Théorèmes et principes généraux de résolution des circuits

Ce chapitre est consacré à l'étude des principes, lois et théorèmes qui permettent de déterminer les inconnues d'un réseau électrique, intensité des courants électriques dans ses branches ou tensions aux bornes de ses éléments constitutifs.

Définitions générales

Un **réseau** électrique est un ensemble de générateurs, récepteurs et résistances reliées entre eux et constituant un circuit fermé.
Un **nœud** est un point où se rejoignent au moins trois conducteurs.
Une **branche** est l'ensemble des éléments situés entre deux nœuds.
Une **maille** est un contour fermé constitué par un certain nombre de branches.

Exemple :

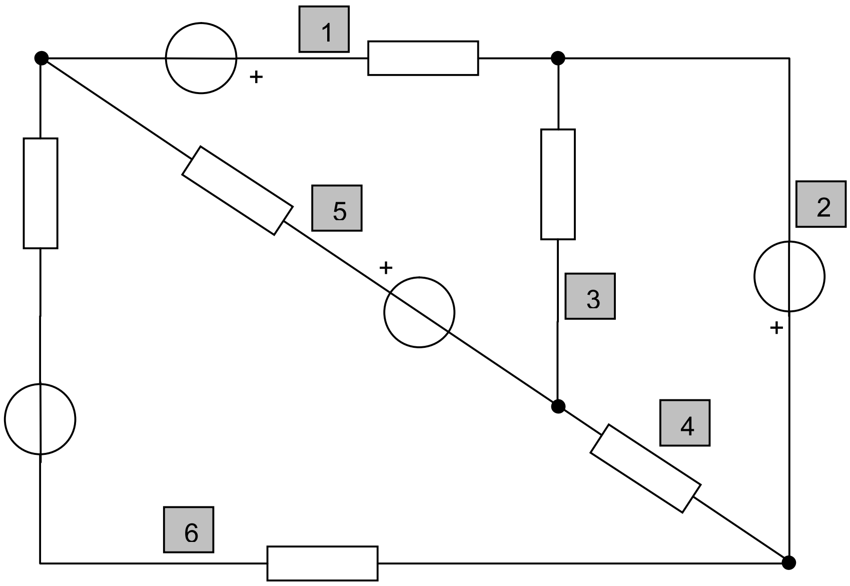
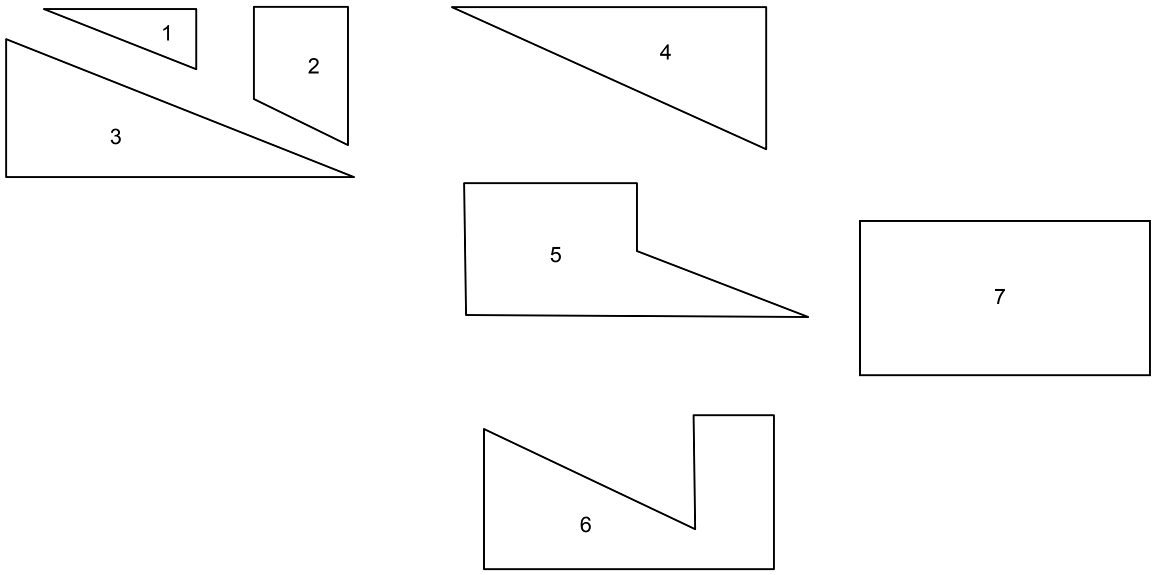


Figure 1

Le schéma de la Figure 1 comporte 4 nœuds : ● ; 6 branches indiquées par les carrés numérotés ; et 7 mailles :



Loi de Kirchhoff

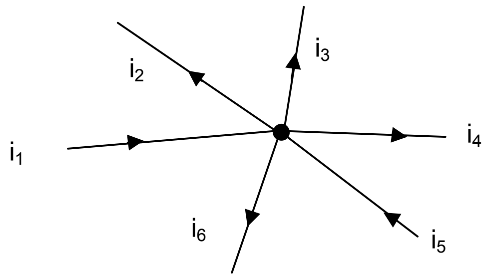
Les lois de Kirchhoff permettent d'écrire les équations permettant de calculer les courants dans les branches d'un circuit.

Première loi : loi des nœuds

La loi des nœuds exprime le fait que les charges électriques qui parcourent les conducteurs d'un réseau électrique ne peuvent pas s'accumuler dans les diverses connexions (nœuds) du réseau. Seul les condensateurs possèdent cette propriété de pouvoir emmagasiner des charges électriques.
Ainsi, la charge électrique qui arrive à un nœud à un instant t est égale à la charge qui part de ce nœud au même instant. Cette égalité entraîne l'égalité entre le débit de charge électrique qui arrive au nœud et celui qui quitte le nœud à chaque instant.

$$\boxed{\sum i_{\text{entrant}} = \sum i_{\text{sortant}}}$$

exemple :



$i_1 + i_5 = i_2 + i_3 + i_4 + i_6$

Figure 2

On peut affecter un signe aux différents courants, par exemple + pour les intensités qui se dirigent vers le nœud, - sinon et exprimer la loi des nœuds sous la forme : $\sum(\pm\, i) = 0$

Deuxième loi : loi des mailles

La loi des mailles exprime le fait que la d.d.p. entre deux points voisins d'un conducteur sans résistance est nulle, que l'on calcule cette d.d.p. sur le chemin le plus court ou bien en sommant les diverses d.d.p. le long d'une maille plus longue reliant ces deux points. Ceci est illustré par la Figure 3.

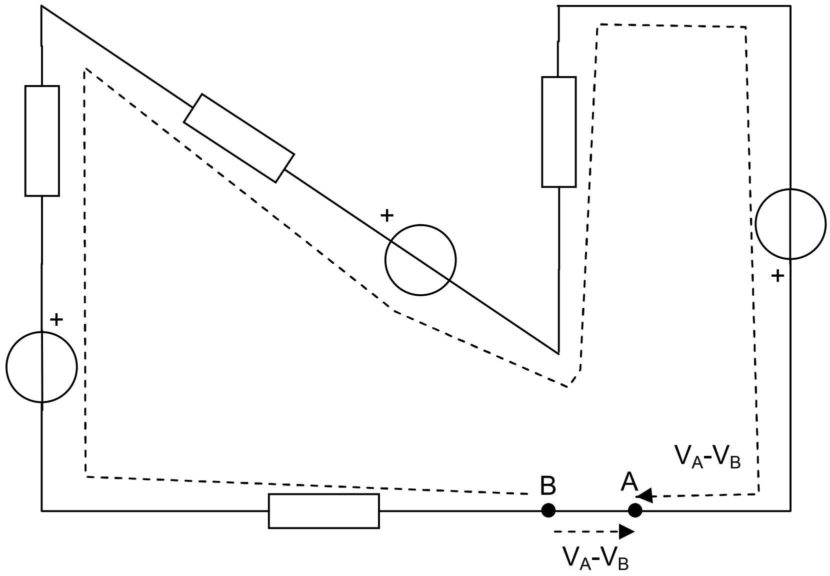


Figure 3

La somme algébrique des d.d.p. le long d'une maille est nulle.

On procède de la manière suivante pour écrire cette loi :

- On choisi le sens du courant dans chacune des branches de la maille, sens dicté par le sens physique soit par le hasard s'il est impossible de le deviner (sens du courant = flèche);
- aux bornes des différents dipôles, on place les flèches de d.d.p. (employer une couleur différente de celle du courant si possible) ;
- on choisit arbitrairement un sens de parcours sur cette maille (sens trigonométrique ou sens des aiguilles d'une montre) ;
- on choisit arbitrairement un point de départ sur la maille ;
- on effectue la somme algébrique de toutes les d.d.p. rencontrées en les affectant d'un signe + si elle sont dans le sens de progression, - sinon ;
- on arrête une fois revenu au point de départ et on écrit que cette somme est nulle.

Il peut être souhaitable d'employer de la couleur pour les différentes flèches, surtout si le schéma est complexe. Je recommande du vert ou du jaune pour les intensités et du rouge pour les d.d.p.

Exemple :

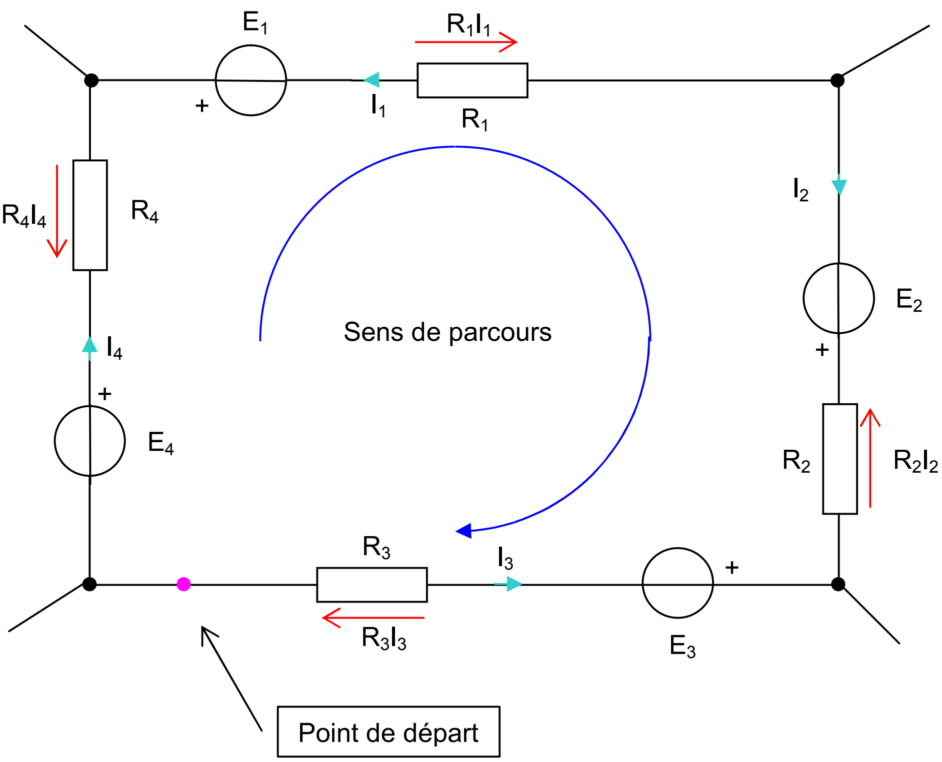


Figure 4

On obtient ici :
$E_4 - R_4I_4 - E_1 + R_1I_1 + E_2 - R_2I_2 - E_3 + R_3I_3 = 0$

Si on avait choisi le sens trigonométrique comme sens positif de parcourt, on aurait trouvé des d.d.p. de signe opposé ce qui donne la même équation :

$- E_4 + R_4I_4 + E_1 - R_1I_1 - E_2 + R_2I_2 + E_3 - R_3I_3 = - 0 = 0 \Leftrightarrow E_4 - R_4I_4 - E_1 + R_1I_1 + E_2 - R_2I_2 - E_3 + R_3I_3 = 0$

Mise en équation

Le réseau étudié sera éventuellement transformé de manière à ne comporter que des sources de tension.
Le réseau étudié comporte n branches ce qui donnent n inconnues : les intensités de chaque branche.
On écrit dans un premier temps les équations de nœuds. Si le réseau comporte m nœuds indépendants, on pourra écrire m – 1 équations de nœuds indépendantes.
Il restera ensuite à compléter ces équations par n – (m – 1) équations de maille de manière à former un système de n équations à n inconnues. Afin que les équations de maille soient indépendantes, il y a lieu de les construire en considérant des branches appartenant à deux mailles au plus.

Exemple :
Déterminons les intensités de chaque branche du schéma de la Figure 5

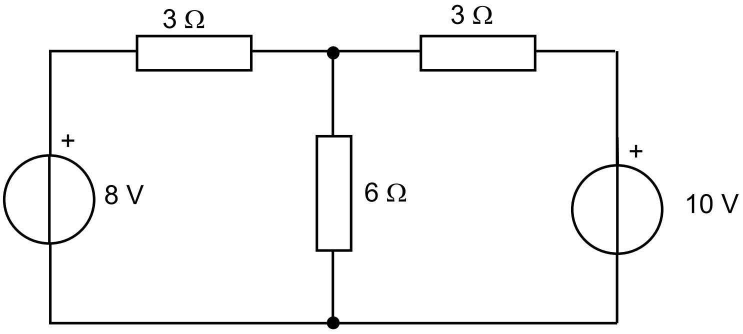


Figure 5

Le réseau de la Figure 5 comporte 3 branches, 2 nœuds et 3 mailles.
On écrira tout d'abord 2 – 1 équations de nœuds. Pour ce faire, il faut tout d'abord représenter les intensités dans les branches en dessinant une flèche. Nous la placerons dans le sens qui nous apparaîtra comme le plus probable, en sachant qu'en cas d'erreur de sens, le calcul nous donnera une intensité négative.

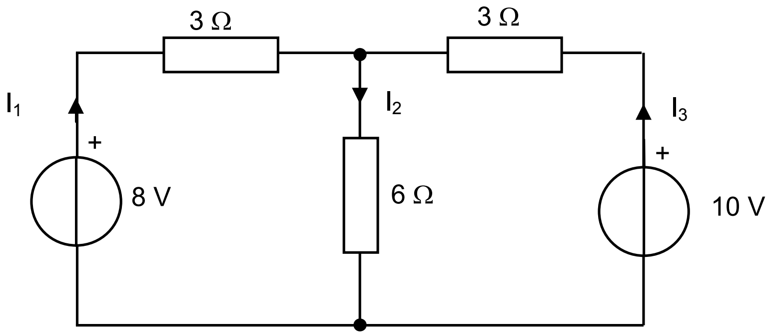


Figure 6

Le nœud supérieur de la Figure 6 donne :
$I_1 + I_3 = I_2$

Il reste à écrire 2 équations de maille de manière à former un système de 3 équations à 3 inconnus.

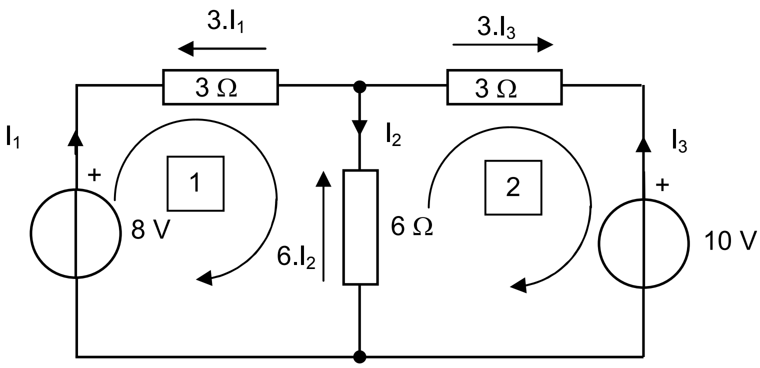


Figure 7

Maille $\boxed{1}$: $8-3I_1-6I_2=0$

Maille $\boxed{2}$: $6I_2+3I_3-10=0$

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} 8-3I_1-6I_2=0 \\ 6I_2+3I_3-10=0 \\ I_1+I_3=I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1=0,2667 \\ I_2=1,2000 \\ I_3=0,9333 \end{cases}$$

La résolution « à la main » ne pose pas de problème particulier tant que l'on a affaire à des systèmes 3x3 au maximum. A partir des systèmes 4x4, il est souhaitable d'utiliser des calculatrices permettant d'effectuer des opérations sur les matrices ou des logiciels de calcul (Mathematica, Mapple, Mathcad, Matlab ou autres).

$$\begin{cases} 8-3I_1-6I_2=0 \\ 6I_2+3I_3-10=0 \\ I_1+I_3=I_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3I_1+6I_2+0I_3=8 \\ 0I_1+6I_2+3I_3=10 \\ I_1-I_2+I_3=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow [A][I]=[B] \Rightarrow [I]=\frac{[B]}{[A]}=inv([A])[B]$$

Principe de superposition

Le principe de superposition tient dans la définition suivante :
Soit E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K. E $\rightarrow$ F est une application linéaire si
$\forall(x,y)\in E^2, \forall(\lambda,\mu)\in K^2 \Rightarrow f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$
Les dipôles que nous considérons dans ce traité d'« électricité linéaire » sont linéaires. Aussi, si nous multiplions la d.d.p. d'une source de tension ou le débit d'une source de courant par n, les effets seront multipliés par n. L'effet du à une « cause comprenant m générateur » est la somme des effets lorsque chaque générateur est présent seul. De manière plus explicite :

La d.d.p. aux bornes d'un élément dans un réseau comportant des sources (de tension ou de courant, indépendantes ou liées) est la somme des d.d.p. dues à chacune des sources indépendantes, agissant séparément.

L'intensité du courant électrique dans une branche quelconque d'un réseau comportant des sources (de tension ou de courant, indépendantes ou liées) est la somme des courants dus à chacune des sources indépendantes, agissant séparément.

En pratique, on « éteint » toutes les sources sauf une, on effectue le calcul de la d.d.p. ou de l'intensité et on recommence jusqu'à avoir obtenu la contribution de chacune des sources. Il ne reste plus, ensuite, qu'à en effectuer la somme algébrique. Attention : les sources liées ne s'éteignent pas.

Eteindre une source consiste à la remplacer par sa résistance interne. Ainsi, une source idéale de tension, de résistance interne nulle, est remplacée par un fil. Une source idéale de courant, de résistance interne infinie, sera remplacée par un interrupteur ouvert. Un moyen mnémotechnique simple consiste à enlever le rond des symboles afin de trouver par quoi remplacer la source éteinte.

Exemple : En utilisant le principe de superposition, déterminer I dans le circuit de la Figure 8 :

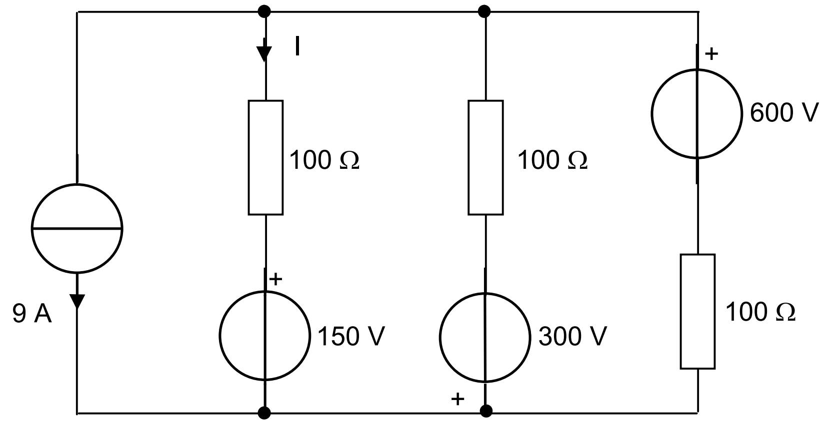


Figure 8

Nous allons redessiner le réseau en autant de dessin qu'il y a de sources. Sur chaque schéma, nous laisserons une seule source active et nous éteindrons les autres. Nous calculerons l'intensité I_k correspondant à chaque schéma et nous les sommerons ensuite.

