Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

cme Centre des Métiers de l'Electricité	ANNEE: 2018-2019	BTS BLANC EPREUVE DE MATHEMATIQUES	CLASSE : 2 année BTS
	DUREE: 4H		FILIERE : ELT et MSP

NB : Celui qui semble découvrir ce qui lui paraît comme une erreur dans l'énoncé, poursuit sa composition en donnant les arguments de sa démarche.

EXERCICE 1 :

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B}=(e_1, e_2, e_3)$ pour tout réel m, on définit l'endomorphisme de f_m de $\mathbb{R}^3$ par : $f_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \mapsto f_m(x, y, z) = (-x+my+mz,\ x-y,\ -x-z)$

1.

a. A_m désigne la matrice de l'endomorphisme f_m relativement à la base canonique $\mathcal{B}=(e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que ${}^tA_m = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ m & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \end{bmatrix}$ où ${}^tA_m$ désigne la transposée de la matrice A_m. (N.B. toute matrice plaquée est nulle).

b. Montrer que $(A_m + I)^3 = 0$ où I est la matrice identité d'ordre 3 et 0 la matrice nulle d'ordre 3.

c. Déduire de la question précédente que la matrice A_m est inversible pour tout $m \in \mathbb{R}$ et déterminer A_m^{-1}. (A_m^{-1} désigne l'inverse de la matrice A_m). (N.B. Dire que $A_m^{-1} = \frac{1}{\det(A_m)} {}^t\text{Com}(A_m)$ vaut 0).

d. On considère le vecteur $U_\alpha = (-1, -2, \alpha)$ de $\mathbb{R}^3$, pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, le vecteur U_α appartient-il à l'image de f_m notée $\text{Im}(f_m)$?

2.

a. Montrer q'une matrice carrée A d'ordre 3 ayant une valeur propre triple α non nul est diagonalisable si et seulement si $A = \alpha I$. (I désigne la matrice identité d'ordre 3).

b. Montrer que le réel -1 est une valeur propre de la matrice A_m.

c. Sachant que $\det(A_m) = -1$. Déterminer toutes les valeurs propres de la matrice A_m.

d. La matrice A_m est-elle diagonalisable ? justifier.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on veut déterminer A_m^n et pour cela, on écrit $A_m = [(A_m + I) - I] = [(A_m + I) + (-I)]$.

a. En remarquant que : $A_m^n = [(A_m + I) - I]^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (A_m + I)^k (-I)^{(n-k)}$, montrer que

$A_m^n = \sum_{k=0}^{2} C_n^k (A_m + I)^k (-I)^{(n-k)}$ (pour tout entier naturel $n \geq 3$). On pourra utiliser la question 1.b.

b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_m^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1}nm & (-1)^{n-1}nm \\ (-1)^{n-1}n & (-1)^n\left[1+\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]m\right] & (-1)^n\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]m \\ (-1)^n n & (-1)^{n+1}\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]m & (-1)^n\left[1-\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]m\right] \end{bmatrix}$.

4. On veut déterminer le terme général des suites récurrentes linéaires d'ordre 1 (U_n) ; (V_n) et (W_n) définies par :

$\begin{cases} U_{n+1} = -U_n + 2V_n + 2W_n \\ V_{n+1} = U_n - V_n \\ W_{n+1} = -U_n - W_n \end{cases}$ avec $U_0 = 1$; $V_0 = -1$ et $W_0 = 2$.

a. Déterminer la matrice B associée à ce système.

Scanné avec CamScanner

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

trer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{bmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{bmatrix} = B^n \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{bmatrix}$.

trer qu'il existe $m_0 \in \mathbb{N}$, tel que $B = A_{m_0}$.

éduire B^n.
rminer alors le terme général des suites (U_n) ; (V_n) et (W_n).

ICE 2 :
considère le système linéaire ci-dessous noté (S) et défini par :

$$\begin{cases} (P-2)x + 3y = 7 \\ 4x + (P-1)y = 0 \\ x + (1-P)z = -1 \end{cases}$$

ıtrer que le système (S) a pour solution :

$$x = \frac{7p-7}{p^2-3p-10} \;;\; y = \frac{-28}{p^2-3p-10} \;;\; z = \frac{p^2+4p-17}{p^3-4p^2-7p+10}$$

omposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes.

$$= \frac{7p-7}{p^2-3p-10} \;;\; G(p) = \frac{-28}{p^2-3p-10} \;;H(p) = \frac{p^2+4p-17}{p^3-4p^2-7p+10}$$

que le réel 1 est racine du polynôme $p^3-4p^2-7p+10$.

