

 Centre des Métiers de l'Électricité	ANNEE: 2019-2020 DUREE: 3H	 Docs à portée de main ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	CLASSE: 2BTS FILIERE: ELT e
---	-------------------------------	---	--------------------------------

NB : Celui qui semble découvrir ce qui lui paraît comme une erreur dans l'énoncé, poursuit sa composition en donnant les arguments de sa démarche.

EXERCICE 1 : CALCULS MATRICIELS

On considère l'espace vectoriel muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives sont A et B .

On note $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice associée à g dans la base $\mathcal{B}$.

On pose $q(\lambda) = \det(B - \lambda I)$ où I est la matrice unité d'ordre 3 et $(id_{\mathbb{R}^3})$ désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

1.

a. Montrer que $q(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)^2$.

b. Montrer que $E_{\lambda} \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ si, et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

2. Soit $v_1 = e_1 + e_2 - e_3$; $v_2 = e_1 - e_2$ et $v_3 = e_1 - e_3$.

a. Montrer que v_1 est une base de E_1 et que (v_2, v_3) est une base de E_2 .

b. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. On considère la matrice

$$Q \text{ suivante, } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Calculer le produit matriciel } PQ \text{ et déterminer } P^{-1}$$

inverse de P .

d. Déterminer alors la matrice D' de g dans la base $\mathcal{B}'$.

3. On suppose que la matrice A' de f dans $\mathcal{B}'$ vérifie l'égalité $D'A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer A' , puis la matrice A .

b. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ ($\text{Ker}(f)$ désigne le noyau de l'endomorphisme f et désigne le noyau de l'endomorphisme f)

4. Résoudre le système différentiel d'ordre 1 notée (S) défini par :

$$(S): \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y - z \\ \frac{dy}{dt} = -x + y - z \\ \frac{dz}{dt} = x + y + 3z \end{cases}$$

Sachant que $x(0) = -2$; $y(0) = 1$ et $z(0) = 3$.

EXERCICE 2 : NOMBRE COMPLEXE

PARTIE A :

Dans le plan P , rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère la suite de points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'affixes z_n définies par :

$$\begin{cases} z_0 = 8 \\ z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Exprimer z_n en fonction de n .
2.
 - a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer le quotient $\left(\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} \right)$.
 - b. En déduire la nature du triangle $OM_n M_{n+1}$.
 - c. Montrer que $M_n M_{n+1} = k OM_{n+1}$, où k est un réel strictement positif que l'on déterminera.
3. On note r_n le module de z_n . Calculer en donner une interprétation géométrique. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$, en donner une interprétation géométrique.

PARTIE B :

On considère dans cette partie, l'application f de P qui à tout point M d'affixe z , associe le point d'affixe $z' = \frac{z+i}{z-2i}$.

1. Pour $z \neq 2i$, on pose $z = 2i + re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Ecrire $z' - 1$ en fonction de r et θ .
2. On note A le point d'affixe $2i$.
 - a. Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M tels que $|z' - 1| = 3$.
 - b. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M tels que $\arg(z' - 1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
 - c. Représenter Γ_1 et Γ_2 .

EXERCICE 3 : EQUATION DIFFERENTIELLE-ETUDE DE FONCTION

- I. Soit l'équation différentielle : (E) : $(x+1)y' + y = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{x+1}$ $x > -1$.
 1.
 - a. Intégrer l'équation différentielle homogène associée à (E).
 - b. Déterminer une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de la variation de la constante.
 - c. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
 2. Déterminer la fonction h solution de (E) telle que $h(0)=1$.
- II. Soit la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \ln(x+1)$.
 1. Déterminer D_g l'ensemble de définition de g .
 2. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
 3. En déduire le signe de g sur $] -1; +\infty[$.
- III. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1 + \ln(x+1)}{x+1}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique : 2cm.

1.
 - a. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f .
 - b. Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
 - c. Montrer que la droite (D): $y = \frac{1}{2}x$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$
 - d. Etudier la position relative de (C) et (D).
2. Etudier les variations f puis dresser son tableau de variation.
3.
 - a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .
 - b. Vérifier que $-0,6 < \alpha < -0,5$.
4.
 - a. Donner le développement limité de f d'ordre 2 au voisinage de 0.
 - b. En déduire une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 puis la position de (C) par rapport à (T) au voisinage de ce point.
5.
 - a. Représenter (C), (D) et (T) dans un même repère orthonormé d'unité graphique 2cm.
 - b. Soit l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par (C), (D), les droites d'équations $x = -1 + \frac{1}{e}$ et $x = 0$. Calculer de $\mathcal{A}$.