Etape n°1 :

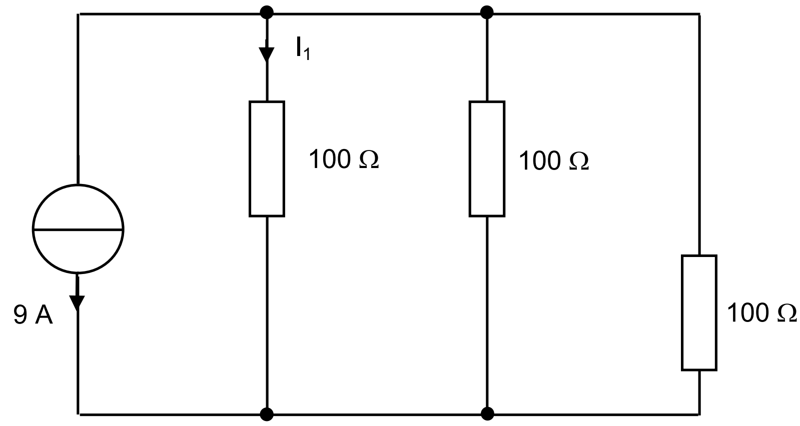


Figure 9

L'intensité débitée par le générateur idéal de courant se sépare en trois parties égales étant donné que les trois résistances ont même valeur. Dans chacune des résistances l'intensité circule du bas vers le haut. On a ainsi $I_1 = -9/3 = -3$ A.

Etape n°2 :

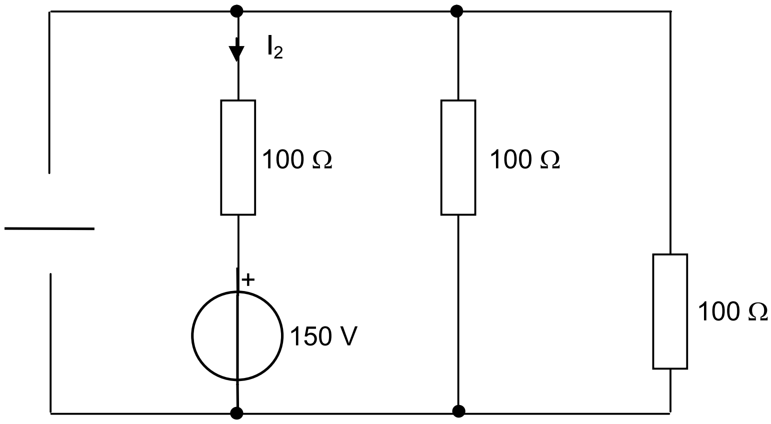


Figure 10

Le schéma de la Figure 10 se simplifie en remplaçant les deux résistances de droite par leur résistance équivalente et en supprimant la branche de gauche (celle du générateur de courant éteint). On obtient ainsi la Figure 11 :

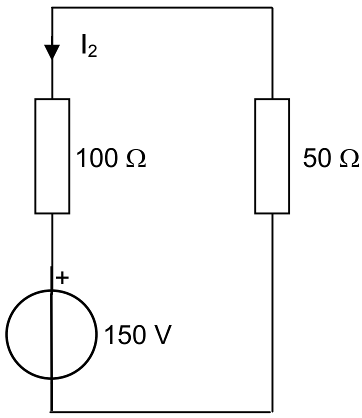


Figure 11

Ici aussi le sens de l'intensité est opposé à I_2, nous aurons donc une intensité négative.

I_2 = - 150/(100+50) = - 1 A

Etape n°3 :

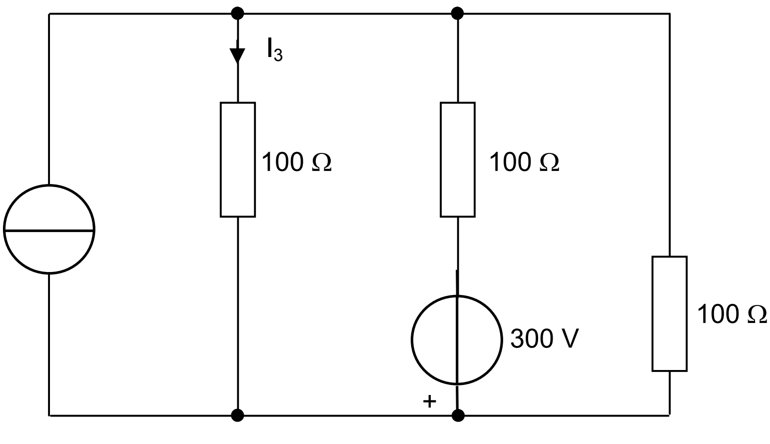


Figure 12

Nous ne simplifierons pas le schéma comme à l'étape n°2, en effet, si nous fusionnions les deux résistances de 100 Ω en une résistance équivalente, nous ne pourrions plus calculer I3 qui circule dans la résistance de 100 Ω de gauche. Nous n'effectuerons cette opération que pour calculer l'intensité débité par la source de tension de 300 V. Cette source débite dans la résistance de 100 Ω en série avec elle et dans les deux résistances de 100 Ω en parallèle, équivalentes à une résistance de 50 Ω. La source débite une intensité de 300/(100+50) = 2 A. Cette intensité se divise en deux parties égales circulant du bas vers le haut, en sens inverse par rapport au sens de I3.

Nous avons ainsi $I_3 = -1$ A.

Etape n°4 :

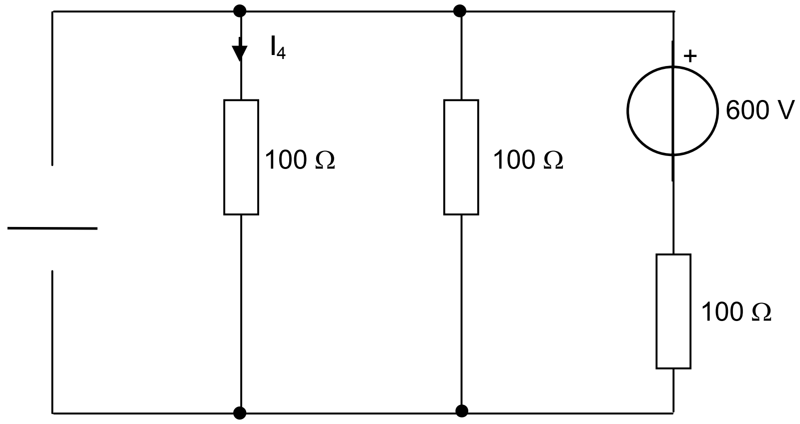


Figure 13

La source de tension débite une intensité de 600/(100+50) = 4 A. Cette intensité se divise en deux parties égales dans chacune des deux résistances de 100 Ω et circule du haut vers le bas.
Ainsi, $I_4 = 2$ A.

L'intensité I cherchée est la somme algébrique des intensités obtenues à chaque étape :

$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -3 - 1 - 1 + 2 = -3$ A.

Supposons que nous ayons dessiné la Figure 13, la Figure 12, la Figure 10 et la Figure 9 sur du papier calque, si nous superposons ces 4 schémas, nous retrouvons la Figure 8.

Gustav Robert Kirchhoff (1824 – 1887) était un physicien.
Il établit la loi des mailles (la loi des tensions de Kirchhoff) entre 1845 et 1846 alors qu'il était étudiant à Konigsberg.
En 1849, il inventa la loi des nœuds (la loi des courants de Kirchhoff).

Herman von Helmholtz (1821 - 1894) fut l'un des derniers universalistes de la science. Au cours de sa carrière, il a apporté des contributions fondamentales à l'optique , à l'acoustique, à l'hydrodynamique et à l'électromagnétisme. En 1853, alors qu'il était professeur de physiologie à l'université de Königsburg, il publia un article *sur quelques lois concernant la distribution de l'électricité , avec des applications aux expériences sur l'électricité animale*, dans lequel il établissait ce qui deviendrait plus tard le Théorème de Thevenin.

Léon Thévenin, ingénieur français (né à Meaux en 1857, mort à Paris en 1926). Diplômé de l'Ecole Polytechnique de Paris en 1876 (l'année de l'invention du téléphone par Bell), il entra en 1878 à la compagnie française des Postes et Télégraphes, où il fit toute sa carrière. En 1883, alors qu'il enseignait un cours pour les inspecteurs de la compagnie, il proposa ce que nous connaissons aujourd'hui sous le nom de théorème de Thévenin. Personne ne remarqua qu'il était établi depuis 1853. Bien qu'il fut publié dans plusieurs traités d'électricité, ce théorème resta d'ailleurs peu connu jusque dans les années 20.

Edward Lowry Norton, ingénieur américain (1898 - 1983). Après des études au MIT et à Columbia University, il entra aux Bell Labs et y fit toute sa carrière, jusqu'en 1963. Il y publia peu d'articles scientifiques, dont aucun ne mentionnant le théorème qui porte son nom. L'origine de l'appellation du théorème de Norton reste encore obscure aujourd'hui. L'idée originale date de 1926 et est due à Hans Ferdinand Mayer, physicien allemand (1885-1980), qui fut directeur des laboratoires de recherches de Siemens entre 1936 et 1962.

Théorème de Thévenin

Ce théorème est très utile pour déterminer l'intensité du courant circulant dans la branche d'un réseau lorsque l'on souhaite éviter la mise en équation complète du réseau comme nous l'avons vu avec les lois de Kirchhoff. Nous ne démontrerons pas ce théorème.

Théorème de Thevenin :
Tout réseau linéaire actif présentant des connexions de sortie A, B comme le montre la Figure 14 peut être remplacée par une source de tension idéale unique E_{th} en série avec une résistance R_{th} (éventuellement une impédance Z_{th}).

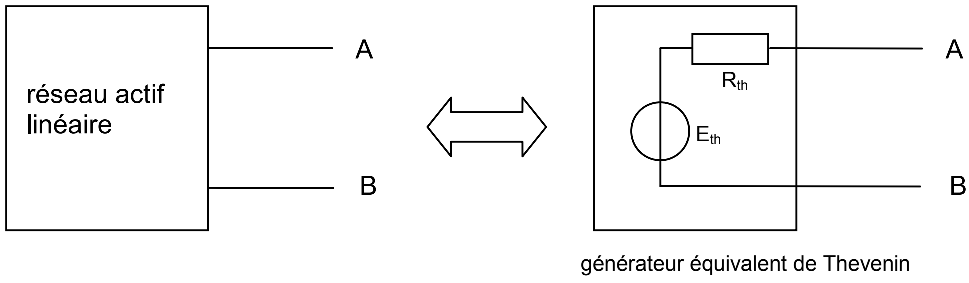
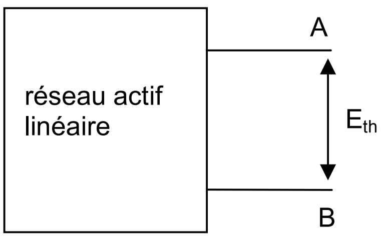


Figure 14

Méthode d'application du théorème de Thevenin

Calcul pratique du générateur équivalent :

Calcul de la valeur de E_{th} : c'est la d.d.p. qui apparaît à vide entre A et B.



Calcul de la résistance R_{th} (impédance Z_{th}) : on éteint toutes les sources et on calcule ou on mesure la résistance (l'impédance) entre A et B.

Le calcul de E_{th} et le calcul de R_{th} peuvent être effectué dans n'importe quel ordre.

Exemple 1

Dans le schéma de la Figure 15, calculons l'intensité **I** dans R = 2 Ω par la méthode de Thevenin.

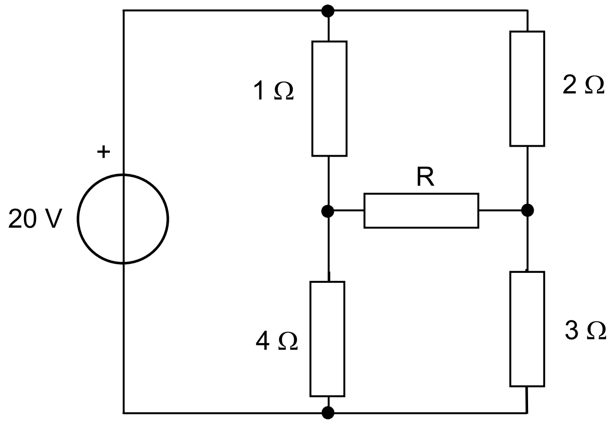


Figure 15

Le but est de remplacer le réseau aux bornes de R par un générateur équivalent de Thevenin.

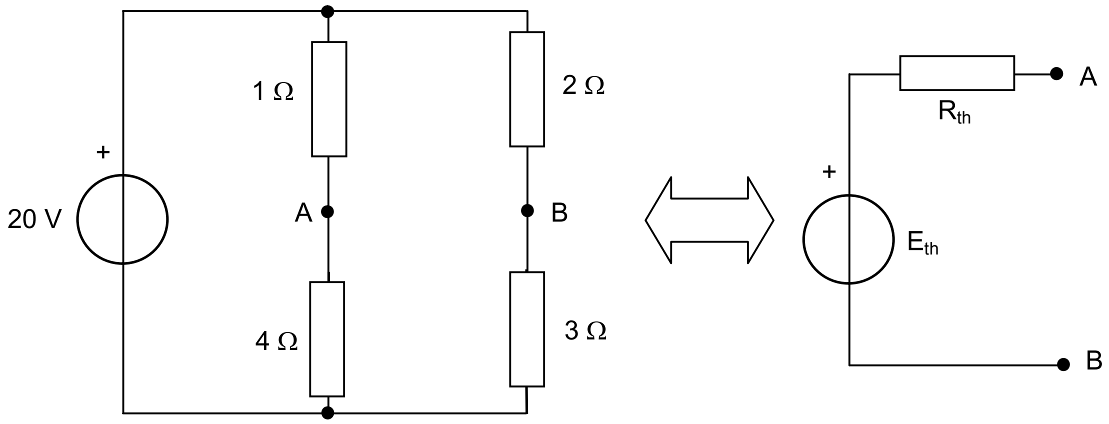


Figure 16

Calculons la résistance R_{th}. Pour cela, il faut éteindre la source de tension de f.é.m. 20 V, c'est-à-dire la remplacer par son impédance interne. Cette dernière est nulle puisqu'il s'agit d'une source de tension idéale. On calcule donc la résistance entre les points A et B sur le schéma de la Figure 17.

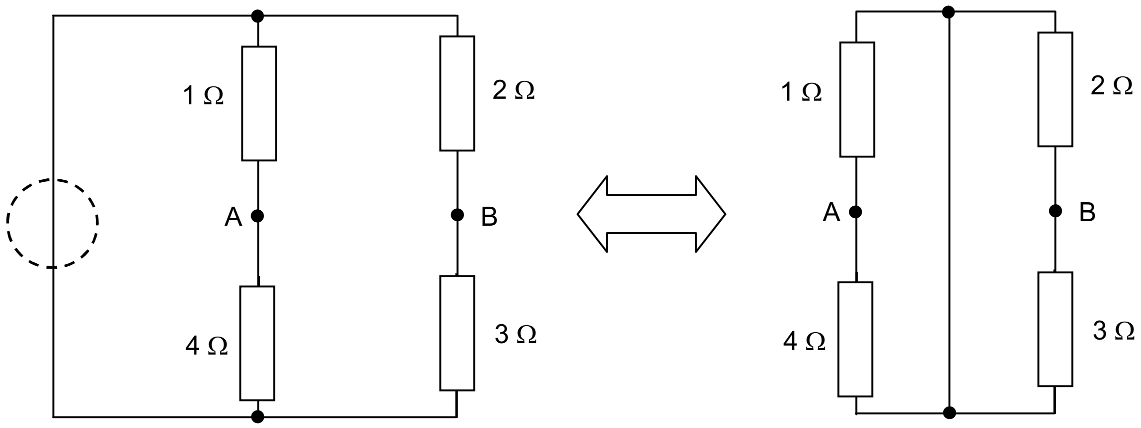
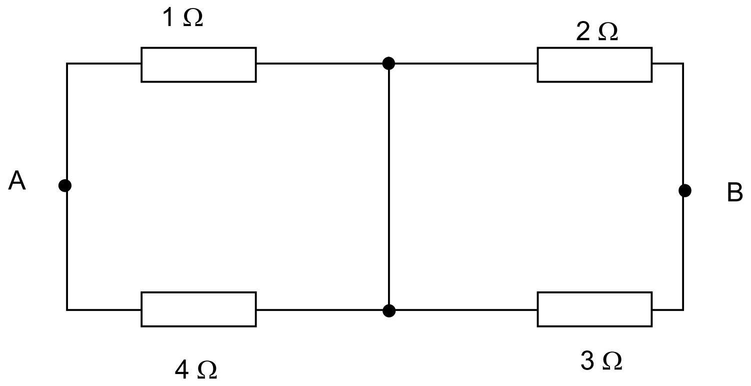
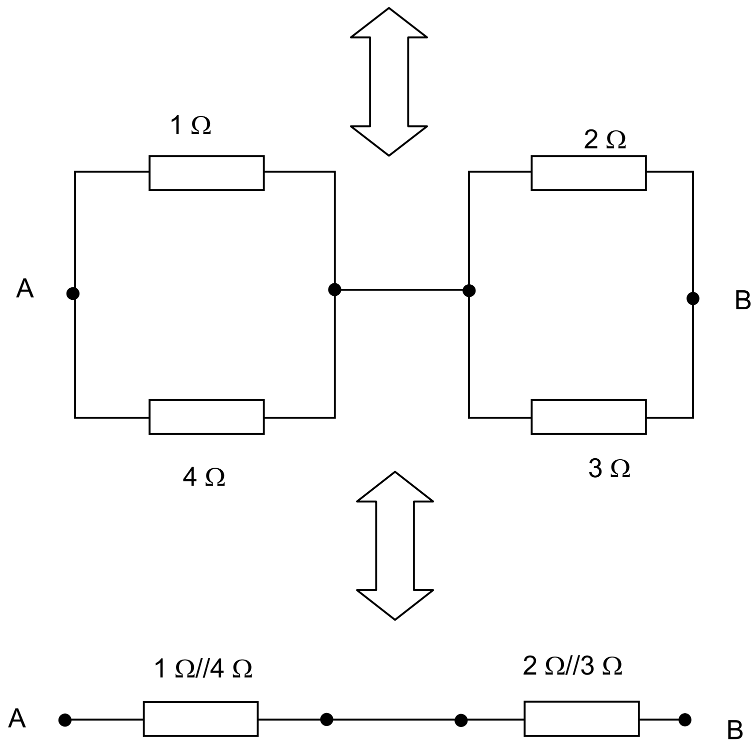


Figure 17

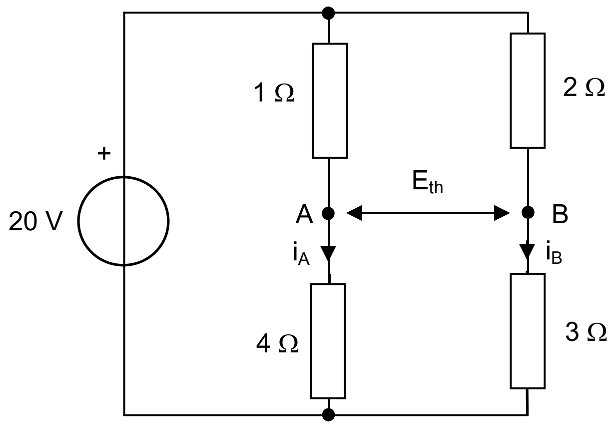

1 Ω
2 Ω
A
B
4 Ω
3 Ω



La résistance du générateur équivalent de Thevenin a donc pour valeur :

$$R_{th} = \frac{1 \times 4}{1+4} + \frac{2 \times 3}{2+3} = 2\ \Omega$$

Calculons E_{th} :