considère le système différentiel noté (S') défini par :

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = -4x + y \quad \text{avec } x(0)=7 \;; y(0)=0 \text{ et } z(0)=1$$
$$\frac{dz}{dt} = x + z$$

ropose de résoudre le système différentiel (S') en utilisant la transformée de Laplace.
ıppliquant la Transformée de Laplace à chaque membre de l'équation différentielle du système (S') et en ıettant que les fonctions x, y, z sont causales, montrer que (x), (y) et (z) vérifient le système (S'') défini ıme ci-dessous.

$$\begin{cases} (P-2)x + 3\,y = 7 \\ 4x + (P-1)\,y = 0 \\ x + (1-P)z = -1 \end{cases}$$

(y) ; (z) désignent respectivement les transformées de Laplace des fonctions x; y; z.
utilisant les questions 1.a et 1.b, montrer que :

$$\frac{3}{+2} + \frac{4}{p-5} \;;\; y = \frac{4}{p+2} - \frac{4}{p-5} \;;\; z = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p-5}$$

utilisant les Transformées de Laplace Inverse, donner les expressions de x(t) ; y(t) et z(t).

CICE 3 :

sidère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, et telle que : $\begin{cases} \varphi(t) = t & si\ 0 \le t < \pi \\ \varphi(t) = 0 & si\ \pi \le t < 2\pi \end{cases}$

: $S(t)$ le développement de Fourier associé à la fonction φ, les coefficients de Fourier associés à la fonction

Scanné avec CamScanner

a. Calculer a_0, la valeur moyenne de la fonction φ sur une période.

b. On rappelle que pour une fonction f, périodique de période T le carré de la valeur efficace sur une période est donné par : $\mu_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2\,dt$

Montrer que μ_{eff}^2 le carré de la valeur efficace de la fonction sur une période est égal à $\frac{\pi^2}{6}$

2.

a. Montrer que pour tout nombre entier $n > 1$, on a : $a_n = \frac{1}{\pi n^2}\left[\cos(n\pi) - 1\right]$.

b. Montrer que pour tout nombre entier $n > 1$, on a : $b_n = -\frac{\cos(n\pi)}{n}$.

3. On considère la fonction S_3 définie sur R par : $S_3(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{3}\left[a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right]$ où les nombres a_0, a_n et b_n sont les coefficients de Fourier associes à la fonction φ définie précédemment.

a. Recopier et compléter le tableau avec les valeurs exactes des coefficients demandés.

a_0	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
					$-\frac{2}{9\pi}$	$\frac{1}{3}$

b. Calculer la valeur exacte de $S_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ puis donner la valeur approchée de $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) - S_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ arrondie à 10^{-2}.

4. On rappelle que la formule de Parseval permettant de calculer le carré de la valeur efficace μ_3^2 de la fonction S_3 est : $\mu_3^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\left(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2\right)$.

5.

a. Calculer la valeur exacte de μ_3^2.

b. Calculer la valeur approchée de $\frac{\mu_3^2}{\mu_{eff}^2}$ arrondie à 10^{-2}.

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE L'INTERROGATION :

EXERCICE 1 : 8 points

$f_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \mapsto f_m(x, y, z) = (-x+my+mz,\ x-y,\ -x-z)$

1.

a. $\begin{cases} f_m(e_1) = f_m(1,0,0) = (-1,1,-1) \\ f_m(e_2) = f_m(0,1,0) = (m,-1,0) \\ f_m(e_3) = f_m(0,0,1) = (m,0,-1) \end{cases} \Rightarrow A_m = \begin{bmatrix} -1 & m & m \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ donc ${}^tA_m = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ m & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \end{bmatrix}$..............0,5 point

b. $A_m + I = \begin{bmatrix} 0 & m & m \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $(A_m + I)^2 = (A_m + I)(A_m + I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & m \\ 0 & -m & -m \end{bmatrix}$, donc

$(A_m + I)^3 = (A_m + I)^2 (A_m + I) = 0$..0,5+0,5 point

c. $(A_m + I)^3 = A_m^3 + 3A_m^2 + 3A_m + I = 0 \Rightarrow A_m\left[-(A_m^2 + 3A_m + 3I)\right] = \left[-(A_m^2 + 3A_m + 3I)\right]A_m = I$ donc la matrice A_m est inversible pour tout $m \in \mathbb{R}$ et son inverse est

$$A_m^{-1} = -(A_m^2 + 3A_m + 3I) = -\left(\begin{bmatrix} 1 & -2m & -2m \\ -2 & m+1 & m \\ 2 & -m & 1-m \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 & m & m \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & -m & -m \\ -1 & -m-1 & -m \\ 1 & -m & m-1 \end{bmatrix}$$

