Université de Cergy-Pontoise
Département de Mathématiques

Correction de la feuille de TD No 6 M1

DAVEAU CHRISTIAN [1]

[1] Université de Cergy-Pontoise, Département de mathématique, 95302, Cergy-Pontoise, cedex France.

1 Exercices sur la dérivation

Exercice 1.1 Vrai ou faux ?

1. *toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0. La réciproque ?*
2. *Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 alors f est dérivable en x_0.*
3. *Si f est dérivable sur $]0,2[$ et $f'(1)=0$ alors f admet un extrémum local en 1.*

Solution :

1. vrai la réciproque est fausse.
2. faux
3. faux

Exercice 1.2 Retour sur les théorèmes du cours
Les énoncés suivants sont ils corrects ? si la réponse est non les corriger.

1. *Soit f dérivable sur $[a,b]$ continue sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)$. Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.*
2. *Soit f continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*
3. *Interprétation graphique du théorème des accroissements finis : soit f continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe une $c\in]a,b[$ tel que le graphe de f admet au point $C=(c,f(c))$ une tangente qui passe par les points $A=(a,f(a))$ et $B=(b,f(b))$.*
4. *Questions : peut-on appliquer le théorème de Rolle à $f(x)=|x|$ sur $[-1,1]$. Même avec $g(x)=5x^2+3$ sur $[0,2]$.*

Solution :

1. non : Soit f dérivable sur $]a,b[$ continue sur $[a,b]$ telle que $f(a)=f(b)$. Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$ (th de Rolle).
2. oui c'est le th des accroissements finis
3. non : Interprétation graphique du théorème des accroissements finis : soit f continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe une $c\in]a,b[$ tel que le graphe de f admet au point $C=(c,f(c))$ une tangente qui est parallèle à la droite qui passe par les points $A=(a,f(a))$ et $B=(b,f(b))$.
4. Non car f non dérivable en 0 ; non pour g car il n'existe pas de points a et b de $[0,2]$ tels que $g(a)=g(b)$.

Exercice 1.3 *Calculer les dérivées suivantes*

1. $f(x)=sin(cos(x))$ $g(x)=ln(ln(x))$
2. $h(x)=\frac{1}{1+tan(x)}$ $i(x)=e^{e^x}$.

3. *calculer f' en fonction de g' : $f(x) = g(ax+b)$, $f(x) = g(a+g(x))$ $f(x) = g(x+g(x))$ et $f(e^{x+3}) = g(x^3)$.*

Solution :

1. On a $f'(x) = cos(cos(x))(-sin(x))$ $g'(x) = (1/ln(x)) \times 1/x$.
2. On a $h'(x) = \frac{-1+tan^2(x)}{(1+tan(x))^2}$ $i'(x) = e^{e^x} \times e^x$.
3. On a $f'(x) = ag'(ax+b)$, $f'(x) = g'(a+g(x))g'(x)$, $f'(e^{x+3})e^{x+3} = 3x^2g'(x^3)$.

Exercice 1.4 *Etudier la dérivabilité en 0 :*

$$f(x) = xsin(1/x) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0;$$

$$g(x) = x^2sin(1/x) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 0.$$

Solution :

1. Le taux de variation en 0 est $f(x)/x = sin(1/x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0 donc f n'est pas dérivable en 0.
2. Le taux de variation en 0 est $|g(x)/x| = |xsin(1/x)| \leq |x|$ donc la limite est 0 en 0. g est donc dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

Exercice 1.5 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que*

$$\exists C > 0, \forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^2.$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en déduire qu'elle est constante sur $\mathbb{R}$.

Solution :

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, le taux de variation en x_0 est $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq C|x-x_0|$ donc il tend vers 0 quand x tend vers x_0. Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$. Donc f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.6 *Déterminer les dérivées n^{ieme} des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \frac{1}{x}$
2. $g(x) = \frac{1}{x^2}$
3. $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$
4. $i(x) = 3x^k$
5. $j(x) = cos(2x)$
6. $k(x) = xe^x$
7. $l(x) = sin(x)e^{2x}$
8. $m(x) = (x^3+2x-7)e^x$
9. $n(x) = \frac{1}{x^2-1}$ *que l'on écrira* $n(x) = 1/2(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1})$

Solution :

1. On montre par récurrence que $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.
2. On montre par récurrence que $g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (n+1)!}{x^{n+2}}$.
3.
4. Si $n > k$ on a $i^{(n)}(x) = 0$ sinon $i^{(n)}(x) = 3k(k-1)..(k-n+1)x^{k-n}$.
5. On montre par récurrence que $j^{(n)}(x) = 2^n cos(2x + n\frac{\pi}{2}$.
6. On a avec la formule de Leibniz, $\forall n \in \mathbb{N}$, $k^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k e^x = xe^x + ne^x$.
7.
8.
9.