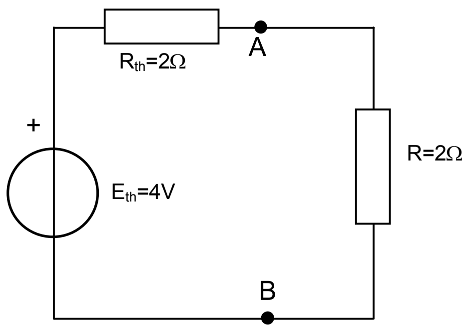
Nous allons calculer les intensités i_A et I_B puis les d.d.p. V_{CA} et V_{CB}. L'équation de la maille CAB permettra d'obtenir $V_{AB} = E_{th}$.

$$i_A = \frac{20}{1+4} = 4 \text{ A} \Rightarrow \text{V}_{\text{CA}} = 1 \times 4 = 4 \text{ V}$$

$$i_B = \frac{20}{2+3} = 4 \text{ A} \Rightarrow \text{V}_{\text{CB}} = 2 \times 4 = 8 \text{ V}$$

$$V_{CA} + V_{AB} + V_{BC} = 0 \Rightarrow V_{AB} = -\left(V_{BC} + V_{CA}\right) = -\left(-8+4\right) = 4 \text{ V}$$

Donc, E_{th} = 4 V.
On peut donc redessiner le circuit initial en remplaçant le pont de Wheastone par le générateur de Thevenin :

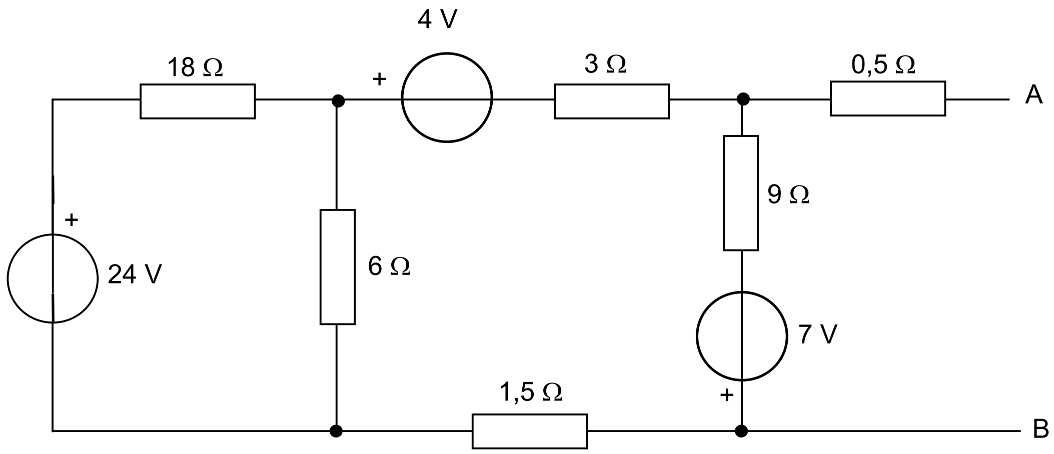


ATTENTION : Le pôle + est tourné vers A car A est positif par rapport à B : $V_{AB} > 0$.

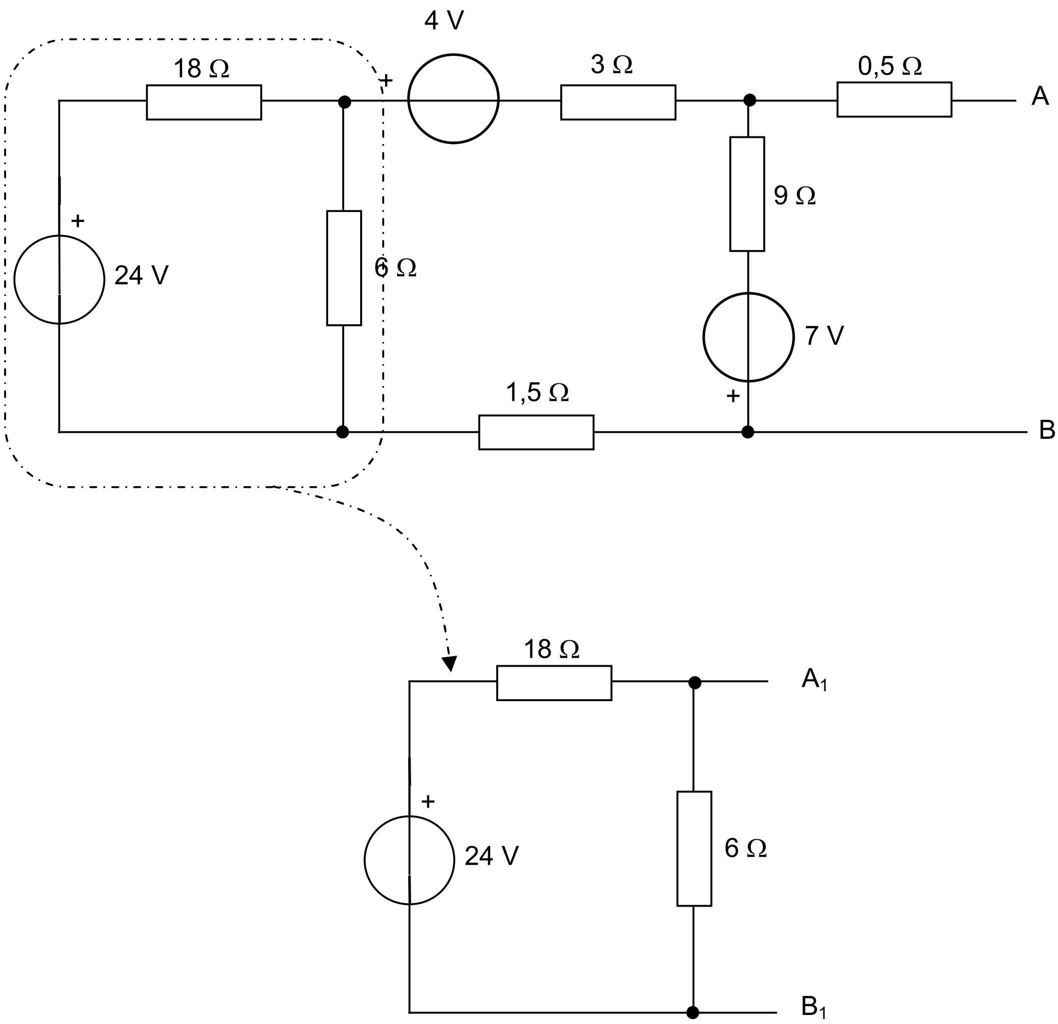
Le calcul de l'intensité qui passe dans la résistance est devenu très simple : $i = \frac{4}{2+2} = 1 \text{ A}$

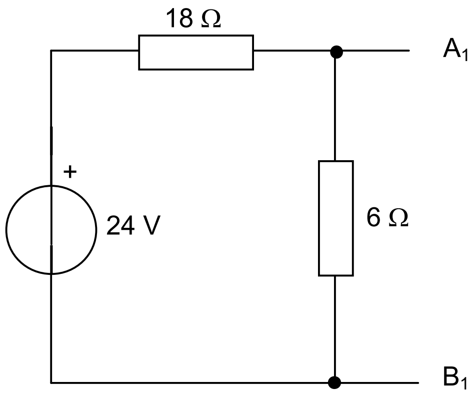
Exemple 2 :

Déterminer le générateur de Thevenin équivalent au schéma ci-dessous vu des bornes A et B :



On recherche la maille la plus éloignée des points A et B, puis on remplace cette maille par un générateur de Thevenin "intermédiaire". On réitère ensuite l'opération, progressant ainsi de proche en proche vers les points A et B.



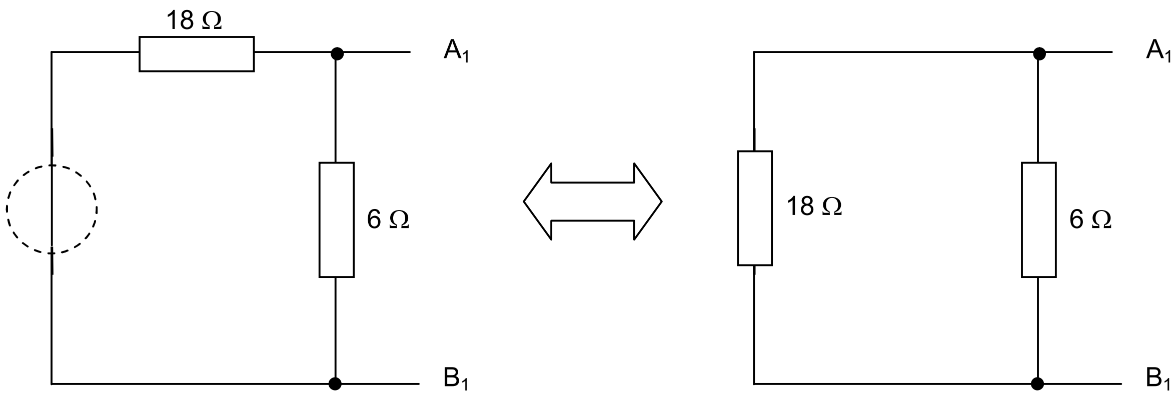


Déterminons le générateur équivalent de Thevenin entre A_1 et B_1 :

La f.é.m. s'obtient avec la formule du diviseur de tension

$$E_{ThA_1B_1} = 24 \cdot \frac{6}{18+6} = \frac{24}{3} = 6 \text{ V}$$

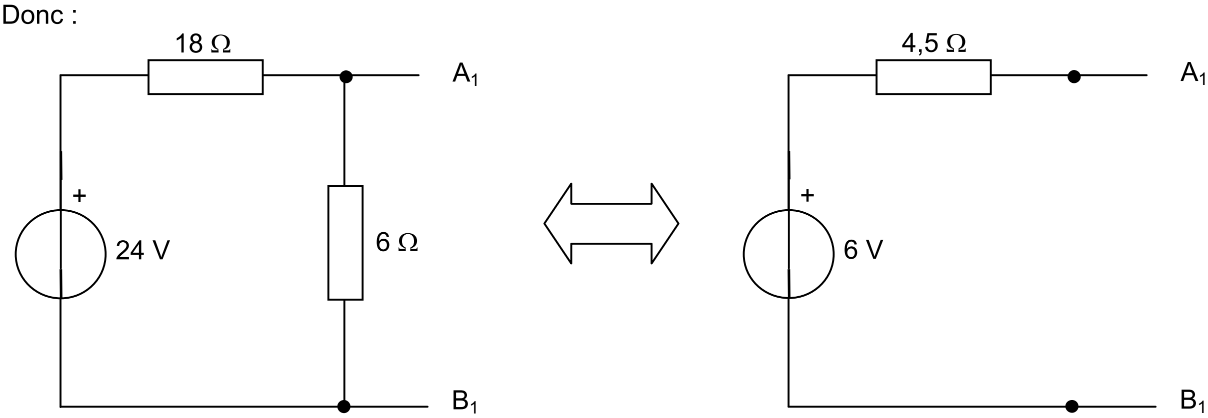
La résistance s'obtient en éteignant la source de tension de f.é.m. 24 V et en calculant la résistance vu des points A_1 et B_1.



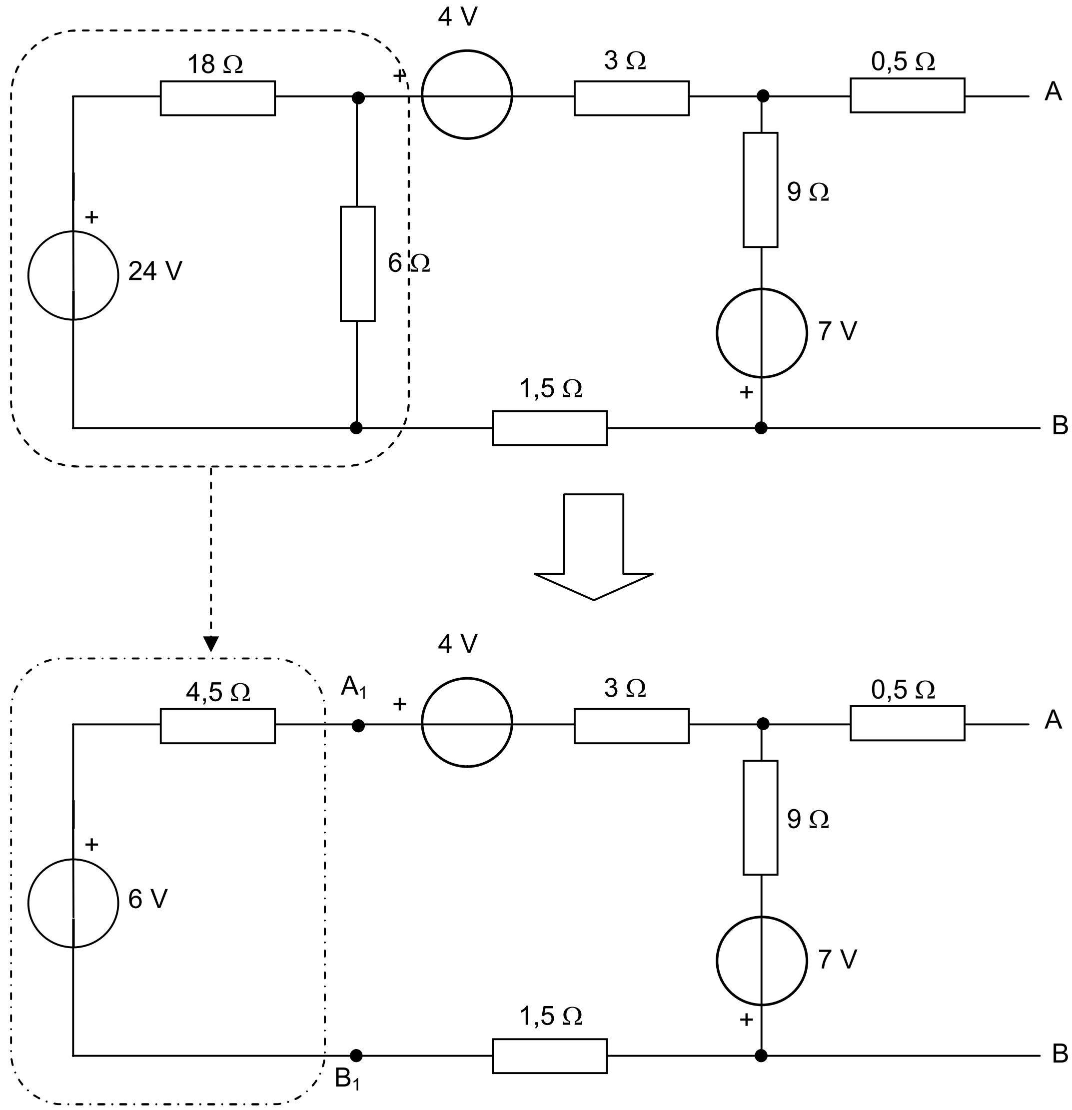
La résistance interne du générateur équivalent de Thevenin n°1 est donc

$$R_{eq} = \frac{6 \times 18}{6+18} = 4,5 \ \Omega$$

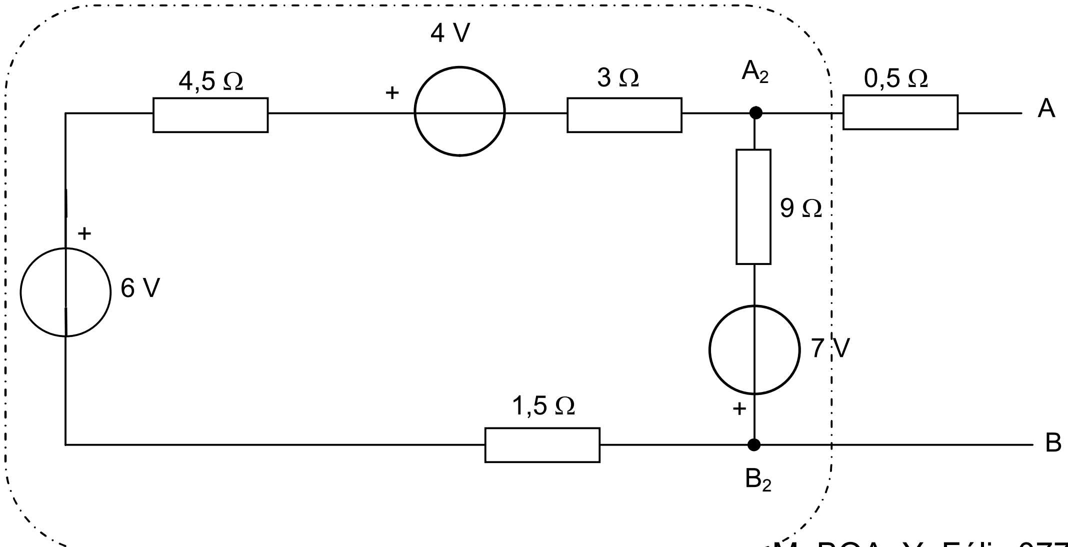
Donc :



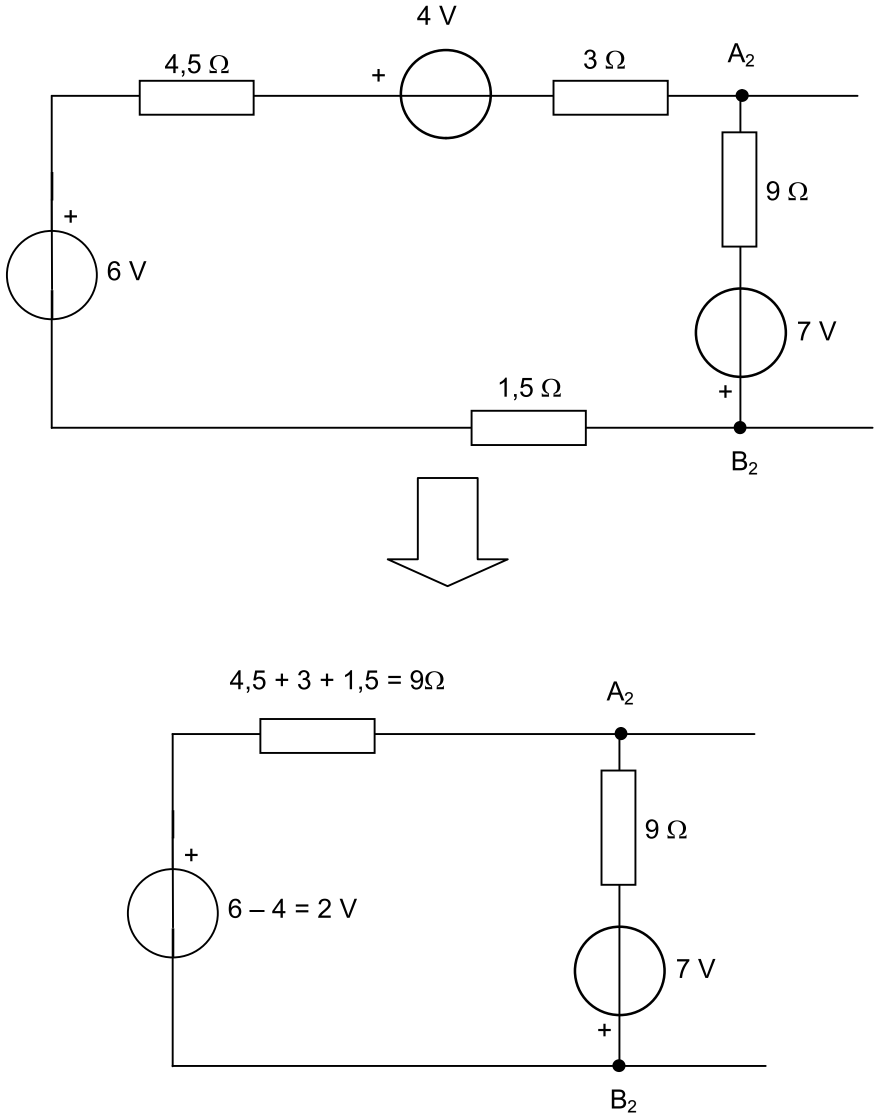
On remplace la maille par le générateur de Thevenin calculé :



On réitère le procédé, c'est-à-dire que l'on cherche à nouveau la maille la plus éloignée des points A et B, puis on remplacera cette maille par un générateur équivalent de Thevenin (indice 2).

