TD N°1 Mécanique du point

2020-2021

Exercice 1 :

Dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, un point P a pour coordonnées polaires ρ et φ à l'instant t tels que : $\rho = Acos\varphi + Bsin\varphi$, avec $\varphi = \omega t$ où A , B et ω sont des constantes positives.

1- Déterminer les composantes polaires du vecteur vitesse en fonction de A , B et ω. En déduire la nature du mouvement.
2- Déterminer les composantes polaires du vecteur accélération en fonction de A , B et ω
3- Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire.

Exercice 2 :

Le référentiel $\mathcal{R}$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Un point matériel M se déplace sur une courbe définie par les équations paramétriques suivantes : $\begin{cases} x = 2Ae^{\alpha t}sin(\alpha t) \\ y = 2Ae^{\alpha t}cos(\alpha t), \\ z = Ae^{\alpha t} \end{cases}$ A et α sont des constantes.

1- Exprimer dans $\mathcal{R}$ la vitesse du point M en fonction de A et α.
2- Donner l'expression de $\vec{\tau}$ le vecteur tangent
3- Montrer que le vecteur vitesse $\vec{V}$ fait un angle constant avec l'axe $\overrightarrow{Oz}$
4- Exprimer dans $\mathcal{R}$ l'accélération du point M en fonction de A et α.
5- Déterminer les accélérations normale et normale en fonction de A et α.
6- En déduire le rayon de courbure au point M en fonction de A et α.

Exercice 3 :

Un mobile décrit une courbe plane dont l'équation en coordonnées polaires est : $r(\theta) = \frac{r_0}{2}(1 + cos\theta)$

1- Calculer l'abscisse curviligne en fonction de θ, en prenant comme origine $\theta = 0$, $s = 0$.
2- Pour quel angle θ_0, $s = r_0$
3- En posant $\theta = \omega t$,
   a) Calculer les composantes radiale et orthoradiale de la vitesse en fonction de r_0 et ω.
   b) Calculer les composantes radiale et orthoradiale de l'accélération en fonction de r_0 et ω
   c) Déterminer les composantes intrinsèques de l'accélération en fonction r_0 et ω

Exercice 4 :

Un point M, repéré par ses coordonnées cartésiennes x, y et z dans le repère $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ a pour trajectoire la courbe d'équations paramétriques :

$$: \begin{cases} x = Rcos\theta \\ y = Rsin\theta, \theta \geq 0. \\ \quad z = h\theta \end{cases}$$

Où R et h sont des constantes positives, on suppose aussi que le point M parcourt la courbe dans le sens des θ croissants, soit $\acute{\theta} > 0$.

1- Exprimer le vecteur vitesse du point M en fonction de R, h et θ dans le repère cartésienne et dans le repère cylindrique $(O,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$.
2- Exprimer le rayon de courbure ρ en fonction de R et h
3- Exprimer l'abscisse curviligne en fonction de R, h et θ

Exercice 5 :

Dans le plan xOy, une droite Ox' tourne autour de Oz, avec une vitesse angulaire constante $\omega = d\theta / dt$. Un mobile M ($OM = r$) se déplace sur la droite Ox' suivant la loi $r = r_0(\cos\omega t + \sin\omega t)$ avec $(r_0 = Cte)$.

Déterminer à l'instant t, en fonction de r_0 et ω, dans le repère mobile $x'Oy'$.

1) a) La vitesse relative et la vitesse d'entraînement de M ;

b) le module et la direction de la vitesse absolue de M. Cas particulier où M passe en M_0 défini par $M_0 = r_0$;

2) a) l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis ;

b) le module et la direction de l'accélération absolue.

c) la relation entre la direction de l'accélération absolue et celle de la vitesse absolue.

3) A l'instant initial, le mobile est à 14,1 cm de O. Aux instants t où le mobile possède une vitesse absolue de 10 $m.s^{-1}$, dirigée à 60° de l'axe Ox', déterminer :

a) l'accélération absolu $\vec{\gamma}_a$ en grandeur et en direction.

b) les instants t correspondants.

