

Topologie des espaces vectoriels Normés



Fares Maalouf

January 2, 2021

Pour une version mise à jour de ce document, visitez [mon site](#)

Contents

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Distances — Espaces Métriques: Définition et Exemples | 2 |
| 2 | Normes, Espaces Vectoriels Normés: définition et exemples | 2 |
| 3 | Boules ouvertes, Boules fermées, sphères - définitions et exemples | 3 |
| 4 | Distances et Boules: Exemples et Questions/Réponses | 4 |
| 5 | Convergence de suites dans un espace vectoriel normé/espace métrique | 4 |
| 6 | Normes équivalentes | 5 |
| 7 | Ensembles ouverts et ensembles fermés - Définitions et exemples | 5 |
| 8 | Une boule ouverte (resp. fermée) est un ensemble ouvert (resp. fermé) | 6 |
| 9 | Continuité de fonctions entre deux espaces vectoriels normés / espaces métriques | 7 |
| 10 | Comment montrer qu'un ensemble est ouvert? ou fermé? | 7 |
| 11 | Comment montrer qu'un ensemble n'est pas ouvert? ou pas fermé? | 8 |
| 12 | Intérieur, adhérence, frontière et voisinages | 8 |
| 13 | Compacité | 9 |
| 14 | Compacité: Théorèmes de Bolzano-Weierstrass et Heine-Borel | 10 |
| 15 | Exercices: Compacité de $O_n(\mathbb{R})$, Densité de $GL_n(\mathbb{C})$ | 10 |
| 16 | Exercice: L'ensemble des matrices complexes diagonalisables est dense | 10 |
| 17 | Exercice: $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, $GL_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas | 10 |
| 18 | Exercice: valeurs d'adhérence d'une suite dont le pas tend vers 0 | 10 |
| 19 | Un théorème de point fixe | 11 |
| 20 | Exercice: Adhérence dans un espace de suites | 11 |
| 21 | Sous groupes de $(\mathbb{R}, +)$: soit discrets soit denses | 11 |
| 22 | Le noyau d'une forme linéaire discontinue est dense | 11 |

Dans tout ce document, \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1 Distances — Espaces Métriques: Définition et Exemples

Définition 1.1. Soit E un ensemble non vide, on appelle distance sur E toute application d de $E \times E$ dans \mathbb{R}^+ vérifiant:

1. Pour tout $(x, y) \in E \times E$; $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.
2. Pour tout $(x, y) \in E \times E$; $d(x, y) = d(y, x)$.
3. Pour tout x, y et z dans E ; $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Définition 1.2. Un *espace métrique* est un ensemble muni d'une distance.

Exemples:

- Distance Euclidienne sur \mathbb{R}^2 : $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$
- Distance Euclidienne sur \mathbb{R}^n : $d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$
- Distance Euclidienne sur \mathbb{C}^n : $d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$
- Distance sur \mathbb{R} : $d(x, y) = |x - y|$
- Distance de Manhattan sur \mathbb{R}^2 : $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$
- Distance discrète: $d(x, y) = 0$ si $x = y$, et $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$

Explication en vidéo: [Cliquez ici](#)

2 Normes, Espaces Vectoriels Normés: définition et exemples

Parmi les exemples donnés précédemment, toutes à l'exception d'une seule sont un type spécial de distances: celles qui proviennent d'une norme.

Définition 2.1. Soit E un espace vectoriel sur un corps K . On appelle *norme* sur E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

1. $\forall x \in E, N(x) = 0 \implies x = 0$ [séparation].
2. $\forall \lambda \in K, \forall x \in E, N(\lambda.x) = |\lambda|.N(x)$ [homogénéité].
3. $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ [inégalité triangulaire].

On dit alors que le couple (E, N) est un espace vectoriel normé.

Notation: Les normes sont d'habitude notées par $|\cdot|$ ou $\|\cdot\|$.

Proposition 2.2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour $x, y \in E$, on définit $d(x, y)$ par:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Alors d est une distance sur E .