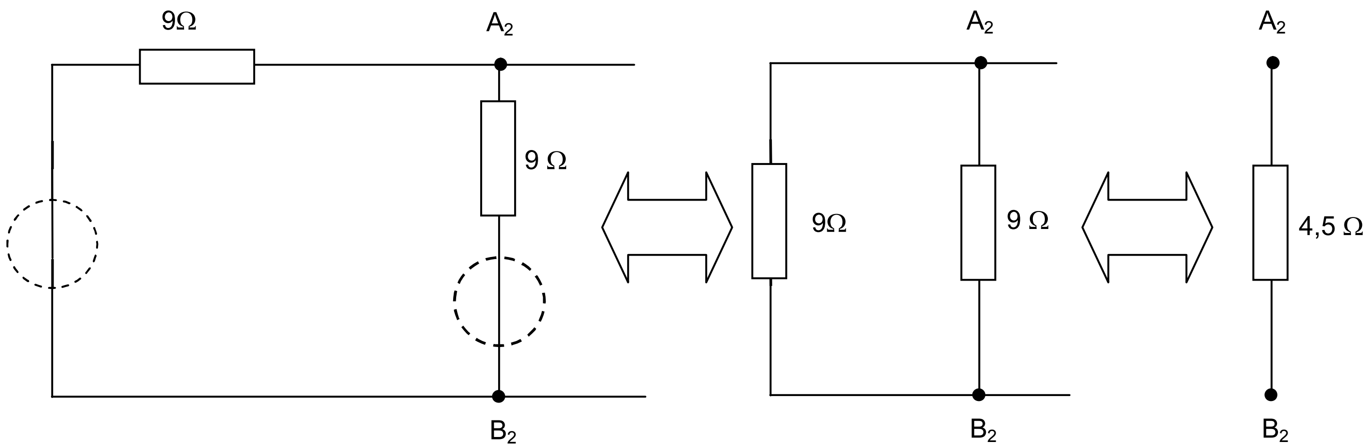


Simplifions la maille trouvée en regroupant dans chacune des deux branches les résistances et les générateurs.

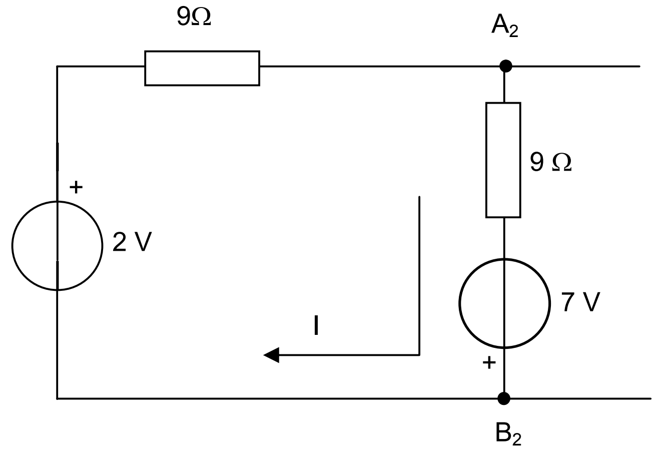


Déterminons la résistance interne du générateur de Thevenin n°2 :

Eteignons les sources de tension :



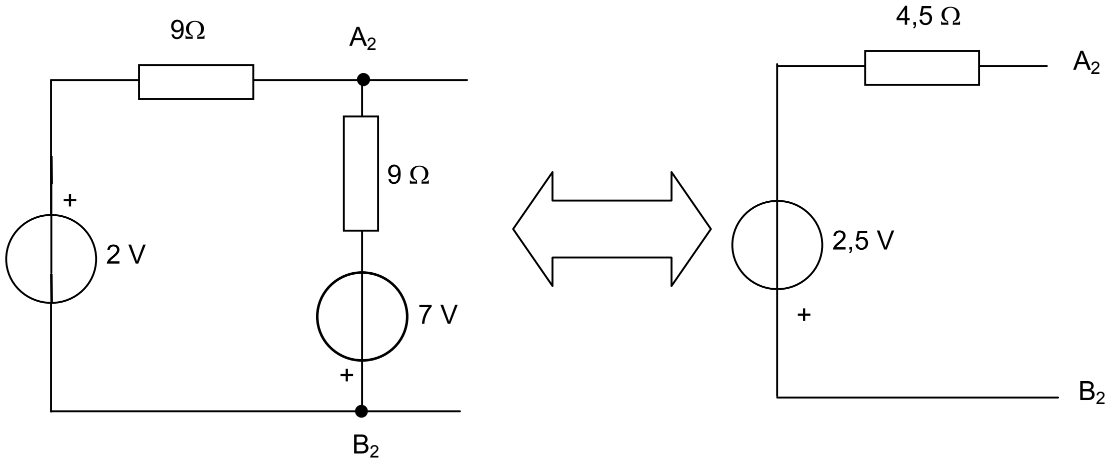
Déterminons la f.é.m. équivalente du générateur de Thevenin n°2 :



L'équation de la maille permet de déterminer **I** : $I = \dfrac{7+2}{9+9} = \dfrac{9}{18} = 0,5 \text{ A}$

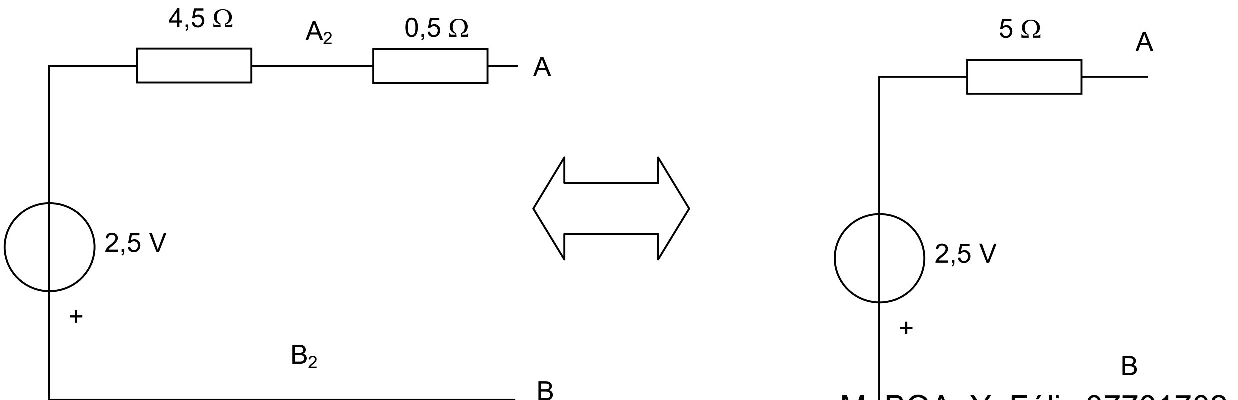
$E_{ThA_2B_2} = V_{A_2} - V_{B_2} = 9 \times I - 7 = -2,5 \text{ V}$

Donc :



Attention : le signe moins trouvé pour $E_{ThA_2B_2} = V_{A_2} - V_{B_2}$ signifie que le point B_2 est à un potentiel plus élevé que A_2. Ainsi nous portons le signe plus sur B_2.

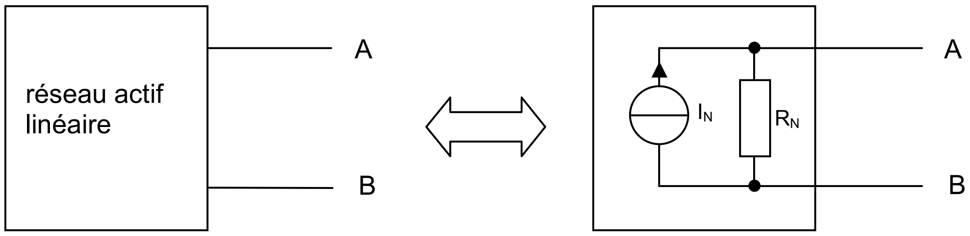
Il reste à connecter la résistance de 0,5 Ω, ce qui nous donne finalement :



Théorème de Norton

Il est moins utilisé que celui de Thevenin, sans doute parce que la notion de source de courant est plus abstraite que celle de source de tension. Il permet également de simplifier les circuits, notamment en électronique. Nous ne démontrerons pas ce théorème.

Théorème de Norton :
Tout réseau linéaire actif présentant des connexions de sortie A, B comme le montre la Figure 18 **peut être remplacée par une source de courant idéale unique débitant l'intensité I_N en parallèle avec une résistance R_N (éventuellement une impédance Z_N).**



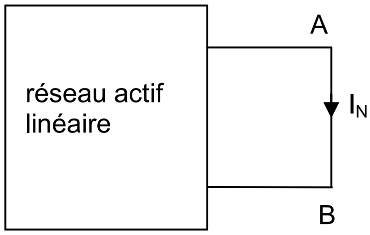
générateur équivalent de Norton

Figure 18

Méthode d'application du théorème de Norton

Calcul pratique du générateur équivalent :

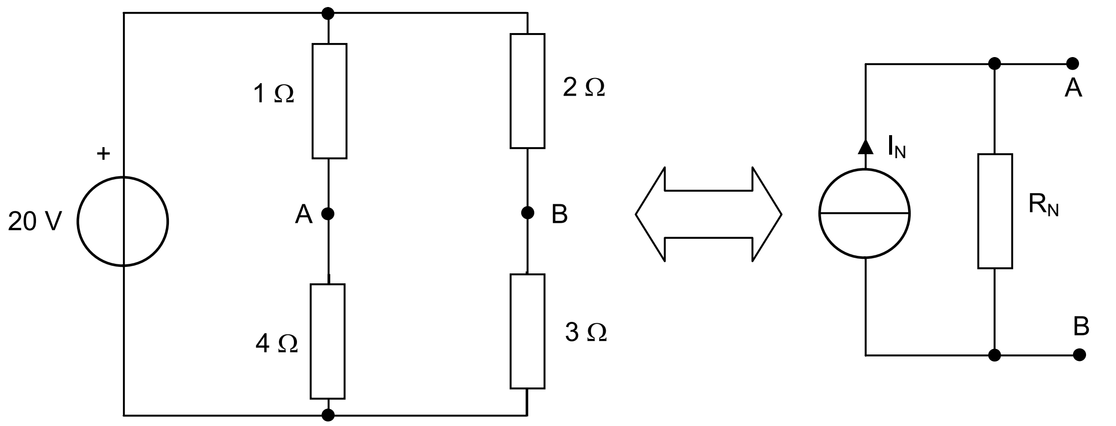
Calcul de la valeur de I_N : c'est l'intensité qui parcourt un court-circuit placé entre A et B.



Calcul de la résistance R_N (impédance Z_N) : on éteint toutes les sources et on calcule ou on mesure la résistance (l'impédance) entre A et B.

Le calcul de I_N et le calcul de R_N peuvent être effectué dans n'importe quel ordre.

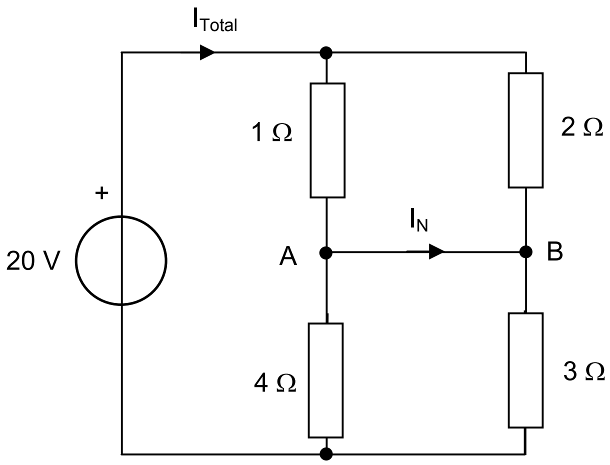
Exemple



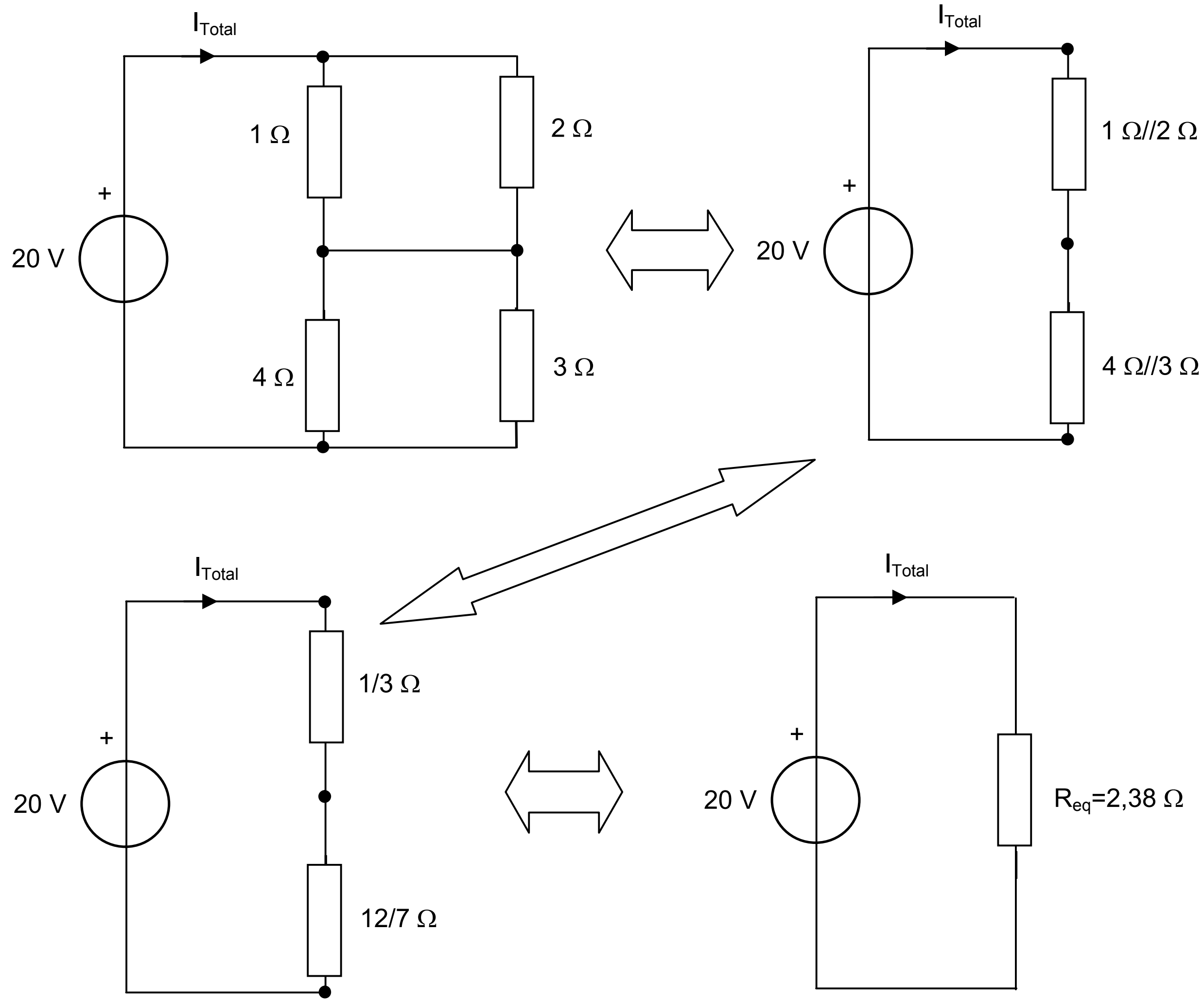
Nous reprenons le même exemple d'application que pour le théorème de Thevenin, à savoir la détermination de l'intensité dans la résistance R = 2 Ω sur le schéma de la Figure 15.

La méthode de détermination de la résistance R_N est la même que celle de R_{Th} , on obtient donc : $R_{Th} = R_N = 2\ \Omega$

Détermination de I_N :

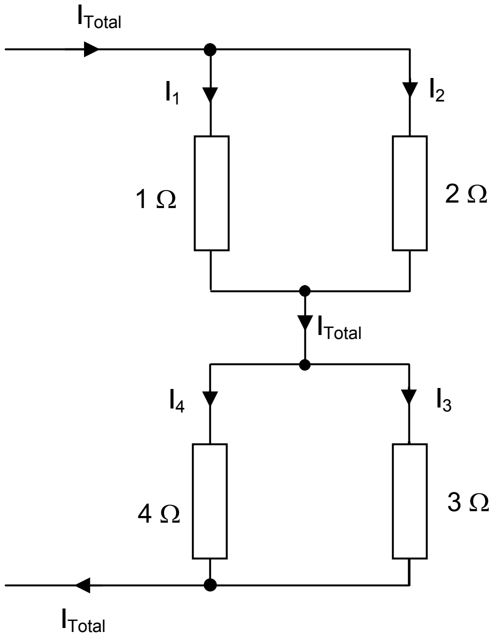


Calculons I_{Total} :



$$R_{eq}=\frac{2}{3}+\frac{12}{7}=\frac{50}{21}\simeq 2,28\ \Omega \Rightarrow I_{Total}=\frac{20}{\frac{50}{21}}=\frac{42}{5}\simeq 8,4\ \text{A}$$

I_{Total} se sépare dans deux diviseurs de courant successifs : 1Ω et 2Ω, puis 3Ω et 4Ω.