TD 1 : MECANIQUE DU POINT

Exercice 1

$$\rho = A\cos\omega t + B\sin\omega t = A\cos\varphi + B\sin\varphi$$

1). Composantes polaires du vecteur vitesse

$$\vec{V}_{P/R} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \Leftrightarrow \vec{V}_{P/R} = \omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t)\,\vec{e}_\rho + \omega(A\cos\omega t + B\sin\omega t)\,\vec{e}_\varphi$$

Calculons le module de $\vec{V}_{P/R}$: $V = \omega\sqrt{A^2+B^2} = cte$

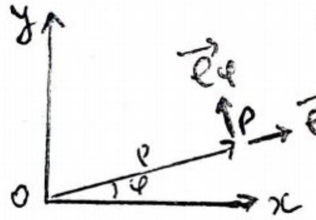
$\|\vec{V}_{P/R}\| = cte \Rightarrow$ le mouvement est uniforme

2°) Vecteur accélération

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\,\vec{e}_\varphi \Rightarrow \vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\boxed{\vec{a}_{P/R} = -2\omega^2(A\cos\omega t + B\sin\omega t)\,\vec{e}_\rho + 2\omega^2(-A\sin\omega t + B\cos\omega t)\,\vec{e}_\varphi}$$

3) Equation cartésienne de la trajectoire



$$\vec{r} = \vec{OP} = \rho\,\vec{e}_\rho = \rho(\cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j}) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{r}\begin{cases} x = \rho\cos\omega t \\ y = \rho\sin\omega t \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = A^2\cos^2\varphi + B^2\sin^2\varphi + 2AB\sin\varphi$$

$$Ax + By = A\rho\cos\varphi + B\rho\sin\varphi = (A\cos\varphi + B\sin\varphi)\rho$$

$$= (A\cos\varphi + B\sin\varphi)(A\cos\varphi + B\sin\varphi)$$

$$= A^2\cos^2\varphi + B^2\sin^2\varphi + 2AB\sin\varphi$$, on remarque que

$$x^2 + y^2 = Ax + By \Rightarrow (x^2 - Ax) + (y^2 - By) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 - \frac{A^2}{4} + \left(y - \frac{B}{2}\right)^2 - \frac{B^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2+B^2}{4}$$

La trajectoire est donc un cercle de centre $C\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2}$

Exercice 2

1°) $\vec{OM}\begin{cases} x = 2A e^{\alpha t} \sin \alpha t \\ y = 2A e^{\alpha t} \cos \alpha t \\ z = A e^{\alpha t} \end{cases}$ $\qquad \vec{v}\begin{cases} \dot{x} = 2A\alpha e^{\alpha t}(\cos \alpha t + \sin \alpha t) \\ \dot{y} = 2A\alpha e^{\alpha t}(\cos \alpha t - \sin \alpha t) \\ \dot{z} = A\alpha e^{\alpha t} \end{cases}$ $\quad v = 3A\alpha e^{\alpha t}$

2°) Déterminons le vecteur unitaire $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}$

$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ $\qquad v = \sqrt{4A^2\alpha^2 e^{2\alpha t}(\cos \alpha t + \sin \alpha t)^2 + 4A^2\alpha^2 e^{2\alpha t}(\cos \alpha t - \sin \alpha t)^2 + A^2\alpha^2 e^{2\alpha t}}$

$v = 3A\alpha e^{\alpha t}$

$$\vec{\tau}\begin{cases} \frac{2}{3}(\cos \alpha t + \sin \alpha t) \\ \frac{2}{3}(\cos \alpha t - \sin \alpha t) \\ 1/3 \end{cases}$$

3°) $\vec{V}$ fait un angle constant avec l'axe (Oz)

$\vec{v} = v\vec{\tau}$ $\qquad \vec{e}_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{\tau}\cdot\vec{e}_3 = \|\vec{\tau}\|\cdot\|\vec{e}_3\|\cdot\cos\theta = \cos\theta$

