boxed{L_\Delta(M) = mlv} = \vec{L_0}$

$\boxed{L_\Delta(M) = L_0}$

3°)

$$\frac{d\vec{L_0}}{dt} = \sum M_0(\vec{F})$$

$$\sum M_0(\vec{F}) = M_{\Delta 0}\vec{P} + M_{\Delta 0}\vec{T}$$

$$\underline{\sum M_0(\vec{F}) = -mgl\sin\theta}$$

$$\frac{d\vec{L_0}}{dt} = \frac{d\,mlv\vec{y}}{dt} = ml\dot{v}\vec{y} \quad (2)$$

$$v = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\,L\vec{u}}{dt}$$

$$v = L\dot{\theta} \rightarrow \underline{\dot{v} = L\ddot{\theta}} \quad (3)$$

$\dot{v} = \cancel{d\theta}$ $\cancel{w}$

(3) dans (2) m

A- Etude statique

L'objet est soutenu par un câble parallèle au plan incliné.

1) Déterminer la tension du fil ainsi que la réaction du plan incliné.

2) Le fil est coupé. Le mobile reste immobile à cause des frottements statiques. Exprimer le coefficient de frottement statique en fonction de α.

B- Etude dynamique

L'objet n'est plus retenu par le câble. Il est lâché avec une vitesse $\vec{v}_0$ dans le plan XY.

1) Déterminer les équations $X(t)$ et $Y(t)$. En déduire l'équation de la trajectoire.

2) Une force de frottement dynamique apparaît lors du déplacement du solide. Elle est modélisée à faible vitesse par l'expression : $\vec{F} = -k\vec{v}$, avec k une constante réelle positive. A l'instant initial, le solide possède une vitesse selon X.

a- Déterminer l'unité de k.

b- Faire un schéma des forces appliquées aux solides. Ecrire le bilan des forces et déterminer les composantes des forces sur les deux axes OX et OZ.

c- En déduire la valeur de la réaction du support. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par v_x.

d- Démontrer ou vérifier que $v_x(t)$ peut se mettre sous la forme : $v_x(t) = ae^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}sin\alpha$.

En déduire a et la vitesse limite v_{lim} que peut atteindre le solide ; en déduire l'expression finale de $v_x(t)$.

e- Par intégration, déterminer l'expression de $X(t)$.

NB : La rédaction sera particulièrement prise en compte dans l'attribution de l'intégralité des points relatifs aux différentes questions.

Université Félix Houphouet Boigny
UFR Maths-Info
Laboratoire de Mécanique

Année 201…

Licence 1 : Tronc Commun

EXAMEN DE MECANIQUE 1

Deuxième Session - Janvier 2016

Durée : 3 Heures

Exercice 1 : Soit $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trois vecteurs donnés dans un espace vectoriel E. Résoudre les équations vectorielles suivantes d'inconnue $\vec{x}$ dans E :
1) $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$
2) $\vec{a} \wedge \left(\vec{x} \wedge \vec{b}\right) = \vec{c}$

Exercice 2 : Un point P se déplaçant dans un plan Oxy, a pour coordonnées à l'instant t :

$$\begin{cases} x = \alpha(t-\tau) \\ y = \beta(t-\tau)^2, \quad \alpha \text{ et } \beta \text{ des constantes.} \end{cases}$$

1) Trouver l'équation cartésienne de la trajectoire du point P.
2) Calculer les composantes cartésiennes de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$.
3) Calculer les composantes intrinsèques de l'accélération (accélération tangentielle et accélération normale).

Exercice 3 : Un objet de masse m glisse sans frottement sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale (figure 1).

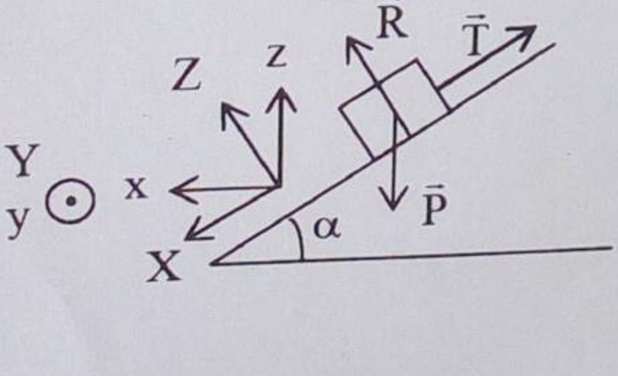


Figure 1: Objet et Plan incliné