Dans 1Ω : on a $I_1 = \frac{42}{5} \times \frac{2}{1+2} = \frac{84}{15}$ A

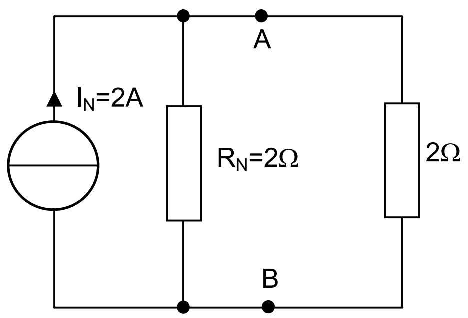
Dans 2Ω : on a $I_2 = \frac{42}{5} \times \frac{1}{1+2} = \frac{42}{15}$ A

Dans 3Ω : on a $I_3 = \frac{42}{5} \times \frac{4}{3+4} = \frac{168}{35}$ A

Dans 4Ω : on a $I_4 = \frac{42}{5} \times \frac{3}{3+4} = \frac{126}{35}$ A

D'où $I_N = I_3 - I_2 = \frac{168}{35} - \frac{42}{15} = 2 \text{ A} \left(= I_1 - I_4\right)$

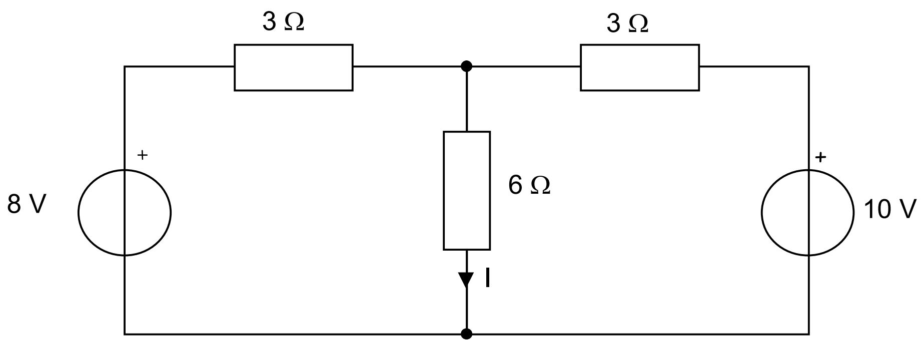
On aboutit au schéma simplifié comprenant le générateur équivalent de Norton :



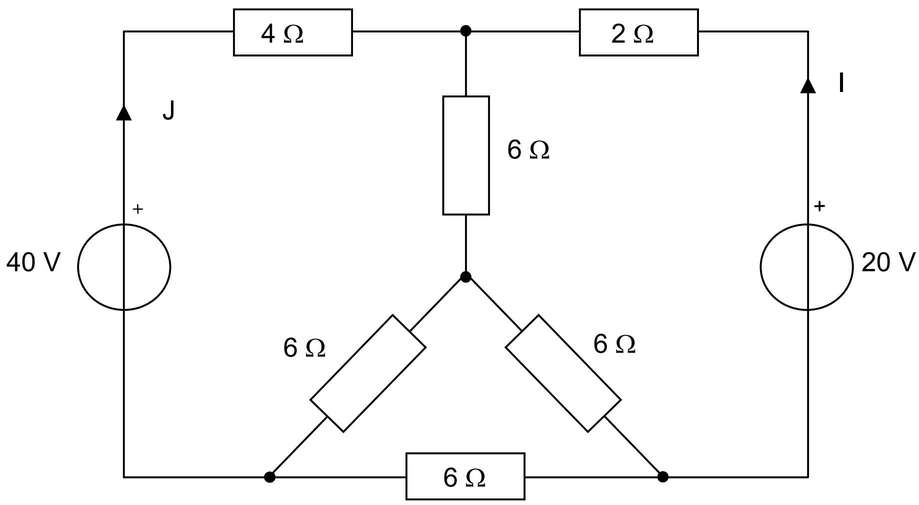
R_N et la résistance de 2Ω constituent un diviseur de courant pour I_N. Etant donné qu'elles ont même valeur, I_N sera divisé par deux. Par conséquent, l'intensité qui passe dans la résistance de 2Ω est de 1A.

Exercices :

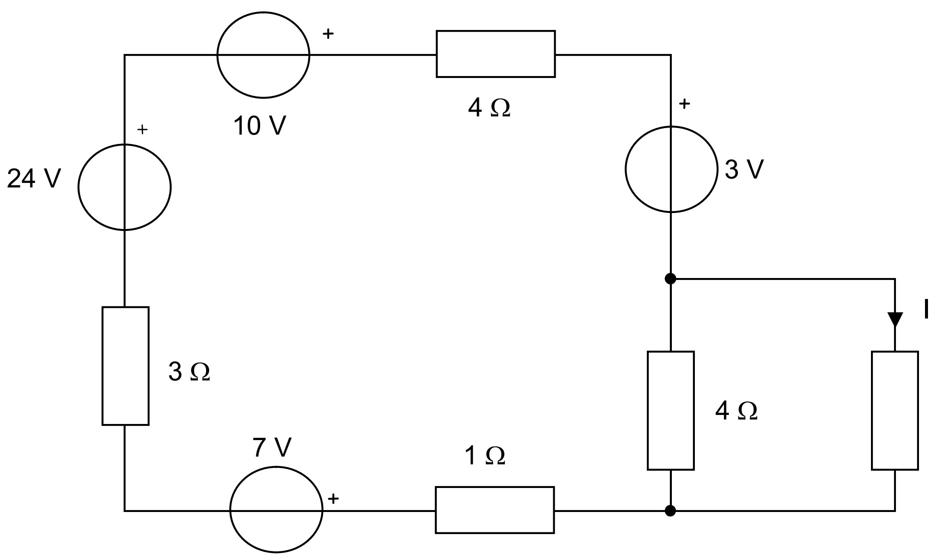
1. Déterminer I par la méthode de Kirchhoff, par l'emploi du principe de superposition, par l'usage des théorèmes de Thevenin et de Norton.



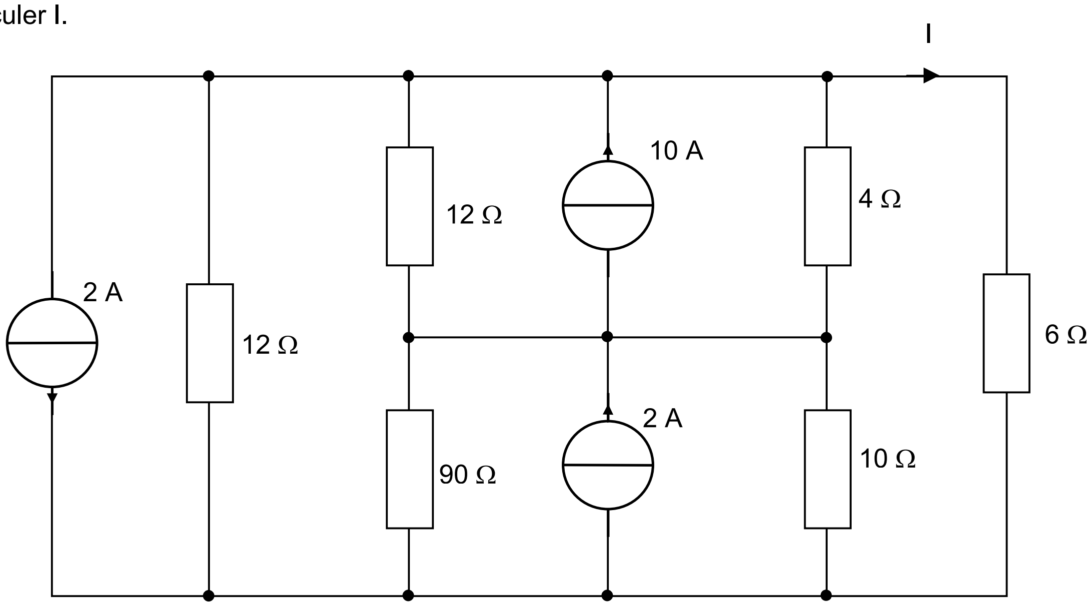
2. Déterminer I et J par la méthode de Kirchhoff.



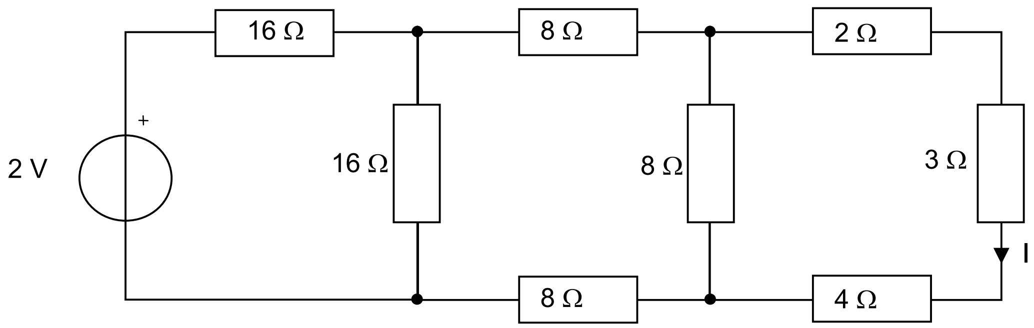
3. Calculez I.



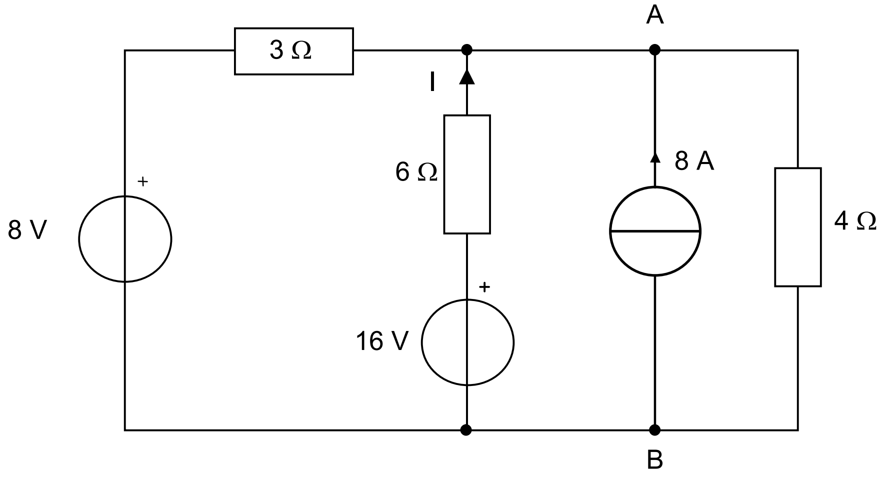
4. Calculer I.



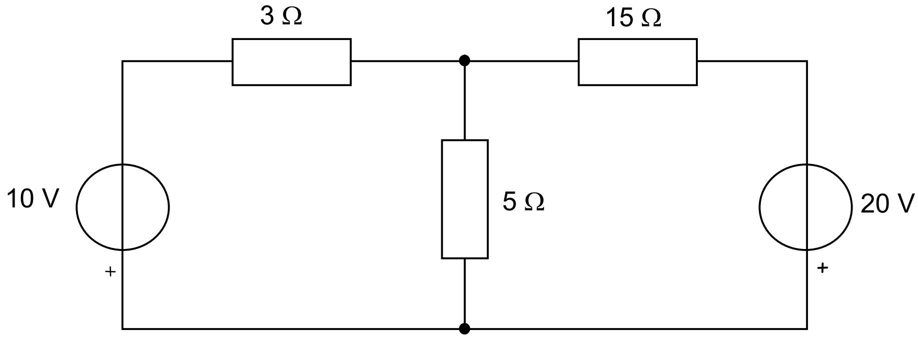
5. Calculer I par le théorème de Thevenin ou de Norton. En déduire le courant dans chaque branche.



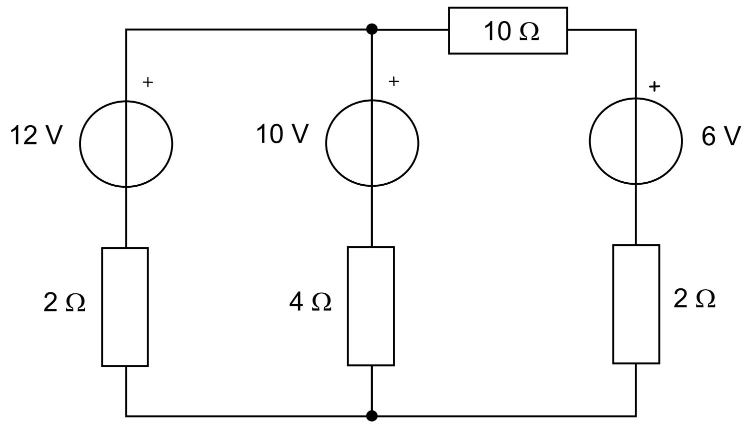
6. Calculer I par le principe de superposition, puis simplifier le schéma à gauche des points A et B.



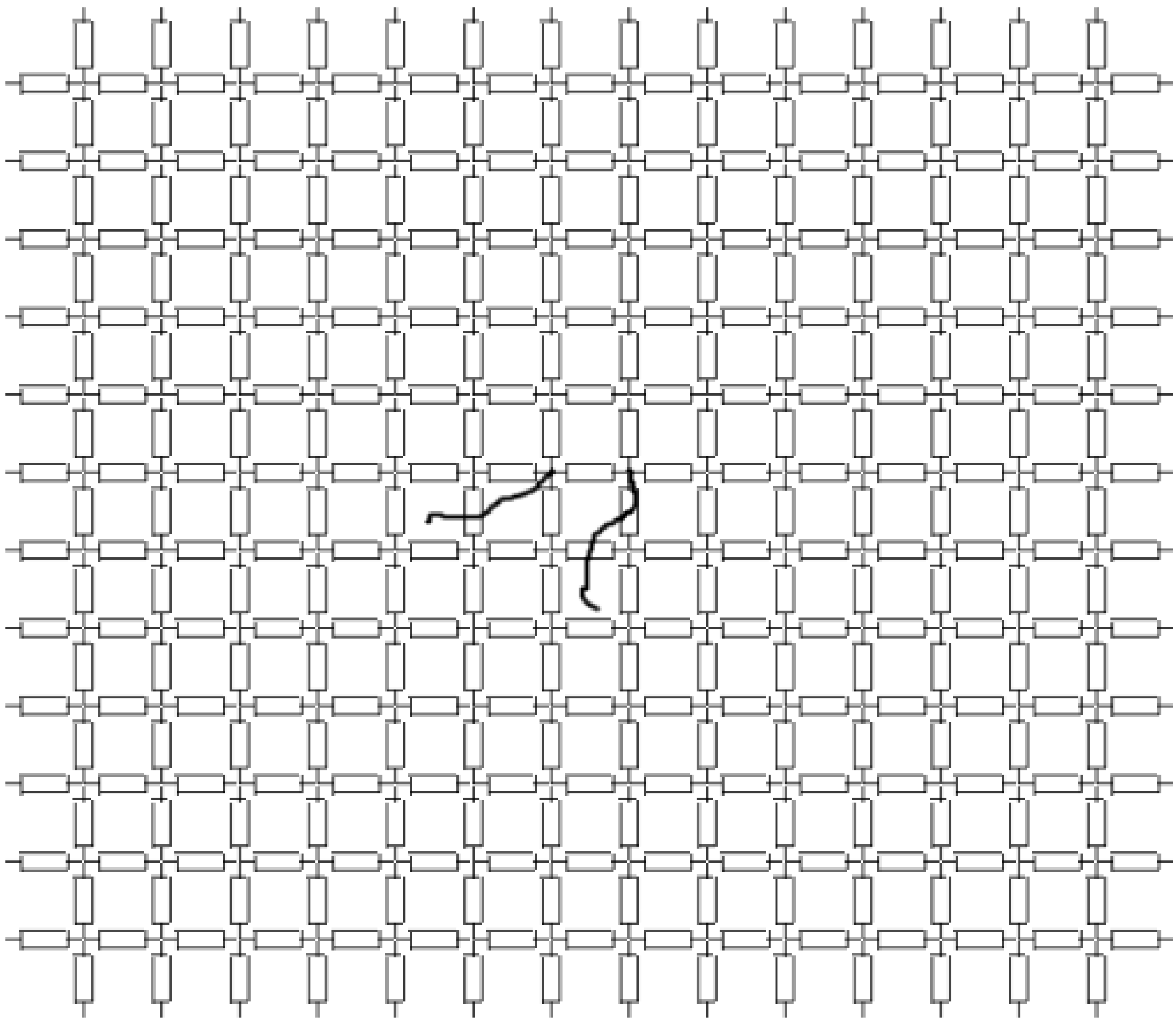
7. Par la méthode de votre choix, calculer les courants dans chacune des trois branches.



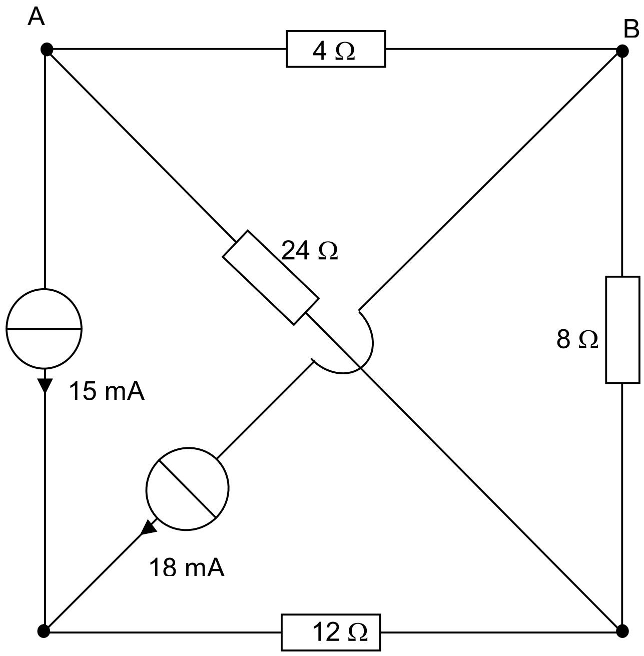
8. Calculer les courants dans chacune des trois branches.



9. On réalise, à l'aide de résistances identiques de R, une grille quadrilatère s'étendant à l'infini. Quelle résistance mesure-t-on entre deux fils placés aux bornes d'une résistance ?