Exemples de normes: Les fonctions définies ci-dessous sont des normes sur \mathbb{R}^n :

1. $\|x\|_1 := \sum |x_i|$
2. $\|x\|_2 := \sqrt{\sum x_i^2}$
3. $\|x\|_\infty := \max\{x_i, i = 1 \dots, n\}$

Les fonctions définies ci-dessous sont des normes sur $C([0, 1], \mathbb{R})$:

1. $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)| dt$
2. $\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$
3. $\|f\|_\infty := \max\{|f(t)|, t \in [0, 1]\}$

Question: Lesquelles parmi les fonctions suivantes sont des normes sur \mathbb{R}^3 ?

1. $f(x, y, z) = |x + y + z|$
2. $f(x, y, z) = \sqrt{x^4 + y^4 + z^4}$
3. $f(x, y, z) = \sqrt{2x^2 + 3y^2 + 4z^2}$
4. $f(x, y, z) = |x| + |y|$

Explication en vidéo: [Cliquez ici](#)

3 Boules ouvertes, Boules fermées, sphères - définitions et exemples

Définition 3.1. Soit (E, d) un espace métrique, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$.

1. On appelle *Boule ouverte* de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B(a, r) := \{x \in E : d(a, x) < r\}.$$

2. On appelle *Boule fermée* de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B'(a, r) := \{x \in E : d(a, x) \leq r\}.$$

3. On appelle *sphère* de centre a et de rayon r l'ensemble

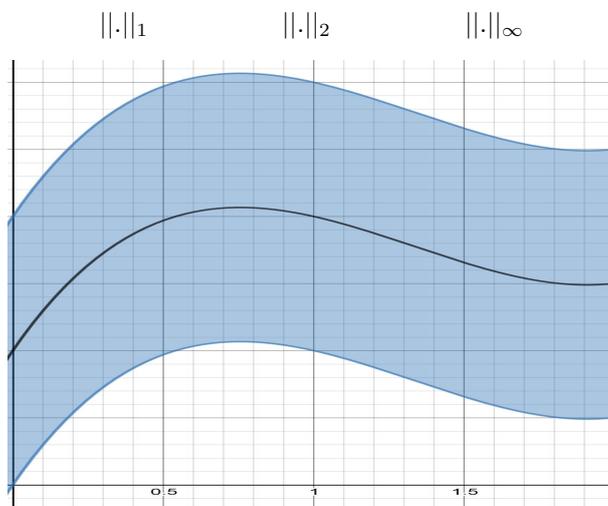
$$S(a, r) := \{x \in E : d(a, x) = r\}.$$

Exercice: Tracer les boules $B(0, 1)$ de \mathbb{R}^2 muni respectivement des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$

Explication en vidéo: [Cliquez ici](#)

4 Distances et Boules: Exemples et Questions/Réponses

Question 1: L'ensemble des fonctions de $C([0, 2], \mathbb{R})$ dont le graphe ne dépasse pas la région en bleu est la boule fermée $B'(f, 1)$ pour la norme:



Question 2: Dans \mathbb{R}^2 , le carré plein du plan de sommets $A(-2, -3)$, $B(0, -3)$, $C(0, -1)$, $A(-2, -1)$, est:

1. La boule $B'((-1, -2), 1)$ pour la norme $\|\cdot\|_1$.
2. La boule $B'((-1, -2), 1)$ pour la norme $\|\cdot\|_2$.
3. La boule $B'((-1, -2), 1)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
4. Aucune des réponses précédentes

Question 3: On définit N_1 sur $C(]0, 1[, \mathbb{R})$ par

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

Alors N_1 n'est pas une norme car:

1. La séparation n'est pas vérifiée.
2. L'homogénéité n'est pas vérifiée.
3. L'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée.
4. Pour une autre raison.

Explication en vidéo: [Cliquez ici](#)

5 Convergence de suites dans un espace vectoriel normé/espace métrique

Définition 5.1. Soit (E, d) un espace métrique, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E , et $a \in E$. On dit que $(a_n)_n$ converge vers a si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : d(a_n, a) < \epsilon$$

autrement dit, $(a_n)_n$ converge vers a dans E si et seulement si $(d(a_n, a))_n$ converge vers 0 dans \mathbb{R} .