D'autre part $\vec{\tau}\cdot\vec{e}_3 = 1/3$, d'où $\cos\theta = 1/3$ $\qquad \theta = \cos^{-1}(1/3) = cte$

4°) Expression de l'accélération

$\vec{a}\begin{cases} \ddot{x} = 4A\alpha^2 e^{\alpha t}\cos \alpha t \\ \ddot{y} = -4A\alpha^2 e^{\alpha t}\sin \alpha t \\ \ddot{z} = A\alpha^2 e^{\alpha t} \end{cases}$ $\qquad$ avec $a = A\alpha^2 e^{\alpha t}\sqrt{17}$

5°) Accélération en coordonnées intrinsèques

$\vec{a} = a_t\vec{\tau} + a_n\vec{n}$ $\qquad$ avec $a_t = \frac{dV}{dt} = 3A\alpha^2 e^{\alpha t}$

$a_n^2 = a^2 - a_t^2$ $\quad$ et $a_n^2 = 17A^2\alpha^4 e^{2\alpha t} - 9A^2\alpha^4 e^{2\alpha t} = 8A^2\alpha^4 e^{2\alpha t} = (A\alpha^2 e^{\alpha t} \times 2\sqrt{2})^2$

Soit $a_t = 3A\alpha^2 e^{\alpha t}$ et $a_n = 2\sqrt{2}\,A\alpha^2 e^{\alpha t}$

6°) Détermination du rayon de courbure

Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire de la normale à la trajectoire

On a : $\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{d\theta} = R\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{R}{v}\frac{d\vec{\tau}}{dt} \Rightarrow R = \frac{v}{\left\|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right\|}$

$\frac{d\vec{\tau}}{dt}\begin{cases} \frac{2}{3}\alpha(\cos \alpha t - \sin \alpha t) \\ -\frac{2}{3}\alpha(\cos \alpha t + \sin \alpha t) \\ 0 \end{cases}$ $\quad$ et $\left\|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right\| = \frac{2\sqrt{2}}{3}\alpha$ $\qquad R = \frac{9Ae^{\alpha t}}{2\sqrt{2}}$

or $z = Ae^{\alpha t}$ donc $\boxed{R = \frac{9z}{2\sqrt{2}\alpha}}$

Exercice 3

$\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} = \frac{1}{2}\dot{\theta} r_0 \sin\theta \, \vec{e_r} + \frac{1}{2}\dot{\theta} r_0(1+\cos\theta)$

$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = r_0 \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| \dot{\theta}$

$r(\theta) = \frac{r_0}{2}(1+\cos\theta) = r_0 \cos^2\frac{\theta}{2}$

1) Calcul de l'abscisse curviligne s :

$ds = \|d\vec{OM}\| = \|dr\vec{e_r} + r d\theta \vec{e_\theta}\| \Rightarrow ds^2 = dr^2 + (r d\theta)^2$

$r(\theta) = r_0 \cos^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow dr = -\frac{r_0}{2}\sin\theta \, d\theta \Rightarrow ds^2 = \frac{r_0^2}{4}\sin^2\theta \, d\theta^2 + \frac{r_0^2}{4}(1+\cos\theta)^2 d\theta^2$

Avec $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on a : $ds^2 = \frac{r_0^2}{2}(1+\cos\theta)d\theta^2 = r_0^2 \cos^2\frac{\theta}{2} d\theta^2 \Rightarrow$

$ds = r_0 \cos\frac{\theta}{2} d\theta \Rightarrow s = r_0 \int \cos\frac{\theta}{2} d\theta = r_0 \times 2 \times \sin\frac{\theta}{2} + s_0$ où $s_0 = cte$

$s(0) = 0 = s_0 \Rightarrow \quad \underline{\underline{s = 2 r_0 \sin\frac{\theta}{2}}}$

2) Déterminons l'angle θ_0 tel que $s = r_0$

$s = r_0 \Leftrightarrow 2 r_0 \sin\frac{\theta}{2} = r_0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{\theta}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin\frac{\theta}{2} = 1/2 \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \pi/6$

soit $\underline{\underline{\theta_0 = \pi/3}}$

3) $\theta = \omega t$

a) $\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} = V_r\vec{e_r} + V_\theta\vec{e_\theta}$