10. Calculez la différence de potentiel V_{AB}, dans le schéma ci-dessous.



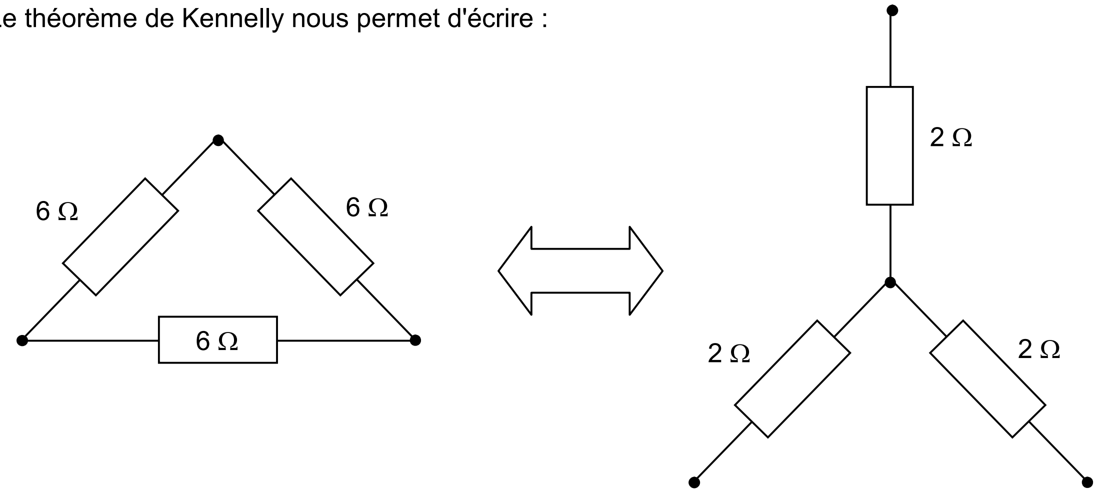
Solutions

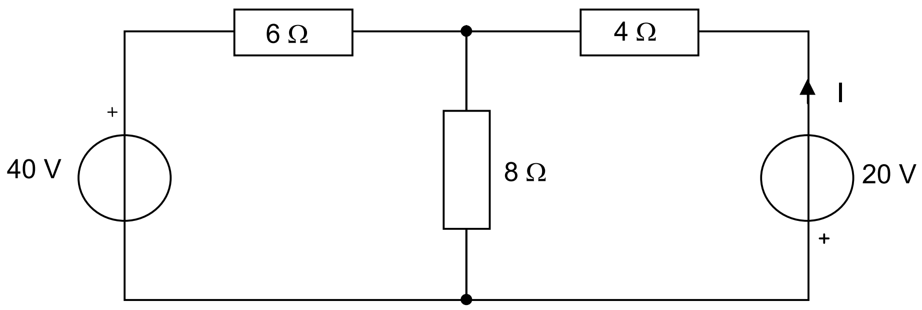
1. $\begin{cases} 8-3I-6(I+J)=0 \\ 10-3J-6(I+J)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9I+6J=8 \\ 6I+9J=10 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 45 \quad \Delta I = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} = 32 \quad \Delta J = \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 42$

$I = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$ A , $J = \frac{42}{45} = \frac{14}{15}$ A , $I+J = \frac{4+14}{15} = \frac{18}{15} = 1{,}2$ A

2.Le théorème de Kennelly nous permet d'écrire :



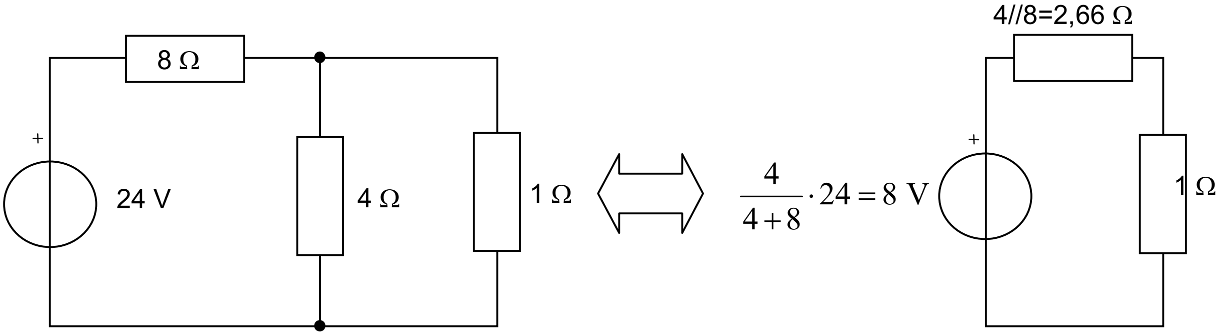


$\begin{cases} 40-6J-8(I+J)=0 \\ 20-4I-8(I+J)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8I+14J=40 \\ 12I+8J=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4I+7J=20 \\ 3I+2J=5 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13$, $\Delta I = \begin{vmatrix} 20 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 5$, $\Delta J = \begin{vmatrix} 4 & 20 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -40$

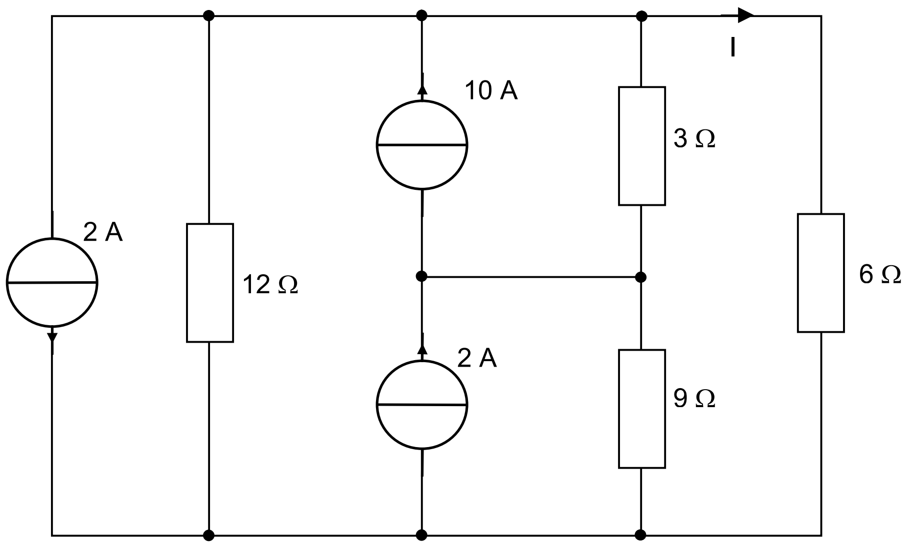
$I = -\frac{5}{13}$ A , $J = \frac{40}{13}$ A , $I+J = \frac{35}{13}$ A

3.

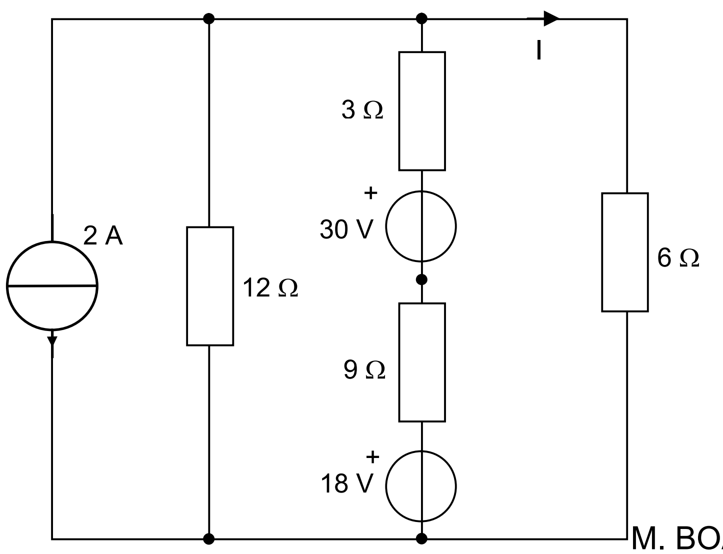


$$\Rightarrow I = \frac{8}{1+\frac{8}{3}} = \frac{8}{11}\times 3 = \frac{24}{11}\ \text{A}$$

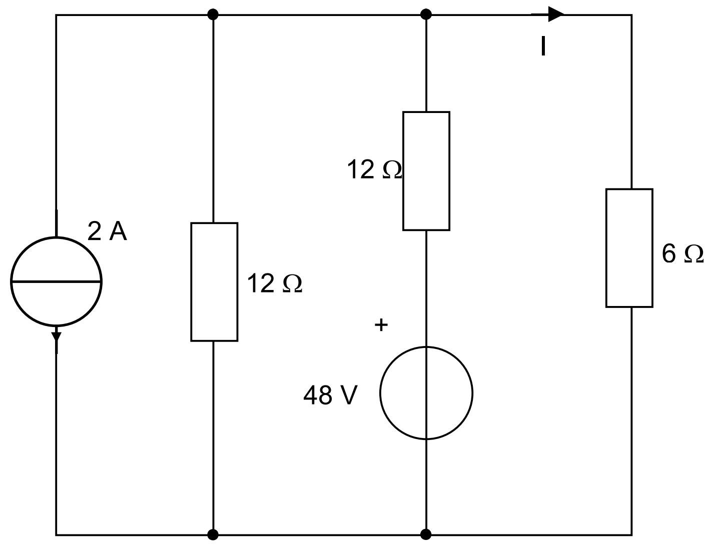
4. Lors d'une première étape, on regroupe les résistances de 12 et 4 Ω en parallèle entre elles et en parallèle avec le générateur de courant de 10 A. On les remplace par une résistance de 3 Ω. On effectue la même substitution pour les résistances de 90 et 10 Ω que l'on remplace par une résistance de 9 Ω. On obtient le schéma ci-dessous :



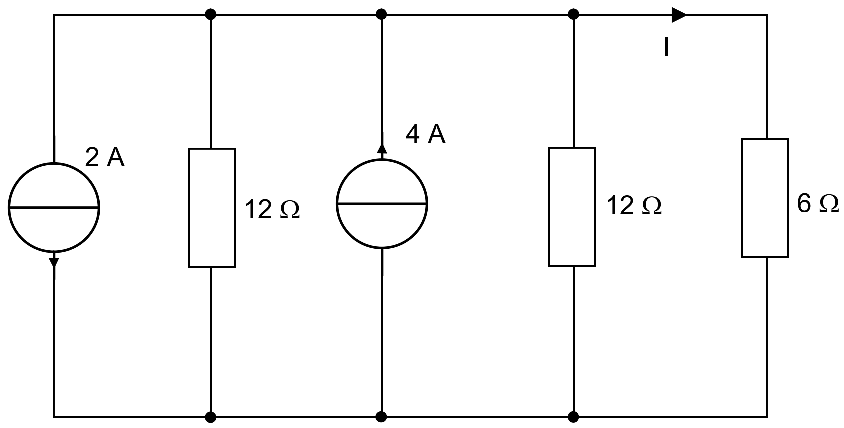
On remplace ensuite les générateurs de courant par leur équivalent sous forme de générateur de tension :



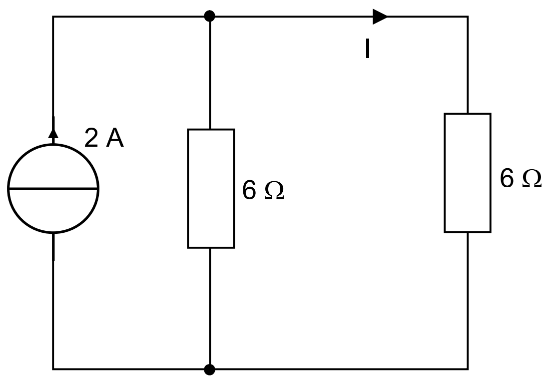
On remplace ensuite les deux générateurs de tension en série par un générateur de tension équivalent :



On remplace le générateur de tension par son équivalent sous forme de générateur de courant :

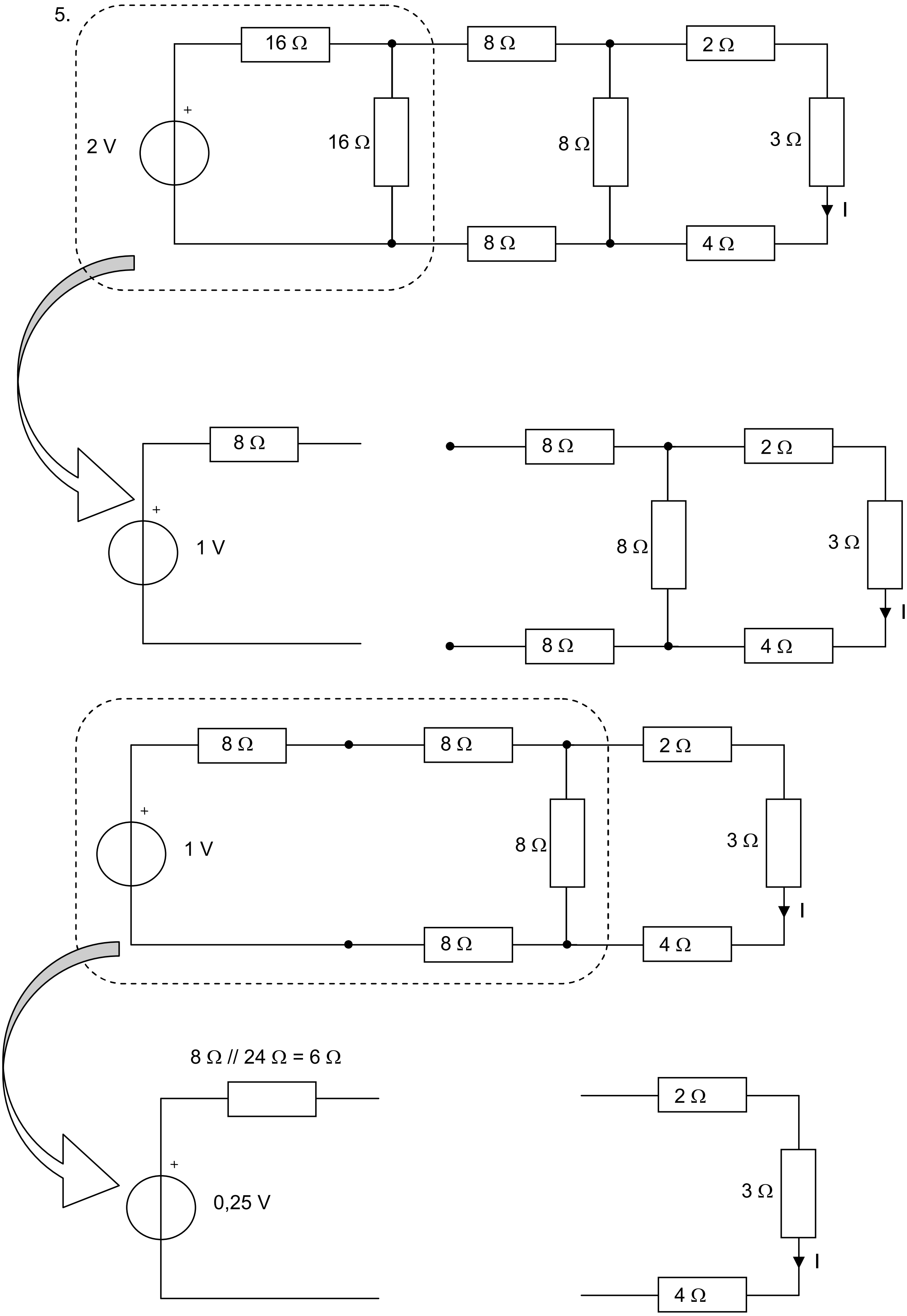


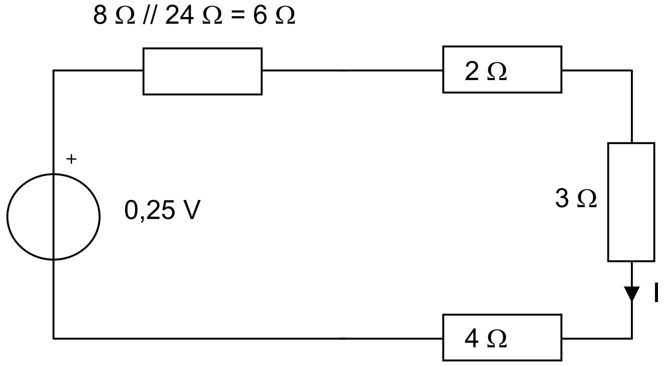
Enfin, on regroupe les générateurs de courants en un seul générateur équivalent :



Le courant I vaut la moitié de l'intensité fournie par le générateur de courant (débit dans deux résistances identiques) soit 1 A.

5.

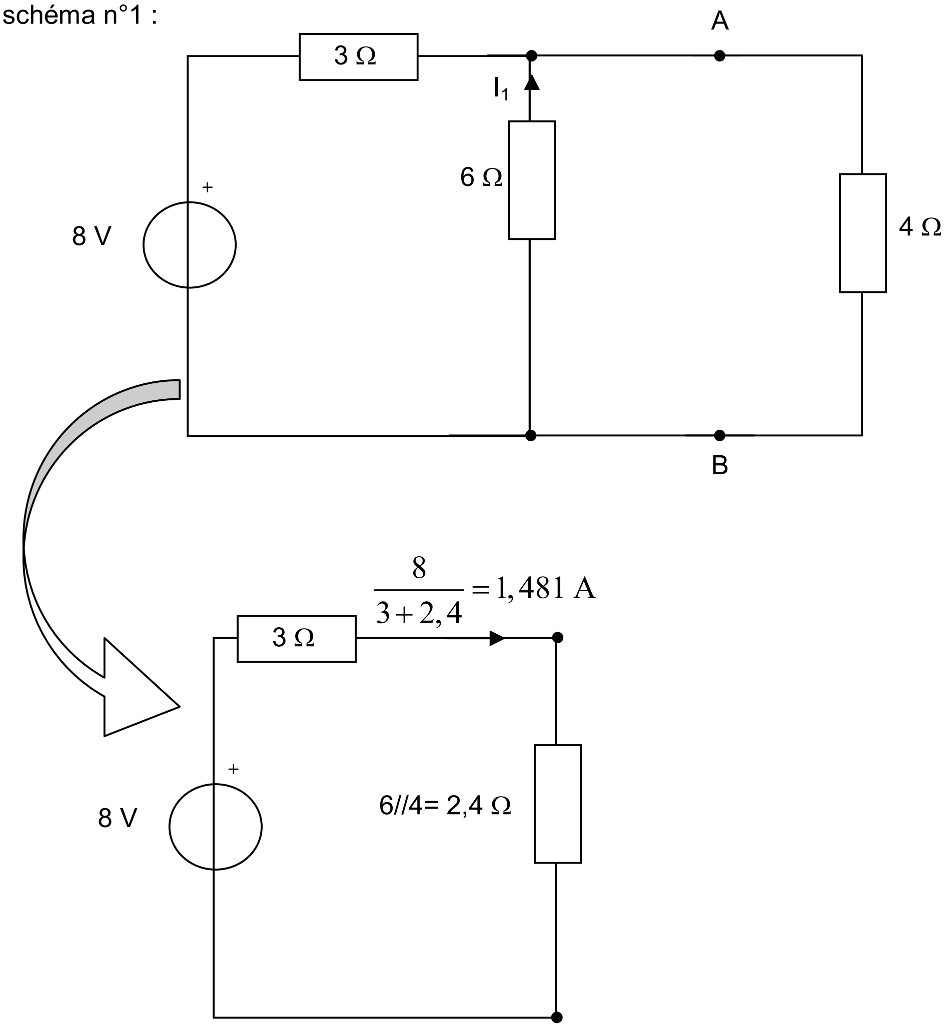

16 Ω
8 Ω
2 Ω
2 V
16 Ω
8 Ω
3 Ω
I
8 Ω
4 Ω
8 Ω
8 Ω
2 Ω
1 V
8 Ω
3 Ω
I
8 Ω
4 Ω
8 Ω
8 Ω
2 Ω
1 V
8 Ω
3 Ω
I
8 Ω
4 Ω
8 Ω // 24 Ω = 6 Ω
2 Ω
0,25 V
3 Ω
I
4 Ω



$$I = \frac{0.25}{6+2+3+4} = 16,66 \text{ mA}$$

6. Il faut dessiner autant de schémas qu'il y a de sources, en prenant soin d'éteindre toutes les sources sauf une. On calcule une intensité pour chaque schéma. L'intensité cherchée sera la somme de ces intensités intermédiaires.

schéma n°1 :