Exercice 1.7 *Déterminer la dérivée n^{ieme} de la fonction $f(x) = x^n(1+x)^n$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Solution : On a avec la formule de Leibniz

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 n! x^{n-k}(1+x)^k \quad (*).$$

D'autre part, sachant que $x^n(1+x)^n = x^n(1 + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n)$ le coefficient de x^n dans la dérivé d'ordre n provient de la dérivée du terme de degré $2n$ et vaut A_{2n}^n. Mais avec la formule $(*)$ le coefficient de x^n est aussi $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 n!$. D'où on a

$$\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

Exercice 1.8 *Soit $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = exp(\frac{-1}{x})$ si $x > 0$.*

1. *montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.*
2. *montrer que f est continue en 0.*
3. *montrer que f est dérivable en 0.*
4. *montrer que f est deux fois dérivable en 0.*
5. *Montrer par récurrence que $f^{(n)}(x) = P_n x^{-m_n} exp(\frac{-1}{x})$ si $x > 0$ où $m_n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un polynôme à coefficients réels.*
6. *En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*

Solution :

1. f est constante sur $]-\infty, 0[$ donc f est C^∞ sur $]-\infty, 0[$ et $f^{(n)}(x) = 0$, $\forall x \in]-\infty, 0[$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   Sur $]0, +\infty[$, la fonction est composée de $\rightarrow 1/x$ et de la fonction exponentielle toutes deux C^∞ donc f est C^∞ sur $]0, +\infty[$.

2. On a $lim_{0^-} f(x) = 0$ et $lim_{O^+} f(x) = lim_{0^+} exp(-1/x) = 0 = f(0)$.
3. On a
$$f'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ \frac{1}{x^2} exp(-1/x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$
On a $lim_0 f'(x) = 0$ car $lim_{0^-} f'(x) = 0$ et $lim_{0^+} f'(x) = lim_{0^+} \frac{1}{x^2} exp(-1/x) = lim_{+\infty} t^2 exp(-t) = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Donc f est de classe C^1.
4. On a
$$f''(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ \frac{-2}{x^3} exp(-1/x) + \frac{1}{x^4} exp(-1/x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$
Donc $lim_0 f''(x) = 0 = f''(0)$.
5. Pour $n = 0$ la propriété est vérifiée et supposons qu'il existe un certain $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(x) = P_n x^{-m_n} exp(\frac{-1}{x})$ si $x > 0$ où $m_n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un polynôme à coefficients réels.
On a
$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \frac{P_n'(x)}{x^{m_n}} exp(-1/x) - \frac{m_n P_n(x)}{x^{m_n+1}} exp(-1/x) + \frac{P_n(x)}{x^{m_n}} \frac{1}{x^2} exp(-1/x)$$
$$= \frac{x^2 P_n'(x) - 2m_n x P_n(x) + P_n(x)}{x^{m_n+2}} exp(-1/x).$$
On pose $P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) - 2m_n x P_n(x) + P_n(x) \in \mathbb{R}[X]$ et $m_{n+1} = m_n + 2 \in \mathbb{N}$. La dérivée $(n+1)^{ieme}$ est de la forme voulue.
6. Montrons par récurrence que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$. On sait déja que f est C^1 sur $\mathbb{R}$. Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$.
Soit
$$g(x) = f^{(n)}(x) \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ \frac{P_n(x)}{x^{m_n}} exp(-1/x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$
Sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ g est C^∞ donc on a seulement un problème en 0. On a
$$g'(x) = f^{(n)}(x) \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ \frac{P_{n+1}(x)}{x^{m_{n+1}}} exp(-1/x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$
Ainsi $lim_{0^-} g'(x) = 0 = lim_{0^+} g'(x)$ donc on obtient $lim_0 g'(x) = 0$. g est alors C^1 et $g'(0) = 0$.