Exemples:

1. Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, la suite $\left(1 + \frac{1}{n}, 4 - \frac{7}{n^2}\right)$ converge vers $(1, 4)$.
2. La suite $\frac{E(10^n \sqrt{2})}{10^n}$ converge dans \mathbb{R} mais pas dans \mathbb{Q} .
3. Dans $C([0, 1], \mathbb{R})$, la suite $(f_n)_n$ définie par $f_n(x) = x^n$, converge vers la fonction nulle pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, mais pas pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
4. Dans $C([0, 1], \mathbb{R})$, la suite $(f_n)_n$ définie par $f_n(x) = \sqrt{n} x^n$, converge vers la fonction nulle pour la norme $\|\cdot\|_1$, mais pas pour la norme $\|\cdot\|_2$.

Explication en vidéo: [Cliquez ici](#)

6 Normes équivalentes

Définition 6.1. Soit E un espace vectoriel, et N_1, N_2 deux normes sur E . On dit que N_1 et N_2 sont *équivalentes* si et seulement si, il existe deux constantes $C, D > 0$ telles que $N_1 < CN_2$ et $N_2 < DN_1$.

Remarque: $N_1 \sim N_2$ si et seulement si N_1/N_2 et N_2/N_1 sont des fonctions bornées sur $E \setminus \{0\}$.

Exemple: Sur \mathbb{R}^n , $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes.

Remarque: Sur un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Exemple: Sur $C([0, 1], \mathbb{R})$, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux non équivalentes.

Proposition 6.2. Soit E un espace vectoriel et N, N' deux normes sur E . Alors N et N' sont *équivalentes* si et seulement si toute suite qui converge pour l'une converge pour l'autre.

Exercice: On définit sur $\mathbb{R}[x]$ les normes d'un polynôme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 :$$

- $\|P\|_1 = |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_0|$
- $\|P\|_2 = \sqrt{|a_n|^2 + |a_{n-1}|^2 + \dots + |a_0|^2}$
- $\|P\|_\infty = \max\{|a_n|, |a_{n-1}|, \dots, |a_0|\}$

Ces normes sont elles deux à deux équivalentes? Justifier

Explication en vidéo: [Cliquez ici](#)

7 Ensembles ouverts et ensembles fermés - Définitions et exemples

Définition 7.1. Soit (E, d) un espace métrique, et A un sous-ensemble de E

1. On dit que A est un *sous-ensemble ouvert de E* si et seulement si pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$

2. On dit que A est un *sous-ensemble fermé de E* si et seulement si $E \setminus A$ est ouvert.

Remarque 7.2. • Un ensemble peut être ni ouvert ni fermé.

- Un ensemble peut être à la fois ouvert et fermé.

Exemples:

- \mathbb{Z} est un sous-ensemble fermé, non ouvert de \mathbb{R} .
- Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
- \mathbb{R}^{+*} est un sous-ensemble ouvert, non fermé de \mathbb{R} .
- \mathbb{R}^+ est un sous-ensemble fermé, non ouvert de \mathbb{R} .
- Un intervalle ouvert de \mathbb{R} est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R} . Un intervalle fermé de \mathbb{R} est un sous-ensemble fermé de \mathbb{R} .
- La partie du plan sur ou en dessous de la première bissectrice est un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^2 .
- Dans l'espace métrique \mathbb{Z} muni de la distance usuelle, tout sous-ensemble est à la fois ouvert et fermé.
- Soit (E, d) un espace métrique. Les sous-ensembles \emptyset et E sont à la fois ouverts et fermés de E .

Propriétés:

- Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
- Toute intersection de fermés est un fermé.
- Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.
- Toute réunion finie de fermés est un fermé.

Explication en vidéo: [Cliquez ici](#)

8 Une boule ouverte (resp. fermée) est un ensemble ouvert (resp. fermé)

Proposition 8.1. Soit (E, d) un espace métrique. Toute boule ouverte de E est sous-ensemble ouvert de E .

Proposition 8.2. Soit (E, d) un espace métrique. Toute boule fermée de E est sous-ensemble fermé de E .

Explication en vidéo: [Cliquez ici](#)

9 Continuité de fonctions entre deux espaces vectoriels normés / espaces métriques

Définition 9.1. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, $f : E \rightarrow E'$, et $a \in E$.

1. On dit que f est continue au point a ssi

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E : d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \epsilon$$

2. On dit que f est continue ssi f est continue en tout point.

Remarque 9.2. 1. L'identité d'un espace dans lui-même est continue.

2. Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.
3. Les projections de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K} sont continues.
4. Les fonctions produit et somme de \mathbb{K}^2 dans \mathbb{K} sont continues.
5. Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés, et soient f, g deux applications de E dans F . Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors si f et g sont continues, alors il en est de même pour $f + g$, $f \cdot g$ et $\lambda \cdot f$.

Le théorème suivant donne une caractérisation séquentielle de la continuité, c'est à dire une caractérisation de la continuité en termes de suites.

Théorème 9.3. $f : E \rightarrow F$ est continue ssi pour toute suite (x_n) dans E , si x_n converge vers un élément $x \in E$, alors $f(x_n)$ converge vers $f(x)$ dans F .



Explication en vidéo: [Cliquez ici](#)

10 Comment montrer qu'un ensemble est ouvert? ou fermé?

Une méthode pratique pour montrer qu'un ensemble est ouvert (resp. fermé), est de montrer qu'il est l'image réciproque d'un ouvert (resp. fermé) par une application continue.

Proposition 10.1. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, et $f : E \rightarrow E'$ une application. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

1. f est continue.
2. L'image réciproque par f de tout ouvert de E' est un ouvert de E .
3. L'image réciproque par f de tout fermé de E' est un fermé de E .

Exemples:

- L'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \sin(yz) \leq 0\}$ est un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^3 .
- L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + e^{xy^2} > 0\}$ est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 .
- Le graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ est un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^2 .

Explication en vidéo: [Cliquez ici](#)

11 Comment montrer qu'un ensemble n'est pas ouvert? ou pas fermé?

Dans cette séquence, on expose une méthode pratique pour montrer qu'un sous-ensemble d'un espace métrique n'est pas ouvert, ou qu'il n'est pas fermé. Cette méthode est basée sur la caractérisation séquentielle des fermés, c'est à dire la caractérisation des fermés en termes de suites convergentes:

Théorème 11.1 (Caractérisation séquentielle des fermés). *Soit (E, d) un espace métrique, et $A \subset E$. Alors A est un fermé de E si et seulement si pour toute suite $(a_n)_n$ d'éléments de E , si $(a_n)_n$ est convergente vers un élément $a \in E$, alors $a \in A$.*

Remarque 11.2. 1. Le théorème précédent ne dit pas que toute suite d'éléments de A est convergente. Il dit que si jamais elle converge, alors sa limite doit être dans A . Autrement dit, si A est fermé, on ne peut pas avoir une suite d'éléments de A qui converge vers un élément qui n'est pas dans A .

2. Pour montrer qu'un ensemble $A \subset E$ n'est pas fermé, il suffit de trouver une suite d'éléments de A qui converge vers un élément de $E \setminus A$.

Exemple: Dans l'espace vectoriel normé \mathbb{R}^2 , on considère l'ensemble A des points strictement au dessous de la parabole d'équation $y = x^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}.$$

Alors A n'est pas fermé dans E , car la suite $\left(0, -\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de A , qui converge vers le point $(0, 0)$, qui lui n'est pas dans A .

Le critère précédent permet aussi de montrer que qu'un ensemble n'est pas ouvert, en montrant que son complémentaire n'est pas fermé. On a alors le résultat suivant:

Remarque 11.3. Pour montrer qu'un ensemble $A \subset E$ n'est pas ouvert, il suffit de trouver une suite d'éléments de $E \setminus A$ qui converge vers un élément de A .

Exercice:

1. Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y - xy^2 + z = 0\}$. Alors A n'est pas un ouvert de \mathbb{R}^3 .
2. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy^2 < 0\}$. Alors A n'est pas un ouvert de \mathbb{R}^2 .
3. \mathbb{Q} n'est ni ouvert ni fermé de \mathbb{R} .

Explication en vidéo: [Cliquez ici](#)

12 Intérieur, adhérence, frontière et voisinages

Définition 12.1. Soit (E, d) un espace métrique, $a \in E$, et $A \subset E$.