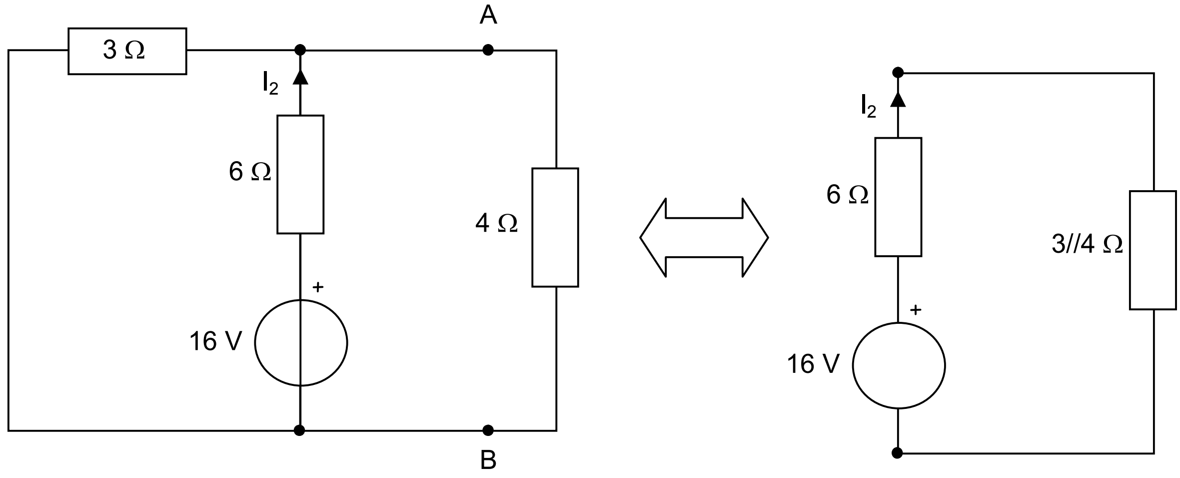


La formule du diviseur de courant nous permet de déterminer I_1 :

$$I_1 = -1,481 \times \frac{4}{6+4} = -0,5924 \text{ A}.$$

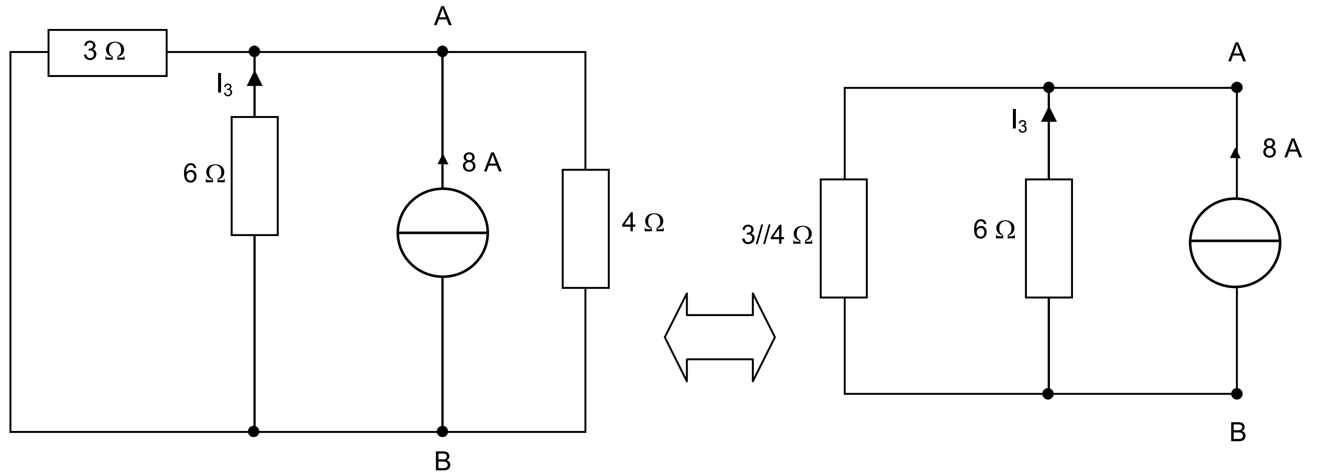
Le signe moins provient du fait que le courant I cherché va du bas vers le haut de la figure, nous avons choisi le même sens pour I_1.

schéma n°2 :



Ainsi, $I_2 = \dfrac{16}{6+(3//4)} = 2,07407 \text{ A}$

schéma n°3 :

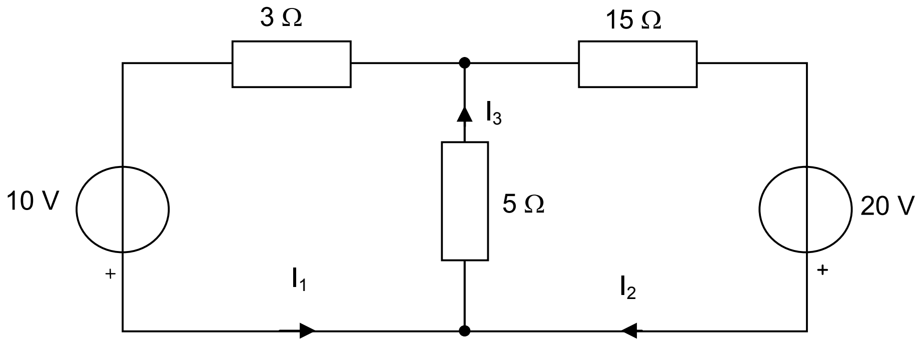


La formule du diviseur de courant nous permet de calculer I_3 :

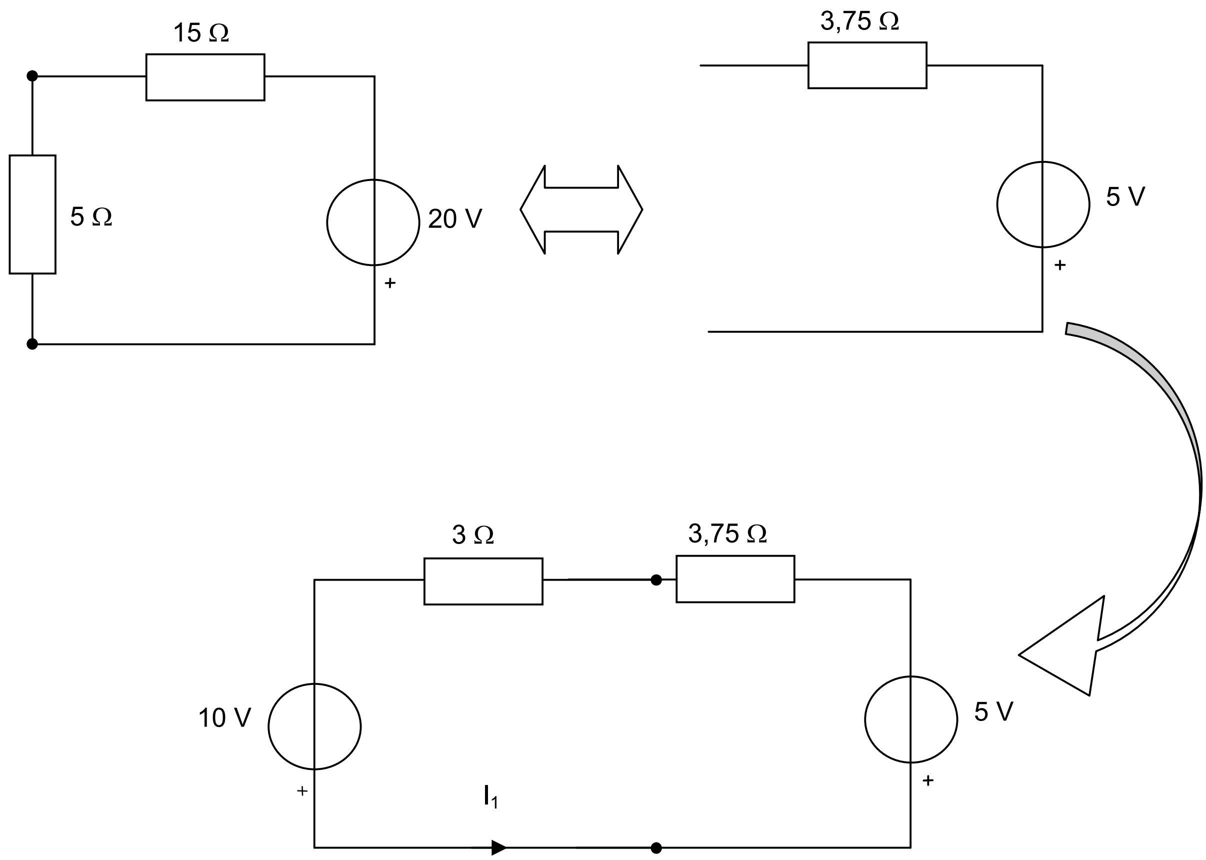
$I_3 = -8 \times \dfrac{(3//4)}{(3//4)+6} = -1,77777 \text{ A}$, étant donné le sens du débit des 8 A, I_3 circulera du haut vers le bas et sera donc négatif.

L'application du principe de superposition permet d'écrire :
$I = I_1 + I_2 + I_3 = -0,5924 + 2,07407 - 1,7777 = -0,296 \text{ A}$

7. Résolvons l'exercice par la méthode de Thevenin. Numérotons les courants dans les branches :

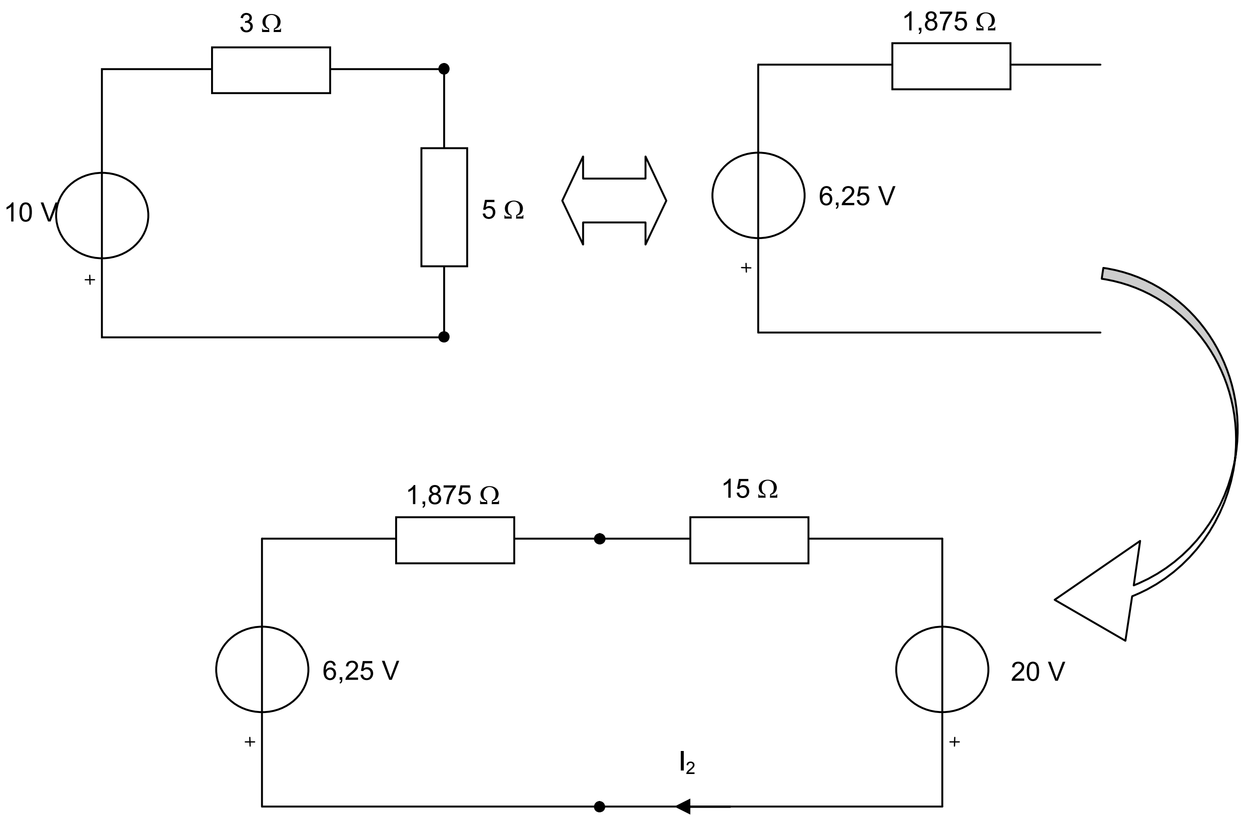


Déterminons I_1, pour cela nous remplacerons la maille de droite par un générateur de Thevenin équivalent :



L'équation de maille permet d'écrire : $I_1 = \dfrac{10-5}{3+3,75} = 0,74\ \text{A}$

Déterminons I_2 , pour cela nous remplacerons la maille de gauche par un générateur de Thevenin équivalent :

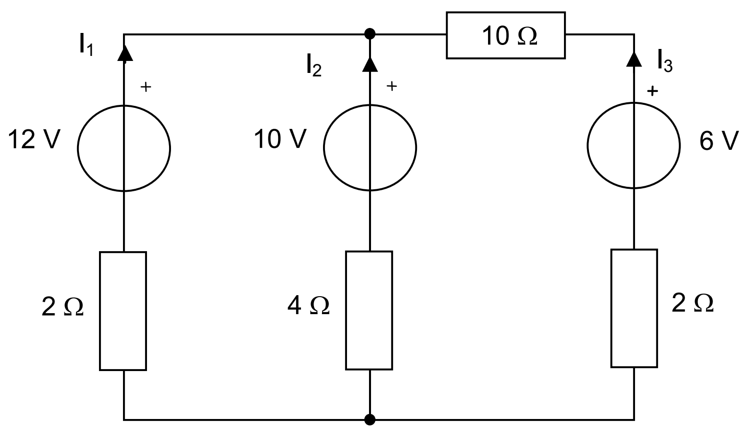


L'équation de maille permet d'écrire $I_2 = \dfrac{20-6,25}{15+1,875} = 0,819 \text{ A}$

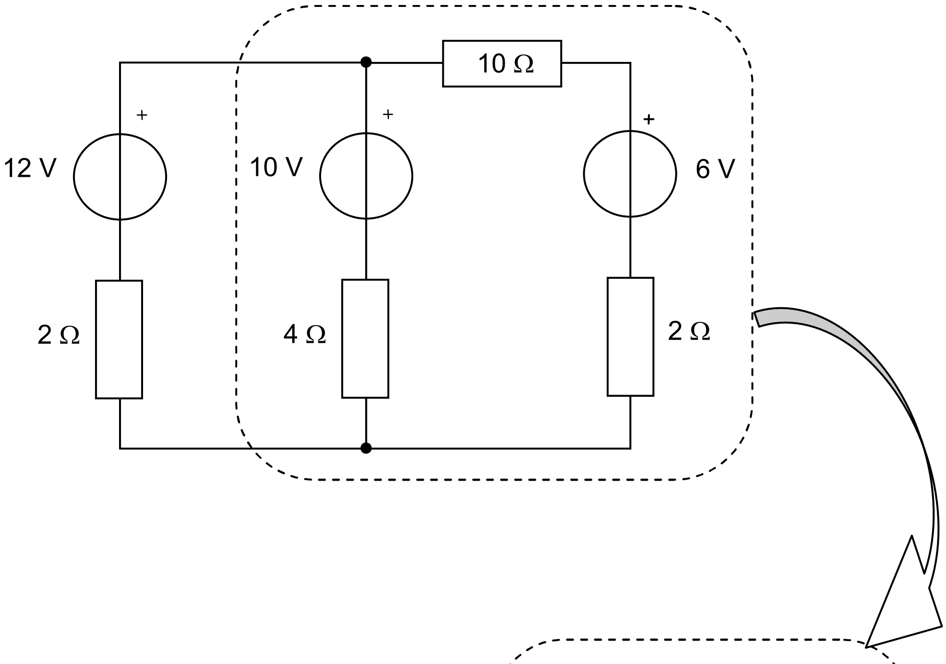
L'équation au nœud inférieur du schéma de départ permet d'écrire :

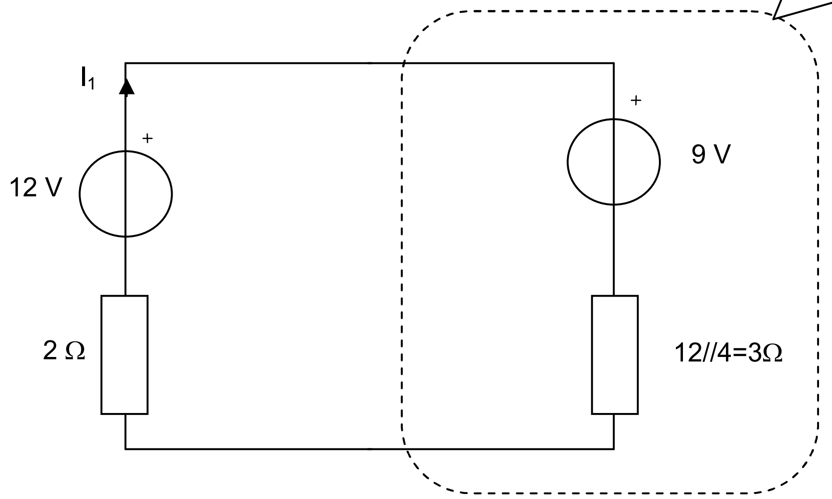
$I_3 = I_1 + I_2 = 0,819 + 0,74 = 1,55 \text{ A}$

8. Là encore, une résolution par Thevenin est plus rapide qu'une résolution par Kirchhoff.



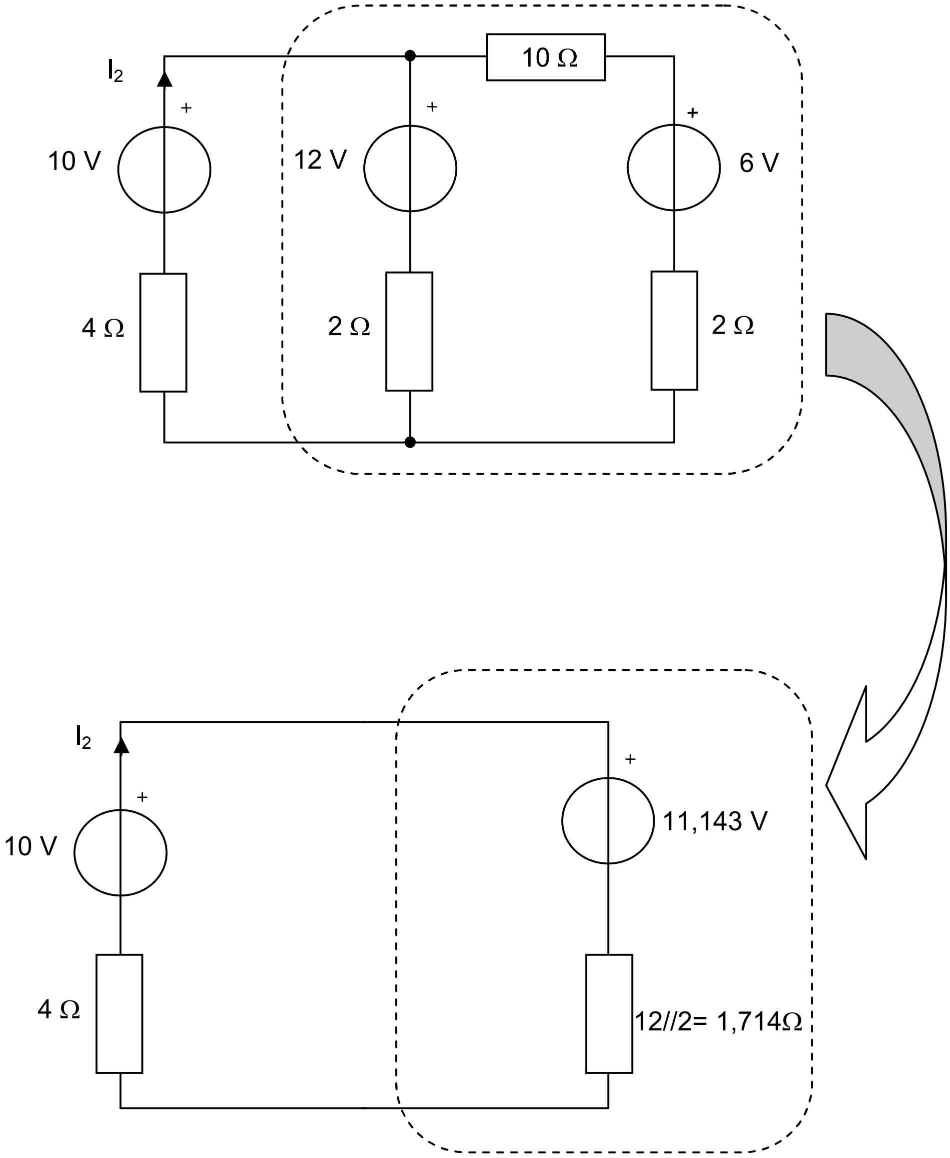
Calcul de I_1 :