Composante radiale $V_r = \dot{r} = -\frac{r_0}{2}\dot{\theta}\sin\theta$ ou $\underline{\underline{V_r = -\frac{r_0\omega}{2}\sin\omega t}}$

Composante orthoradiale $V_\theta = r\dot{\theta} = \frac{r_0\omega}{2}(1+\cos\theta)$ ou $\underline{\underline{V_\theta = \frac{r_0\omega}{2}(1+\cos\omega t)}}$

b) $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta}$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \cancel{\ddot{r}} = -\frac{r_0\omega^2}{2}\cos\theta - \frac{r_0\omega^2}{2}(\cos\omega t + 1) = -r_0\omega^2(\frac{1}{2} + \cos\omega t)$ $\quad a_r = -r_0\omega^2(\frac{1}{2} + \cos\omega t)$

$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta}$ avec $r = \frac{r_0}{2}(1+\cos\omega t)$; $a_\theta = -r_0\omega^2\sin\theta = -r_0\omega^2\sin\omega t$

D'où $\underline{\underline{a_r = -r_0\omega^2(\frac{1}{2} + \cos\omega t) \text{ et } a_\theta = -r_0\omega^2\sin\omega t}}$

c) $\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n}$ avec $a_t = \frac{dV}{dt}$ avec $V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} = r_0\omega\cos\frac{\theta}{2}$

ou bien encore $V = \frac{ds}{dt} = r_0\omega\cos\frac{\theta}{2}$, Ainsi on a $\underline{\underline{a_t = -\frac{r_0\omega^2}{2}\sin\frac{\theta}{2}}}$

ou encore $a_t = -\frac{r_0\omega^2}{2}(1+2\cos\omega t)$

$a_n^2 = a^2 - a_t^2 \quad$ avec $a^2 = a_r^2 + a_\theta^2 = \frac{r_0^2\omega^4}{4} + r_0^2\omega^4\cos^2\theta + r_0^2\omega^4\cos\theta + r_0^2\omega^4\sin^2\theta$

$a^2 = \omega^4 r_0^2(\frac{5}{4} + \cos\theta)$

$a_n^2 = (\frac{5}{4} + \cos\theta)r_0^2\omega^4 - \frac{r_0\omega^4}{2}(1+2\cos\theta)^2$

$\underline{a_n = (r_0\omega^2\cos\frac{\theta}{2})\sqrt{\frac{1}{4} + 4\sin\frac{\theta}{2}}}$

Exercice 4

$\vec{OM} \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = h\theta \end{cases}$

1-) En coordonnées cartésiennes on a : $\vec{v} \begin{cases} \dot{x} = -R\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = R\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z} = h\dot{\theta} \end{cases}$ avec $v = \dot{\theta}\sqrt{R^2+h^2}$

Dans le repère cylindrique $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

$\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{z}\vec{e_z}$ avec $r = R = cte \Rightarrow \dot{r} = 0$

d'où $\underline{\underline{\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta} + h\dot{\theta}\vec{e_z}}}$ avec $v = \dot{\theta}\sqrt{R^2+h^2}$

2-) Détermination du rayon de courbure ρ

On procède comme dans l'exercice 2

$\vec{v} = v\vec{\tau} \Rightarrow \vec{\tau} \begin{cases} \frac{-R}{\sqrt{R^2+h^2}}\sin\theta \\ \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\cos\theta \\ \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \end{cases}$ $\qquad \frac{d\vec{\tau}}{dt} \begin{cases} -\frac{R\dot{\theta}\cos\theta}{\sqrt{R^2+h^2}} \\ -\frac{R\dot{\theta}\sin\theta}{\sqrt{R^2+h^2}} \\ 0 \end{cases}$

$\rho = \frac{v}{\left\| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right\|} \Rightarrow \rho = \frac{\dot{\theta}\sqrt{R^2+h^2}}{\frac{R\dot{\theta}}{\sqrt{R^2+h^2}}}$ $\quad \boxed{\rho = \frac{R^2+h^2}{R}}$

3-) Détermination de l'abscisse curviligne s

$ds = \rho\, d\theta = \frac{R^2+h^2}{R} d\theta \Rightarrow s = \frac{R^2+h^2}{R}\int d\theta$

$s = \frac{R^2+h^2}{R}\theta + s_0$ où $s_0 = cte$

Exercice 5

Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs unitaires du repère fixe $R(O,x,y)$ et $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ les vecteurs unitaires du repère mobile $R'(O',x',y')$ avec $O=O'$.