- On dit que a est intérieur à A , ou que A est un voisinage de a si et seulement si $\exists r > 0$ t.q. $B(a, r) \subset A$
- On dit que a est adhérent à A si et seulement si $\forall r > 0, B(a, r) \cap A \neq \emptyset$

Terminologie et notations:

- L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle **l'intérieur de A** , et est noté par $\overset{\circ}{A}$.
- L'ensemble des points adhérents à A s'appelle **l'adhérence de A** , et est noté par \overline{A} .

- La **frontière** de A , notée par $Fr(A)$, est l'ensemble des points adhérents et non intérieurs à A .

Proposition 12.2. Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$.

- $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$
- $A = \overset{\circ}{A}$ si et seulement si A est ouvert
- $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x
- $A = \overline{A}$ si et seulement si A est fermé

Exercice: Trouver les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel normé \mathbb{R} :

1. $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$
2. $\overline{\mathbb{Z}}$
3. $\overset{\circ}{\mathbb{Q}}$
4. $\overline{\mathbb{Q}}$
5. $]a, b[$
6. $\overline{]a, b[}$

Explication en vidéo: [Cliquez ici](#)

13 Compacité

Définition 13.1. Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. On dit que A est **compact** si et seulement si toute suite d'éléments de A admet une sous suite qui converge dans A .

Remarque 13.2. Ceci revient à dire que toute suite d'éléments de A admet une valeur d'adhérence dans A

Exemples:

- Si A est fini, alors A est compact.
- \mathbb{R} n'est pas compact.
- Une partie non bornée d'un espace E n'est jamais compacte.
- Une partie non fermée d'un espace E n'est jamais compacte.
- $[0, 1[$ n'est pas compact.
- $[0, 1]$ est compact.
- Les compacts de \mathbb{R}^n sont les sous ensembles fermés bornés.

Explication en vidéo: [Cliquez ici](#)

14 Compacité: Théorèmes de Bolzano-Weierstrass et Heine-Borel

Théorème 14.1 (Bolzano-Weierstrass). *Une suite bornée de \mathbb{R} admet au moins une valeur d'adhérence.*

Corollaire 14.2. *Une suite bornée de \mathbb{K}^n admet au moins une valeur d'adhérence.*

Théorème 14.3 (Heine-Borel). *Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie, et $A \subset E$. Alors A est compact si et seulement si A est fermé borné.*

Explication en vidéo: [Cliquez ici](#)

15 Exercices: Compacité de $O_n(\mathbb{R})$, Densité de $GL_n(\mathbb{C})$

Montrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution en vidéo: [Cliquez ici](#)

16 Exercice: L'ensemble des matrices complexes diagonalisables est dense

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble $\Delta_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Que peut-on dire de $\Delta_n(\mathbb{R})$?

Solution en vidéo: [Cliquez ici](#)

17 Exercice: $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, $GL_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs, alors que $GL_n(\mathbb{C})$ l'est.

Explication en vidéo: [Cliquez ici](#)

18 Exercice: valeurs d'adhérence d'une suite dont le pas tend vers 0

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ est un intervalle de \mathbb{R} .

Solution en vidéo: [Cliquez ici](#)

19 Un théorème de point fixe

Soit K une partie compacte d'un espace métrique E , et $f : E \rightarrow E$ vérifiant

$$\forall x \neq y, d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe. Indication: considérer la fonction $g(x) := d(f(x), x)$
2. Soit $u_0 \in K$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers le point fixe de f .

20 Exercice: Adhérence dans un espace de suites

Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes muni de $\|\cdot\|_\infty$, et soit A le sous-ensemble des suites à support fini. Trouver l'intérieur et l'adhérence de A dans E .

21 Sous groupes de $(\mathbb{R}, +)$: soit discrets soit denses

Soit H un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$, $a = \inf\{H \cap \mathbb{R}^+_*\}$.

1. Si $a \neq 0$, montrer que $H = a\mathbb{Z}$
2. Si $a = 0$ montrer que H est dense dans \mathbb{R} .



22 Le noyau d'une forme linéaire discontinue est dense

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et $\varphi : E \rightarrow K$ une forme linéaire sur E .

1. Supposons que φ est continue. Montrer que $\text{Ker } \varphi$ est fermé dans E .
2. Supposons que φ est discontinue. Montrer que $\text{Ker } \varphi$ est dense dans E .

Explication en vidéo: Cliquez [ici](#)