$A_m^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -m & -m \\ -1 & -m-1 & -m \\ 1 & -m & m-1 \end{bmatrix}$..0,5 point

d. $\begin{vmatrix} -1 & m & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = 2m - 1 + \alpha(1-m) \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq \dfrac{1-m}{2m-1}$. Le vecteur $U_\alpha = (-1,-2,\alpha)$ appartient-il à l'image de f_m notée $Im(f_m)$ si $\alpha \neq \dfrac{1-m}{2m-1}$..0,5 point

2.

a. $P(\lambda) = (\alpha - \lambda)^3 = \det[(\alpha - \lambda)I] = \det(\alpha I - \lambda I) = \det(A - \lambda I) \Leftrightarrow A = \alpha I$ et $\dim(E_\alpha) = 3 - rg(A - \alpha I) = 3 - rg(\alpha I - \alpha I) = 3 - 0 = 3$ donc A est diagonalisable..................0,5 point

b. $\det(A_m + I) = \begin{vmatrix} 0 & m & m \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ car 2ème et 3ème colonne sont liées. Donc le réel -1 est une valeur propre de la matrice A_m. ....0,5 point

c. $\begin{cases} \det(A_m) = -1 \\ tr(A_m) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -2 \end{cases}$. Soit l'équation $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$.

Donc -1 une valeur propre triple de la matrice A_m. ....0,5 point

d. La matrice A_m n'est pas diagonalisable car $A_m \neq -I$.

3.

a. En remarquant que : $A_m^n = \left[(A_m + I) - I\right]^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (A_m + I)^k (-I)^{(n-k)}$ comme $(A_m + I)^3 = 0$, donc

$A_m^n = \sum_{k=0}^{2} C_n^k (A_m + I)^k (-I)^{(n-k)}$ (pour tout entier naturel $n \geq 3$)..0,5 point

Scanné avec CamScanner

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

CORRECTION DE L'INTERROGATION :

EXERCICE 1 : 8 points

$f_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \mapsto f_m(x, y, z) = (-x+my+mz,\ x-y,\ -x-z)$

1.

a. $\begin{cases} f_m(e_1) = f_m(1,0,0) = (-1,1,-1) \\ f_m(e_2) = f_m(0,1,0) = (m,-1,0) \\ f_m(e_3) = f_m(0,0,1) = (m,0,-1) \end{cases} \Rightarrow A_m = \begin{bmatrix} -1 & m & m \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ donc ${}^tA_m = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ m & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ....**0,5 point**

b. $A_m + I = \begin{bmatrix} 0 & m & m \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $(A_m+I)^2 = (A_m+I)(A_m+I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & m \\ 0 & -m & -m \end{bmatrix}$, donc

$(A_m+I)^3 = (A_m+I)^2(A_m+I) = 0$ ....**0,5+0,5 point**

c. $(A_m+I)^3 = A_m^3 + 3A_m^2 + 3A_m + I = 0 \Rightarrow A_m\left[-(A_m^2+3A_m+3I)\right] = \left[-(A_m^2+3A_m+3I)\right]A_m = I$ donc la matrice A_m est inversible pour tout $m \in \mathbb{R}$ et son inverse est

$$A_m^{-1} = -(A_m^2+3A_m+3I) = -\left(\begin{bmatrix} 1 & -2m & -2m \\ -2 & m+1 & m \\ 2 & -m & 1-m \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 & m & m \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & -m & -m \\ -1 & -m-1 & -m \\ 1 & -m & m-1 \end{bmatrix}$$

$A_m^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -m & -m \\ -1 & -m-1 & -m \\ 1 & -m & m-1 \end{bmatrix}$ ....**0,5 point**

d. $\begin{vmatrix} -1 & m & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = 2m-1+\alpha(1-m) \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq \dfrac{1-m}{2m-1}$. Le vecteur $U_\alpha = (-1,-2,\alpha)$ appartient-il à l'image de f_m notée $\mathrm{Im}(f_m)$ si $\alpha \neq \dfrac{1-m}{2m-1}$ ....**0,5 point**

2.

a. $P(\lambda) = (\alpha-\lambda)^3 = \det[(\alpha-\lambda)I] = \det(\alpha I - \lambda I) = \det(A-\lambda I) \Leftrightarrow A = \alpha I$ et $\dim(E_\alpha) = 3 - rg(A-\alpha I) = 3 - rg(\alpha I - \alpha I) = 3-0 = 3$ donc A est diagonalisable..................**0,5 point**

b. $\det(A_m+I) = \begin{vmatrix} 0 & m & m \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ car $2^{ème}$ et $3^{ème}$ colonne sont liées. Donc le réel -1 est une valeur propre de la matrice A_m. ....**0,5 point**

c. $\begin{cases} \det(A_m) = -1 \\ tr(A_m) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1+\lambda_2 = -2 \end{cases}$. Soit l'équation $\lambda^2+2\lambda+1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$.