Exercice 1.9 *Soit $f(x) = |x|$. f est-elle de classe C^∞ sur $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$, sur $\mathbb{R}$, C^3 sur $[-1, 0]$, $[0, 1]$ et $[-1, 1]$?*

Solution : Sur $]-\infty, 0[$, $f(x) = -x$ donc elle est C^∞. Sur $]0, +\infty[$, $f(x) = x$ donc elle est C^∞. Sur $\mathbb{R}$, f n'est pas dérivable en 0 car $f_d'(0) = 1$ et $f_g'(0) = -1$. Sur $[-1, 0]$ et $[0, 1]$ f est C^3 tandis que sur $[-1, 1]$ il y a le même problème que sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.10 *Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2xe^{x^2}$.*

1. *Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.*
2. *Calculer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.*
3. *Montrer que f^{-1} est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f^{-1})''(0)$.*

Solution :

1. D'une part, f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} > 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc f est strictement croissante donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R})$ car $lim_{-\infty}f(x) = -\infty$ et $lim_{+\infty}f(x) = +\infty$. On sait que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$. si $f'(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}$. Or $f'(x) = (1 + 2x^2)2e^{x^2} \neq 0$ sur $\mathbb{R}$. D'où le résultat.
2. Sachant que $f(0) = 0$ on a $f^{-1}(0) = 0$ et $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$.
3. On a $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. D'où $(f^{-1})''$ existe en tout point x de $\mathbb{R}$ la où la dérivée de $\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. Il faut alors montrer que $f'(f^{-1}(y))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et non nul sur $\mathbb{R}$. Or on a $f'(f^{-1}(y)) = 2e^{f^{-1}(y)^2} + (2f^{-1}(y))^2 ef^{-1}(y)$. f^{-1} et exp etant dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ sur $\mathbb{R}$, cette dérivée existe sur $\mathbb{R}$ et on a
$$(f^{-1})''(0) = -\frac{f''(f^{-1}(0))(f^{-1})'(0)}{(f'(f^{-1}(0)))^2} = 0.$$

Exercice 1.11

1. *Montrer que l'on a $xcos(x) - sin(x) < 0$ si $0 < x < \pi$.*
2. *Etudier les variations de $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$ sur $]0, \pi]$. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b \leq \pi$. Montrer que l'on a $\frac{a}{b} < \frac{sin(a)}{sin(b)}$.*

Solution :

1. On pose $g(x) = xcos(x) - sin(x)$ pour $x \in]0, \pi[$. On a $g'(x) = cos(x) - xsin(x) + cos(x) = -xsin(x) < 0$ sur $]0, \pi[$. Donc on a $g(x) < g(0) = 0$ pour tout $x \in]0, \pi[$.
2. On obtient $f'(x) = \frac{g(x)}{x} < 0$ sur $]0, \pi[$. Donc f est décroissante sur $]0, \pi[$. Ainsi si $0 < a < b < \pi$, on a $f(a) > f(b)$ c'est à dire $\frac{a}{b} < \frac{sin(a)}{sin(b)}$.

Exercice 1.12 *Soit $p \in \mathbb{N}$.*

1. *Montrer que $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{(1+x)^p}{1+x^p}$ a pour minimum 2^{p-1}.*
2. *Soient a et b deux réels positifs. Montrer que l'on a*
$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Solution :

1. On a
$$f'(x) = \frac{p(1+x)^{p-1}(1+x^p) - (1+x)^p p x^{p-1}}{(1+x^p)^2}$$
$$= \frac{p(1+x)^{p-1}(1+x^p - (1+x)x^{p-1})}{(1+x^p)^2}$$
$$= \frac{p(1+x)^{p-1}(1-x^{p-1})}{(1+x^p)^2}.$$
On a $f'(x) = 0$ si $x = 1$ et la dérivée change de signe en 1, positive avant négative ensuite donc f a un minimum en $x = 1$ qui est $f(1) = 2^{p-1}$.
2. Il suffit d'écrire que $f(\frac{b}{a} \geq 2^{p-1}$.

Exercice 1.13 *Soit f dérivable sur $]a, b[$ avec $0 < a < b$. On suppose de plus que f est continue sur $[a, b]$ et que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe représentative de f qui passe par l'origine. On pourra utiliser la fonction $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.*

Solution : g est continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ et $g(a) = g(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(x) = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. Donc $g'(c) = 0$ implque que $f'(c) = f(c)/c$ car $c \neq 0$. La tangente en $(c, f(c)$ a pour équation $y = f(c)/c(x - c) + f(c) = f(c)/cx$ et elle passe par l'origine.