1°) a) • Vitesse relative :

$$\vec{V}_r = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{R'} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{R'} \quad \text{avec } \vec{r} = r\vec{i}' = r_0(\cos\omega t + \sin\omega t)\,\vec{i}'$$

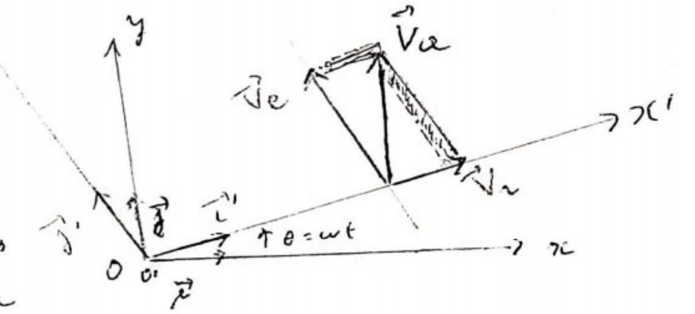
d'où $\underline{\vec{V}_r = r_0\omega(\cos\omega t - \sin\omega t)\,\vec{i}'}$

• Vitesse d'entrainement :

$$\vec{V}_e = \vec{V}_{O/R} + \vec{\omega}\wedge\vec{OM} = \vec{0} + \vec{\omega}\wedge\vec{OM} = \vec{\omega}\wedge\vec{OM} \quad \text{avec } \vec{\omega} = \omega\vec{k} = \omega\vec{k}' \text{ et } \vec{OM} = r\vec{i}'$$

$$\vec{V}_e = \omega\vec{k}'\wedge r\vec{i}' = \omega r\,\vec{k}'\wedge\vec{i}' = \omega r\,\vec{j}' \Rightarrow \underline{\vec{V}_e = r_0\omega(\cos\omega t + \sin\omega t)}$$

b) Vitesse absolue



$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$

$\vec{V}_e$ et $\vec{V}_r$ sont perpendiculaires à chaque instant : $\vec{V}_e \perp \vec{V}_r$

$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2}$. $\underline{V_a = r_0\omega\sqrt{2}}$

$\vec{V}_a$ est constante en grandeur et fait avec l'axe Ox' l'angle φ tel que $\tan\varphi = \dfrac{V_e}{V_r} = \dfrac{\cos\omega t + \sin\omega t}{\cos\omega t - \sin\omega t} = \dfrac{1+\tan\omega t}{1-\tan\omega t}$ (1)

Cas particulier :

M passe en M_0 lorsque $OM_0 = OM \Leftrightarrow r_0 = r \Leftrightarrow \cos\omega t + \sin\omega t = 1$; une solution évidente de cette équation est $t=0$. D'après (1) $\tan\varphi_0 = 1$ et donc $\varphi_0 = \pi/4$.

Ainsi à l'instant $t=0$, la vitesse $\vec{V}_a$ fait un angle de 45° avec l'axe Ox'.