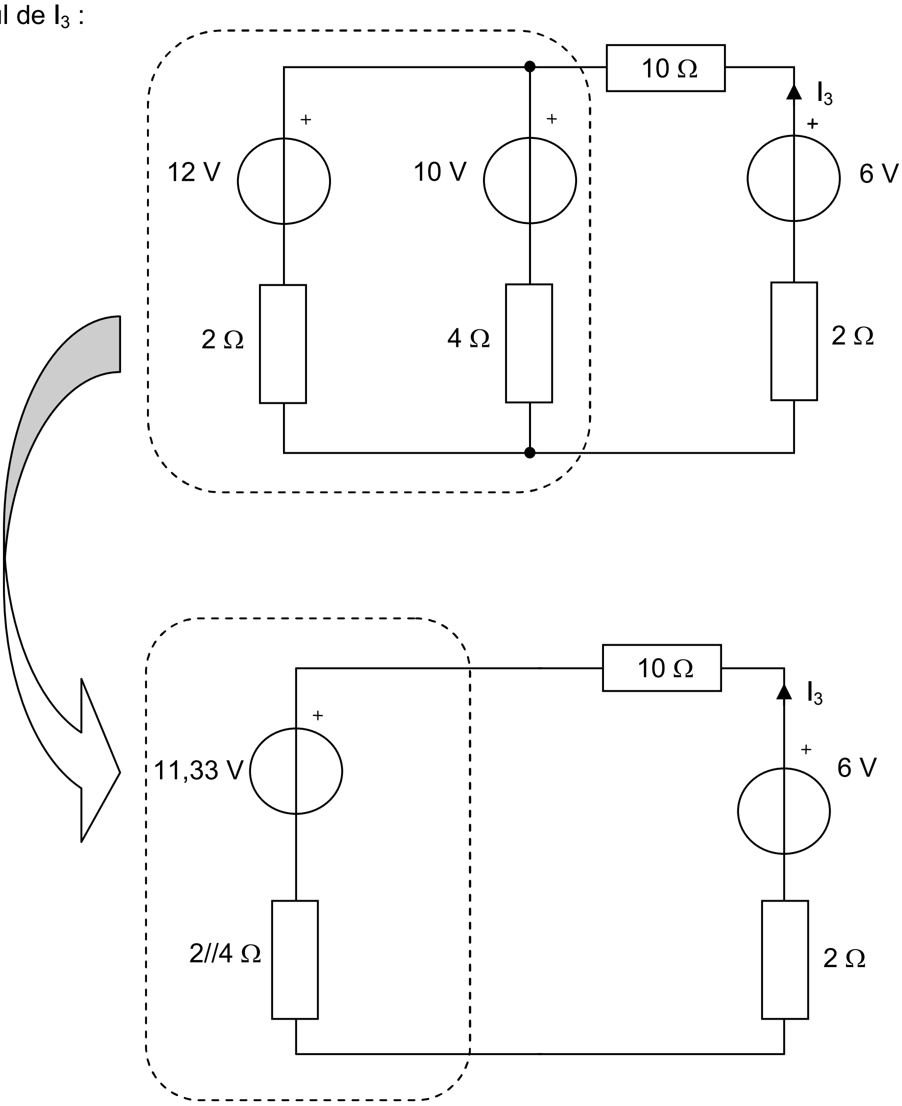
$$I_1 = \frac{12-9}{2+3} = 0,6 \text{ A}$$

Calcul de I_2 :



$I_2 = \dfrac{10-11,1429}{4+1,714} = -0,2\ \mathrm{A}$, le courant I_2 descend donc du haut vers le bas sur le schéma.

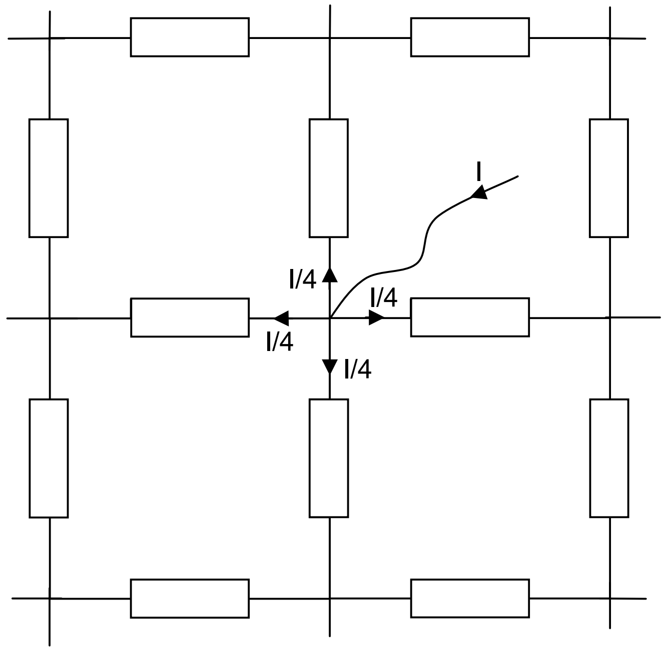
Calcul de I_3 :



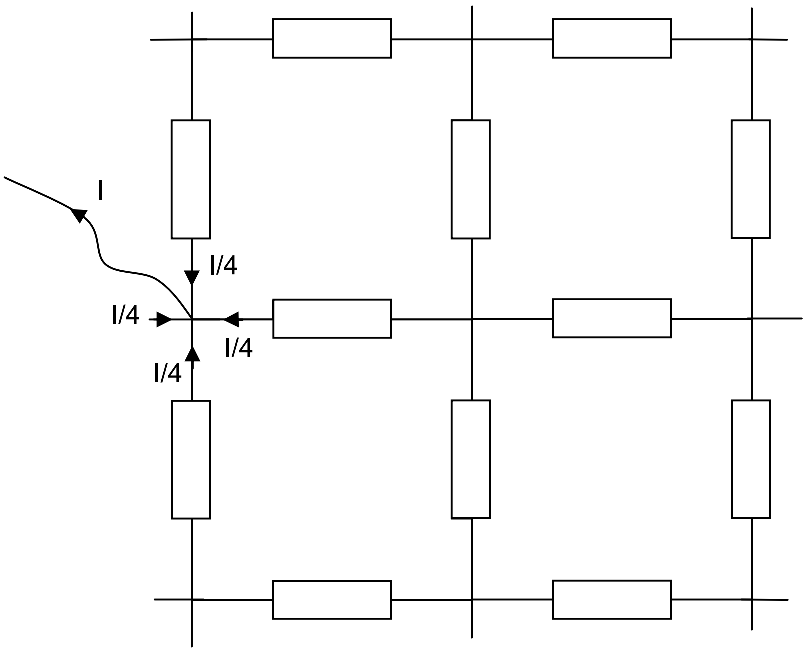
$I_3 = \dfrac{6-11,333}{10+2+(2//4)} = -0,40\ \mathrm{A}$, ici également, le courant I_3 circule dans le sens contraire de la flèche.

9. On utilise le principe de superposition :

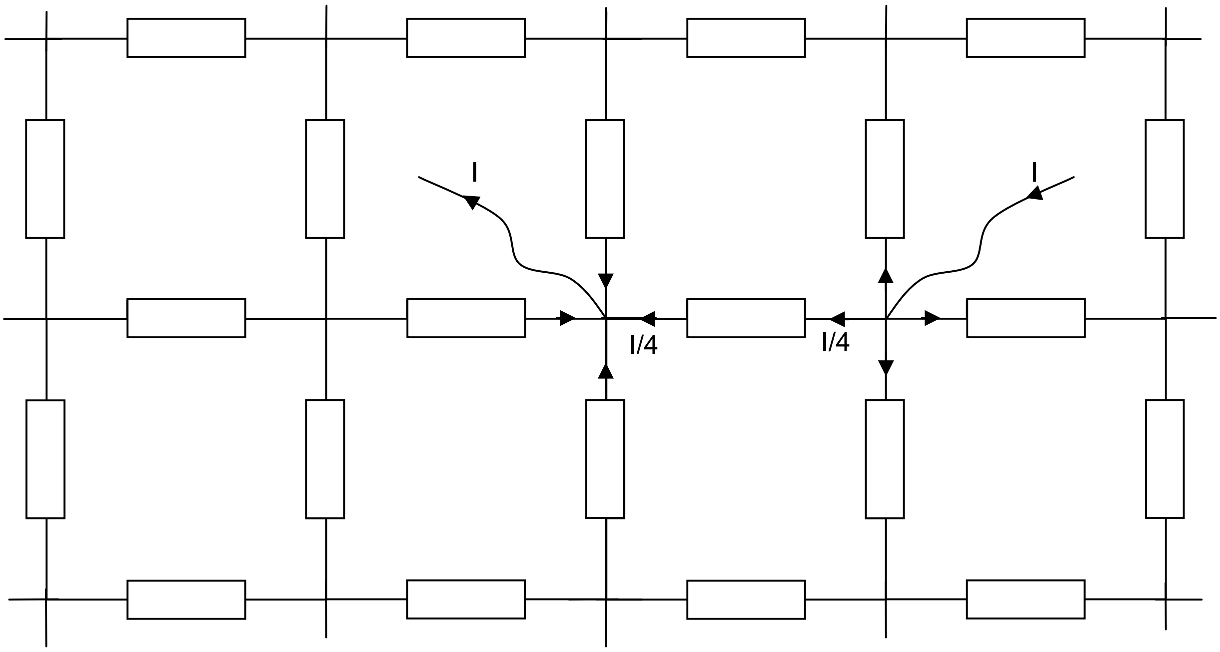
Etape n°1 : on injecte le courant et on le récupère par un fil situé sur le pourtour à l'infini. La symétrie du système veut que le courant se sépare du nœud d'injection en 4 intensités égales.



Etape n°2 : On injecte une intensité identique à la précédente, depuis le pourtour situé à l'infini. On le récupère par un nœud voisin du précédent. La symétrie du système fait que 4 intensités égales arrivent au nœud.



Le système complet est la superposition des étapes 1 et 2 :

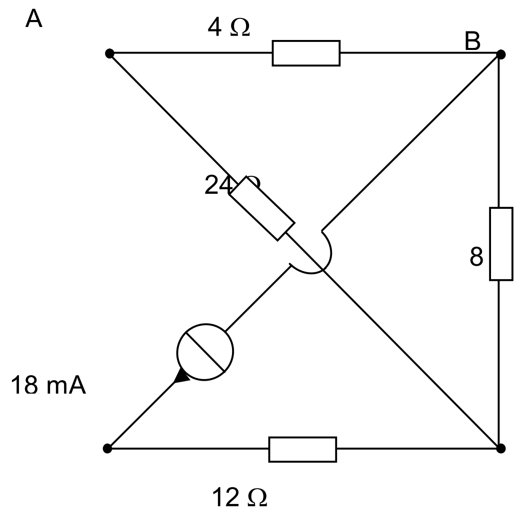


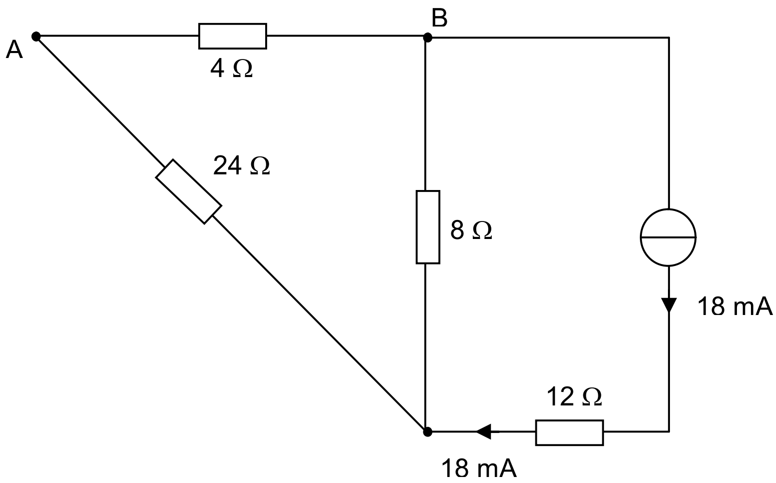
Ainsi, en appelant E la d.d.p. imposée entre les deux nœuds on a :

$$E = R\cdot\frac{I}{4}+R\cdot\frac{I}{4}=R\cdot\frac{I}{2}=R_{eq}\cdot I \Rightarrow \boxed{R_{eq}=\frac{R}{2}}$$

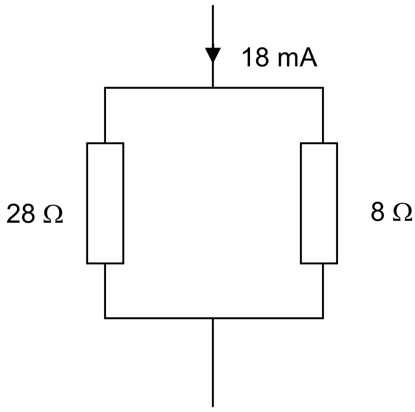
10. Par le principe de superposition :
Il y a deux générateurs, il faut donc extraire deux sous-circuits, calculer V_{AB} pour chacun d'eux et en faire la somme algébrique.

Sous circuit n°1 :





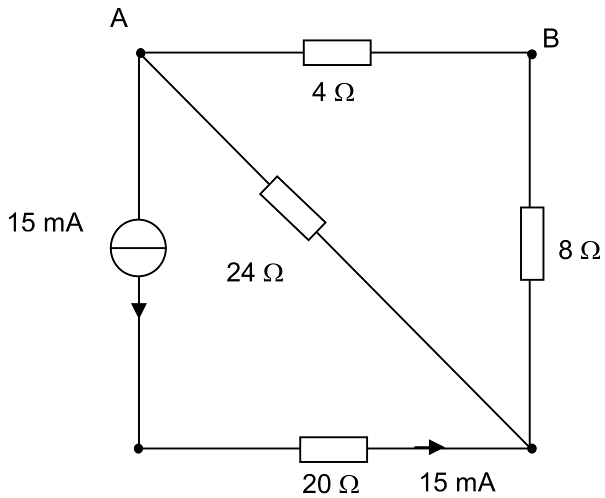
Le courant de 18 mA se divise dans le diviseur constitué de la résistance de 8 Ω d'une part et des résistances de 24 et 4 Ω en série d'autre part :



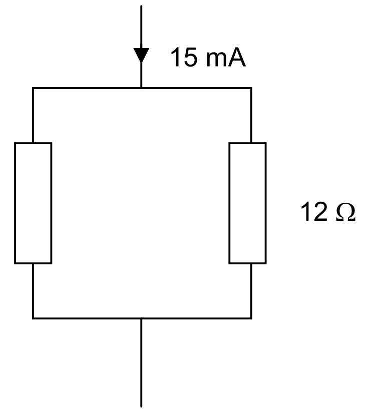
L'intensité dans les résistances de 24 et 4 Ω est : $18\times\frac{8}{28+8}=4\ \mathrm{mA}$

Ainsi, V_{AB} =+ 16 mV dans ce premier circuit.

Sous circuit n°2 :



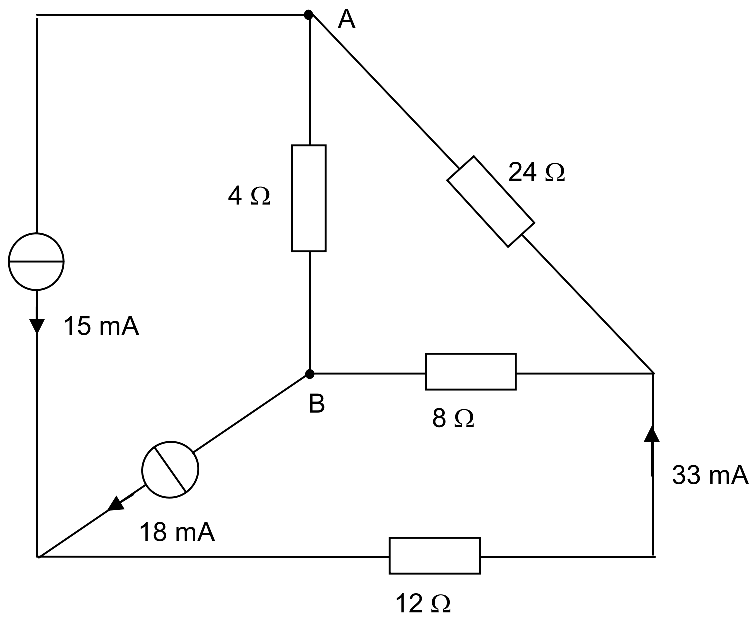
L'intensité de 15 mA traverse le diviseur de courant constitué de la résistance de 24 Ω en parallèle avec les résistances de 8 et de 4 Ω en série :



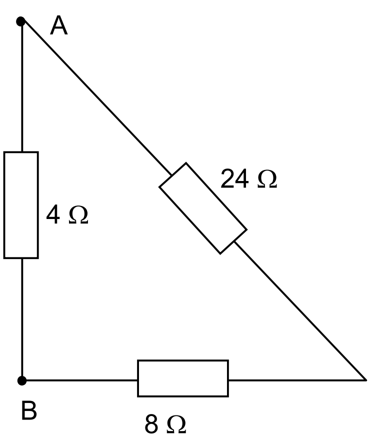
Soit une intensité de : $15 \times \frac{24}{24+12} = 10 \text{ mA}$ et donc pour ce sous circuit, V_{AB} = -40 mA (attention au sens du courant !).

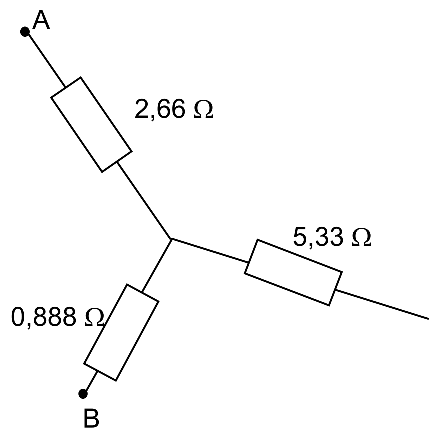
Lorsque l'on superpose les deux circuits, on a V_{AB} = + 16 – 40 = - 24 mV

Deuxième solution par Kennely, on redessine la figure :

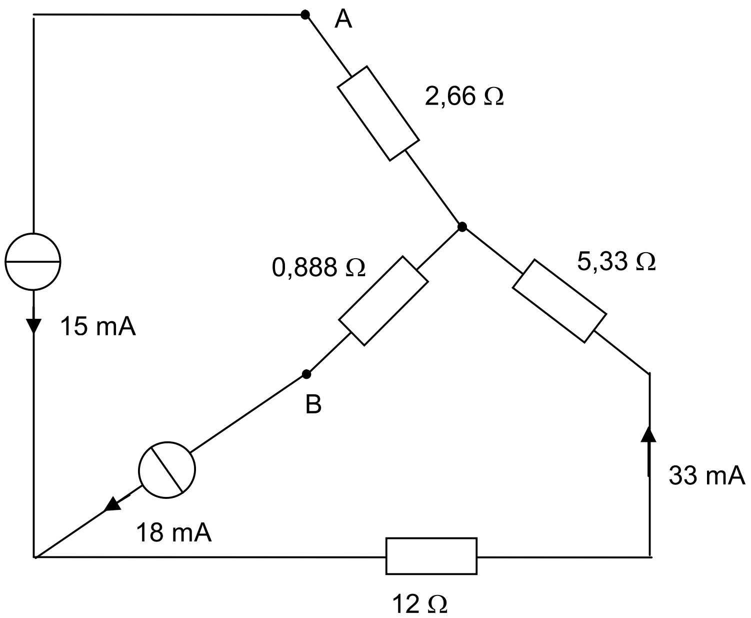


Le triangle se transforme en étoile :





Le circuit se transforme en :



$V_{AB} = 0,888 \times 18 \cdot 10^{-3} - 2,66 \times 15 \cdot 10^{-3} = 24 \text{ mV}$