Exercice 1.14 *Montrer que si P est un polynôme qui a n racines réelles distinctes alors sa dérivée P' en a au moins $n - 1$.*

Solution : Si P a n racines distinctes $a_1, a_2, ...a_n$ comme P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $P(a_i) = 0, \forall i$ on applique le théorème de Rolle sur $[a_i, a_{i+1}]$ $\forall i = 1, n - 1$. On en déduit que P' a au moins $n - 1$ racines.

Exercice 1.15 *Soient $a_0, a_1, ..., a_n$ tels que $a_0 + \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_n}{n+1} = 0$. Montrer qu'il existe un réel $x \in]0, 1[$ tel que $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = 0$.*

Solution : On applique le théorème de Rolle à $P(x) = a_0 x + a_1 x^2/2 + ... + a_n x^{n+1}/(n + 1)$.

Exercice 1.16 *Soit $a \in \mathbb{R}$, et f une fonction continue et dérivable sur $[a, +\infty[$.*

1. *On suppose que $lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Démontrer que*
$$lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
2. *On suppose que $lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Démontrer que*
$$lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

3. *On suppose que* $lim_{x\to+\infty}f'(x) = l > 0$. *Démontrer que*

$$lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = l \text{ et que } lim_{x\to+\infty}f(x) = +\infty.$$

Solution :

1. Puisque $lim_{x\to+\infty}f'(x) = +\infty$ il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$ nous ayons $f'(x) > 1$. Nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[A, x]$ donc il existe $c \in]A, x[$ tel que $f(x) - f(A) = f'(c)(x - A)$. Comme $c \geq A$ on a $f'(c) > 1$ d'où $f(x) > f(A) + (x - A)$. Par suite, on a $lim_{x\to+\infty}f(x) = +\infty$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $lim_{x\to+\infty}f'(x) = 0$ il existe un nombre $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$ nous ayons $|f'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[A, x]$ donc il existe $c \in]A, x[$ tel que $f(x) - f(A) = f'(c)(x - A)$. Nous avons pour tout $x > A$,
$$|\frac{f(x)}{x}| = |\frac{f(A) + f'(c)(x - A)}{x}| \leq |\frac{f(A)}{x}| + \frac{x - A}{x}|f'(c)|.$$
Puisque $c > A$, on a $|f'(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ donc $\frac{x-A}{x}|f'(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, si $x \geq \frac{2|f(A)|}{\varepsilon}$ alors $|\frac{f(A)}{x}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi $x \geq sup(A, \frac{2|f(A)|}{\varepsilon})$ on a $|\frac{f(x)}{x}| \leq \varepsilon$ ce qui démontre que
$$lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0.$$
3. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $lim_{x\to+\infty}f'(x) = l > 0$ il existe un nombre $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$ nous ayons $|f'(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[A, x]$ donc il existe $c \in]A, x[$ tel que $f(x) - f(A) = f'(c)(x - A)$. Nous avons pour tout $x > A$,
$$|\frac{f(x)}{x} - l| = |\frac{f(A) + xf'(c) - Af'(c) - lx}{x}| \leq |\frac{f(A)}{x}| + |f'(c) - l| + A|\frac{f'(c)}{x}|.$$
Puisque $c > A$, on a $|f'(c) - l| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. D'autre part, si $x \geq \frac{3|f(A)|}{\varepsilon}$ alors $|\frac{f(A)}{x}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Enfin on a $|f'(c) - l| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ ce qui implique que $l - \frac{\varepsilon}{3} \leq f'(c) \leq l + \frac{\varepsilon}{3}$ et par suite
$$\frac{1}{x}(l - \frac{\varepsilon}{3}) \leq \frac{f'(c)}{x} \leq \frac{1}{x}(l + \frac{\varepsilon}{3})$$
pour tout $x \geq A$. Par passage à la limite nous obtenons $lim_{x\to+\infty}\frac{f'(c)}{x} = 0$ soit $lim_{x\to+\infty}A\frac{f'(c)}{x} = 0$. Ainsi il existe $A' > 0$ tel que pour tout $x \geq A'$ nous avons $|A\frac{f'(c)}{x}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Par suite, si $x \geq sup(A, A', \frac{3|f(A)|}{\varepsilon})$ nous avons
$$|\frac{f(x)}{x} - l| \leq \varepsilon.$$