2°) a) accélération relative de M

$$\vec{\gamma}_r = \left.\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\right)_{R'} = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_{R'} \Rightarrow \underline{\vec{\gamma}_r = -r_0\omega^2(\cos\omega t + \sin\omega t)\,\vec{i}'}$$

. Accélération d'entraînement

$$\vec{\gamma}_e = \underbrace{\vec{a}_{O'}}_{\vec{0}} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{OM}}_{\vec{0}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$$

$$\vec{\gamma}_e = \omega \vec{k}' \wedge \vec{V}_e = \omega \vec{k}' \wedge [r_0 \omega (\cos \omega t + \sin \omega t) \vec{j}']$$

$$\underline{\underline{\vec{\gamma}_e = -r_0 \omega^2 (\cos \omega t + \sin \omega t) \vec{i}'}}$$

. Accélération complémentaire (ou de Coriolis)

$$\vec{\gamma}_c = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{V}_r = 2 \omega \vec{k}' \wedge r_0 \omega (\cos \omega t - \sin \omega t) \vec{i}' = 2 r_0 \omega^2 (\cos \omega t - \sin \omega t) \vec{k}' \wedge \vec{i}'$$

$$\underline{\underline{\vec{\gamma}_c = 2 r_0 \omega^2 (\cos \omega t - \sin \omega t) \vec{j}'}}$$

. Accélération absolue de M

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c \Leftrightarrow \vec{\gamma}_a = -2 r_0 \omega^2 [(\sin \omega t + \cos \omega t) \vec{i}' + (\sin \omega t - \cos \omega t) \vec{j}']$$

$$\underline{\underline{\vec{\gamma}_a = -2 r_0 \omega^2 [(\sin \omega t + \cos \omega t) \vec{i}' + (\sin \omega t - \cos \omega t) \vec{j}']}}$$

. Module de $\vec{\gamma}_a$ $\quad \gamma_a = 2 r_0 \omega^2 \sqrt{(\sin \omega t + \cos \omega t)^2 + (\sin \omega t - \cos \omega t)^2}$

$\underline{\underline{\gamma_a = 2\sqrt{2}\, r_0 \omega^2}}$ indépendant du temps.

. Direction de $\vec{\gamma}_a$

$\vec{\gamma}_a$ fait avec l'axe Ox' un angle ψ tel que

$$\tan \psi = \frac{\sin \omega t - \cos \omega t}{\sin \omega t + \cos \omega t} = -\frac{1 - \tan \omega t}{1 + \tan \omega t} \quad (2)$$

c) Direction de $\vec{\gamma}_a$ et direction de $\vec{V}_a$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \tan \psi = -\cotan \varphi \Leftrightarrow \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \Leftrightarrow \cos \psi \cos \varphi = -\sin \varphi \sin \psi$$

$$\cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \cos(\psi - \varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi + \pi/2 = \psi$$

$$\underline{\underline{\psi = \varphi + \pi/2}}$$

3°) a) Accélération absolue $\vec{\gamma}_a$

$r(0) = r_0 = 0{,}141\ m$; $V_a = r_0 \omega \sqrt{2} \Rightarrow \omega = \dfrac{V_a}{r_0\sqrt{2}}$; $V_a = 10\ m/s$

$$\gamma_a = 2\sqrt{2}\, r_0 \omega^2 \Rightarrow \gamma_a = \frac{\sqrt{2}}{r_0} V_a^2$$

AN: $\underline{\gamma_a = 1003\ m/s^2}$

L'angle Ψ que fait $\vec{\gamma}_a$ avec l'axe OX' est $\Psi = 60° + 90° = 150°$ ou $\frac{5\pi}{6}$ rad

$$\underline{\Psi = 150°}$$

b) Aux instants t correspondants, d'après (1)

$$\tan\varphi = \frac{1+\tan\omega t}{1-\tan\omega t} = \sqrt{3} \quad \text{car } \varphi = 60° \quad \text{soit}$$

$$\tan\omega t = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = 0{,}268$$

$$\omega t = 0{,}262 + k\pi \Rightarrow t = \frac{0{,}262 + k\pi}{\omega}, \quad k = \text{nombre entier}$$

$$t = \frac{(0{,}262 + k\pi)\, r_0\sqrt{2}}{V_a} = \frac{(0{,}262 + k\pi) \times \sqrt{2} \times 0{,}141}{10}$$

$$t = 2 \cdot 10^{-2} (0{,}262 + k\pi)$$

$$\underline{t = (0{,}52 + 6{,}28\, k)\, 10^{-2}\, s}$$