Donc -1 une valeur propre triple de la matrice A_m. ....**0,5 point**

d. La matrice A_m n'est pas diagonalisable car $A_m \neq -I$.

3.

a. En remarquant que : $A_m^n = \left[(A_m+I)-I\right]^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (A_m+I)^k (-I)^{(n-k)}$ comme $(A_m+I)^3 = 0$, donc

$A_m^n = \sum_{k=0}^{2} C_n^k (A_m+I)^k (-I)^{(n-k)}$ (pour tout entier naturel $n \geq 3$)...**0,5 point**

Scanné avec CamScanner

b. $A_m^n = C_n^0(-1)^n + C_n^1(A_m+I)^1(-1)^{n-1} + C_n^2(A_m+I)^2(-1)^{n-2}$

$$A_m^n = \frac{n(n-1)}{2}(-1)^n A_m^2 + n(n-2)(-1)^n A_m + \frac{(n-1)(n-2)}{2}(-1)^n I$$

D'où $A_m^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1}nm & (-1)^{n-1}nm \\ (-1)^{n-1}n & (-1)^n\left[1+\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]m\right] & (-1)^n\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]m \\ (-1)^n n & (-1)^{n+1}\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]m & (-1)^n\left[1-\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]m\right] \end{bmatrix}$ ....0,5 point

4. $\begin{cases} U_{n+1} = -U_n + 2V_n + 2W_n \\ V_{n+1} = U_n - V_n \\ W_{n+1} = -U_n - W_n \end{cases}$ avec $U_0 = 1$; $V_0 = -1$ et $W_0 = 2$.

a. $\begin{cases} U_{n+1} = -U_n + 2V_n + 2W_n \\ V_{n+1} = U_n - V_n \\ W_{n+1} = -U_n - W_n \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \\ W_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{bmatrix}$ Donc la matrice B associée à ce système est

$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ....0,5 point

b. Pour n=0, $\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \end{bmatrix} = B^n \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{bmatrix}$ est vraie. On suppose que c'est à l'ordre k on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\begin{bmatrix} U_k \\ V_k \\ W_k \end{bmatrix} = B^k \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{bmatrix}$ et

montrons que la relation $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\begin{bmatrix} U_k \\ V_k \\ W_k \end{bmatrix} = B^{k+1} \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{bmatrix}$ est vraie à l'ordre k+1.........................0,5 point

$\begin{bmatrix} U_{k+1} \\ V_{k+1} \\ W_{k+1} \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} U_k \\ V_k \\ W_k \end{bmatrix}$ or $\begin{bmatrix} U_k \\ V_k \\ W_k \end{bmatrix} = B^k \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{bmatrix}$ donc $\begin{bmatrix} U_{k+1} \\ V_{k+1} \\ W_{k+1} \end{bmatrix} = BB^k \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} U_{k+1} \\ V_{k+1} \\ W_{k+1} \end{bmatrix} = B^{k+1} \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{bmatrix}$

Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{bmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{bmatrix} = B^n \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{bmatrix}$ ....0,5 point

5.

a. $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ et $A_m = \begin{bmatrix} -1 & m & m \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ donc $m_0 = 2$ ....0,5 point

b. $B^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 2(-1)^{n-1}n & 2(-1)^{n-1}n \\ (-1)^{n-1}n & (-1)^n(n^2-n+1) & (-1)^n n(n-1) \\ (-1)^n n & (-1)^{n+1}n(n-1) & (-1)^n[1-n(n-1)] \end{bmatrix}$ ....0,5 point

Scanné avec CamScanner

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

c. $\begin{cases} U_n = (1-2n)(-1)^n \\ V_n = (-1)^n(n+1) + 3(-1)^n n(n-1) \\ W_n = (-1)^n(n+4) - 3(-1)^n n(n-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_n = (-1)^n(1-2n) \\ V_n = (-1)^n(3n^2 - 2n + 1) \\ W_n = (-1)^n(-3n^2 + 4n + 4) \end{cases}$ ....0,5 point

Scanné avec CamScanner