Soit $M > 0$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \geq B$ nous avons

$$|\frac{f(x)}{x} - l| \leq \varepsilon \text{ soit } l - \varepsilon \frac{f(x)}{x} \leq l + \varepsilon.$$

Ainsi, on a si $x \geq B$, $x(l - \varepsilon) \leq f(x) \leq x(l + \varepsilon)$ d'où

$$f(x) \geq M \text{ si } x(l - \varepsilon) \geq \text{ soit } x \geq \frac{M}{l - \varepsilon}.$$

Par suite si $x \geq sup(B, \frac{M}{l-\varepsilon})$ nous avons $f(x) \geq M$ ce qui démontre que

$$lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Exercice 1.17 *Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \frac{1}{x+1} < ln(x+1) - ln(x) < \frac{1}{x}$$

puis

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \ n \in \mathbb{N}, \ (n+1)a^n < \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n+1)b^n.$$

En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}.$$

(On pourra prendre $a = 1 + \frac{1}{n+1}$ et $b = 1 + \frac{1}{n}$).

Remarque 1.1 *La suite ainsi définie est croissante, quelle est sa limite ?*

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, appliquons le théorème des Accroissements finis à la fontion $x \mapsto ln(x)$ sur l'intervalle $[x, x+1]$. Nous savons qu'il existe $c \in]x, x+1[$ tel que

$$ln(x+1) - ln(x) = \frac{1}{c}.$$

Or $0 < x < cx + 1$ donc $\frac{1}{x} > \frac{1}{c} > \frac{1}{x+1}$. Ainsi on a

$$\frac{1}{x+1} < ln(x+1) - ln(x) < \frac{1}{x}.$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$, appliquons le théorème des Accroissements finis à la fontion $x \mapsto x^{n+1}$ sur l'intervalle $[a, b]$. Nous savons qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$b^{n+1} - a^{n+1} = (n+1)c^n.$$

Or $a < c < b$ donc on $(n+1)a^n < (n+1)c^n < (n+1)b^n$. d'où le résultat.
En prenant $a = 1 + \frac{1}{n+1}$ et $b = 1 + \frac{1}{n}$) on obtient à partir de la deuxième inégalité :

$$n(n+1)((1 + \frac{1}{n})^{n+1} - (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}) < (n+1)(1 + \frac{1}{n})^n$$

$$\Leftrightarrow (1+\frac{1}{n})^n(n(1+\frac{1}{n})-1) < n((1+\frac{1}{n+1})^{n+1})$$
$$\Leftrightarrow (1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}.$$

Exercice 1.18 *Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$ et telle que f' est croissante et $f(0)=0$.*

1. *En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $\forall x>0,\ f(x)\leq xf'(x)$.*
2. *En déduire que $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ est croissante sur $]0,+\infty[$.*

Solution :

1. Soit $x>0$, appliquons le théorème des Accroissements finis à la fontion $x\mapsto f(x)$ sur l'intervalle $[0,x]$. Nous savons qu'il existe $c\in]0,x[$ tel que
$$f(x)-f(0)=f'(c)x.$$
Or on a $c<x$ donc $f'(c)\leq f'(x)$ donc on obtient $f(x)\leq xf'(x)$.
2. On a $g'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}=\geq 0$ d'après 1).

Exercice 1.19 *Calculer, à l'aide du théorème des accroissements finis*
$$lim_{x\to+\infty}x^2(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}).$$

Solution : Soit $x>0$, appliquons le théorème des Accroissements finis à la fontion $x\mapsto e^{1/x}$ sur l'intervalle $[x,x+1]$. Nous savons qu'il existe $c\in]x,x+1[$ tel que
$$e^{1/(x+1)}-e^{1/x}=\frac{-1}{c^2}e^{1/c}.$$
Or $x^2<c^2<(x+1)^2$ donc $\frac{1}{(x+1)^2}<\frac{1}{c^2}<\frac{1}{x^2}$. Ainsi on a $-\frac{1}{x^2}<-\frac{1}{c^2}<-\frac{1}{(x+1)^2}$ et
$$-\frac{e^{1/c}}{x^2}<e^{1/(x+1)}-e^{1/x}<-\frac{e^{1/c}}{(x+1)^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2e^{1/c}}{(x+1)^2}<x^2(e^{1/x}-e^{1/(x+1)})<e^{1/c}.$$
On fait tendre x vers $+\infty$ d'où $c\to+\infty$ et ainsi on a $e^{1/c}\to 1$ d'où
$$lim_{x\to+\infty}x^2(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}})=1.$$

Exercice 1.20
1. *Montrer qu'il existe un unique réel l tel que $cosl=l$. Montrer que $0\leq l\leq 1$.*

   Soit la (u_n) définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=cos(u_n),\ \forall n\in\mathbb{N}$.

2. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1$.
3. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - l| \leq (sin(1))|u_n - l|$.
4. *Montrer par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq (sin(1))^n|u_0 - l|$. *En déduire que* (u_n) *converge vers* l.

Solution :

1. Si un tel réel l existe nécessairement comme $0 \leq cosx \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq l \leq 1$. On considère alors la fonction $f(x) = x - cosx$ sur $[0,1]$. On sait que f est continue sur $[0,1]$ et que $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = 1 - cos1 \geq 0$. D'après le théorèmes des valeurs intermédiares, on sait qu'il existe $l \in [0,1]$ tel que $f(l) = 0$. En outre $f'(x) = 1 + sinx > 0$ sur $[0,1]$ donc l est unique.
2. On sait que $u_0 = 0$ donc on a $0 \leq u_0 \leq 1$. D'autre part, on a $u_{n+1} = cos(u_n)$ et comme $0 \leq cos(x) \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ on a le résultat.
3. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction cosinus : $|u_{n+1} - l| = |cos(u_n) - l| = |cos(u_n) - cosl| = |sin(c)||u_n - l|$ avec $c \in]u_n, l[$ ou $]l, u_n[$. On sait alors que $c \in [0,1]$ donc $sin(c) \leq sin(1)$. Par suite on a $|u_{n+1} - l| \leq (sin(1))|u_n - l|$.
4. Pour $n = 0$ ça marche. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| \leq (sin(1))^n|u_0 - l|$. On a alors
$$|u_{n+1} - l| \leq sin(1)|u_n - l| \leq (sin(1))^{n+1}|u_0 - l|.$$
5. On sait que $0 < sin(1) < 1$ donc $(sin(1))^n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc $u_n \to l$.

Exercice 1.21 *Soit* f *une fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$ *telle que* $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, *et* $f'(0) = -1$.
Montrer que

1. $lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = -1$,
2. $\exists x_1 \in]0,1[,\ f(x_1) < 0$,
3. $\exists x_2 \in]0,1[,\ f(x_2) = 0$,
4. $\exists x_3 \in]0,1[,\ f'(x_3) = 0$.

Solution :

1. $f'(0) = -1 \Rightarrow lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = -1$.
2. On sait que $lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = -1$ donc il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]0,\eta[$, on a $f(x) < 0$. Prendre $x_1 \in]0,\eta[$.
3. $f(x_1) < 0$ et $f(1) = 1 > 0$ comme f est continue sur $[x_1, 1]$, $\exists x_2 \in]0,1[,\ f(x_2) = 0$,.
4. Appliquons le théorème de Rolle à la fonction f sur $[0, x_2]$: f est continue sur cet intervalle et $f(0) = f(x_2) = 0$. Nous savons qu'il existe $x_3 \in]0, x_2[\subset]0,1[,\ f'(x_3) = 0$.

Exercice 1.22 *Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ et dérivables sur $]0,1$ et telle que $f(0)=g(0)$ et $f(1)=g(1)$.*
On va montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que les représentations graphiques de f et $g+\lambda$ sont tangentes.

1. *Soit $h(x)=f(x)-g(x)$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $h'(c)=0$.*
2. *On prend $\lambda = h(c)$.. Ecrire l'équation de la tangente de f, puis de $g+\lambda$ au point d'abscisse c et conclure.*

Solution :

1. Appliquons le théorème de Rolle à la fonction h sur $[0,1]$: h est continue sur cet intervalle et $h(0)=h(1)=0$. Nous savons qu'il existe $c \in]0,x_2[\subset]0,1[$, $h'(c)=0$.
2. L'équation de la tangente en $(c, f(c)$ est $y=f'(c)(x-c)+f(c)=g'(c)(x-c)+g(c)+\lambda$.

Exercice 1.23 1. *Ecrire un encadrement de $sin(0.1)$ en utilisant la formule de Taylor-Young à l'ordre 4.*

2. *Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $ln(3/2)$.*

Exercice 1.24 *Soit f de classe C^3 sur un intervalle ouvert contenant a. Calculer*

$$lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}.$$

Solution : On a avec les formules de Taylor l'existence de $\xi \in]a,a+[$ et $\alpha \in]a-h,a[$ tels que $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\frac{h^3}{6}f'''(\xi)$ et $f(a-h)=f(a)-hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\frac{h^3}{6}f'''(\alpha)$. D'où on obtient

$$\frac{f(a+2h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=f''(a)+\frac{h}{3}(f'''(\xi)+f'''(\alpha)).$$

On fait tendre h vers 0 donc $\xi \to a$ et $\alpha \to a$ et sachant que f est C^3, $f'''(\xi)\to f'''(a)$ et $f'''(\alpha)\to f'''(a)$. On a alors $lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=f''(a)$.

Exercice 1.25 *En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1+x$$

$$\forall x > 0,\ ln(x+1) > x-\frac{x^2}{2}$$

$$\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}],\ sinx > x-\frac{x^3}{6}.$$

Solution : La formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle sur l'intervalle d'extrémité $x \in \mathbb{R}$ et 0 donne l'existence de $c \in]0, x[$ ou $]x, 0[$ tel que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} e^c.$$

D'où on a $e^x \geq 1 + x$. De même, il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \frac{1}{(c+1)^3}.$$

Or $\frac{x^3}{3} \frac{1}{(c+1)^3} > 0$ d'où le résultat. De même, il existe $c \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que

$$sinx = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} cos(c).$$

D'où $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}], \ sinx > x - \frac{x^3}{6}$.

Exercice 1.26 *Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe K et L tels que $|f(x)| \leq K$ et $|f''(x)| \leq L$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

1. *Soit $a > 0$. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange au point 0, montrer qu'il existe des réels α et β tels que*

$$f(a) - f(-a) = 2af'(0) + \frac{a^2}{2}(f''(\alpha) - f''(\beta)).$$

2. *Montrer que l'on a $|f'(0)| \leq \frac{K}{a} + \frac{a}{2}L$ pour tout $a > 0$.*
3. *Posons $u(t) = \frac{K}{t} + \frac{t}{2}L$ pour $t > 0$. Etudier les variations de u. En déduire l'inégalité $|f'(0)| \leq \sqrt{2KL}$.*
4. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $g(x) = f(x + x_0)$. Calculer g' et g'' et montrer que l'on a $|f'(x_0)| \leq \sqrt{2KL}$.*

Solution :

1. Soit $a > 0$, la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2 donne

$$f(a) = f(0) + af'(0) + \frac{a^2}{2} f''(\alpha)$$

et

$$f(-a) = f(0) - af'(0) + \frac{a^2}{2} f''(\beta)$$

avec $\alpha \in [0, a]$ et $\beta \in [-a, 0]$. En les soustrayant, on a

$$f(a) - f(-a) = 2af'(0) + \frac{a^2}{2}(f''(\alpha) - f''(\beta)).$$

2. On a
$$|f'(0)| \leq \frac{1}{2a}(|f(a)| + |f(-a)| + \frac{a^2}{2}|(f''(\alpha) - f''(\beta))|)$$
$$\leq \frac{1}{2a}(2K + \frac{a^2 2L}{2}) \leq \frac{K}{a} + \frac{a}{2}L,\ \forall a > 0.$$

3. On a $u'(t) = \frac{-K}{t^2} + \frac{L}{2}$. $u'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2K}{L}}$ qui est un minimum pour u. On obtient
$$u(\sqrt{\frac{2K}{L}}) = \frac{K}{\sqrt{\frac{2K}{L}}} + \frac{\sqrt{\frac{2K}{L}}}{2}L = \sqrt{2KL}.$$
On sait que $|f'(0)|$ est plus petit que $inf_{t>0}u(t)$ car $|f'(0)| \leq u(t)\ \ \forall t > 0$, on a alors $|f'(0)| \leq \sqrt{2KL}$.

4. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x + x_0)$ et $g''(x) = f''(x + x_0)$. Appliquons le résultat précédent à g : on a $|g'(0)| \leq \sqrt{2KL}$. Donc on a $|f'(x_0)| \leq \sqrt{2KL}$.