COLLEGE MONAJOCE Enseignement Général Enseignement Technique	**DEVOIR DE NIVEAU DE MATHEMATIQUES N°2 TRIMESTRE 2**	NIVEAU : Tle D DUREE : 3 heures 30 COEFFICIENT : 2 PROFESSEUR : M. DJAHA CONTACTS : 07 09 52 13 05

Ce sujet comporte deux (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3. Le candidat traitera tous les exercices proposés. Toute calculatrice scientifique est acceptée sauf les calculettes programmables. Aucun document ou support n'est autorisé.

<u>EXERCICE 1</u> : 2 points

Ecris le numéro puis réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1- La fonction exponentielle népérienne est la primitive de $x \mapsto lnx$ sur $]0;+\infty[$.

2- La fonction $x \mapsto log_4(x)$ définie sur $]0;+\infty[$ est telle que $log_4(x) = \frac{ln4}{lnx}$.

3- $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{x}{lnx} = 0$.

4- Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. On a : $\sqrt[3]{\sqrt{a^5b}} \times \sqrt{\sqrt[3]{ab^5}} = ab$

<u>EXERCICE 2</u> : 2 points

Ecris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre indiquant la réponse correcte.

	Affirmations	Réponses proposées A	B	C
1	Pour $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$;M est un point du plan d'affixe $z = x + yi$ et $z \neq -i$, $f(z)$ est un imaginaire pur correspond à	Un cercle de centre $\Omega\binom{0}{0}$ et de rayon 1	Une droite horizontale d'équation $y = 0$	Une droite verticale d'équation $x = 0$
2	Si h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \frac{2}{x}lnx$. Les primitives H de h sont	$H(x) = 2xlnx + c$; $c \in$ IR	$H(x) = (lnx)^2 + c$; $c \in$ IR	$H(x) = \ln\left(\frac{2}{x}\right) + c$; $c \in$ IR
3	i^{543} est égale à	i	$-i$	-1
4	Les racines cubiques de l'unité sont :	$-i$; $1 + i$ et $2i$	i; $2i$ et $1-2i$	1; $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

<u>EXERCICE 3</u>: 3 points

On considère la fonction q définie sur $]-\infty;0[$ par :$q(x) = \frac{3x^2-4x+1}{x^2(2x-1)^2}$.

1- Détermine les nombres réels a et b tels que : $\forall x \in]-\infty;0[$, $q(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(2x-1)^2}$.

2- Pour la suite on pose $a = 1$ et $b = -1$.

a) Détermine une primitive Q de q sur $]-\infty;0[$.

b) Détermine la primitive Q de q sur $]-\infty;0[$ qui s'annule en -1.

EXERCICE 4: 4 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On considère l'équation (E) : $z^3 + (-1+2i)z^2 - (1+2i)z - 3 + 4i = 0$

1- Justifie que i est une solution de (E).
2- Détermine trois nombres réels complexes a, b et c tels que :
$$z^3 + (-1+2i)z^2 - (1+2i)z - 3 + 4i = (z-i)(az^2 + bz + c)$$
3- Déduis en la résolution de (E).
4- On donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = -1 - 2i$ et $z_C = 2 - i$.
   a) Place les points A, B et C
   b) Calcule $|Z_A - Z_B|$ et $|Z_C - Z_B|$ puis donne la nature du triangle ABC.
5- Détermine l'affixe du point G, centre de gravité triangle ABC.
6- Détermine l'ensemble (F) des point M d'affixe z du plan tel que : $|z - i| = |Z_A - Z_B|$
7- Détermine l'ensemble (P) des points M d'affixe z du plan tel que : $|z - 2 + i| = |z - i|$

EXERCICE 5: 5 points

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$, par $\begin{cases} g(x) = xlnx - 1 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

1- a- Justifie que g est continue en 0.
   b- Calcule la limite de g en $+\infty$ et celle de $\frac{g(x)}{x}$ en $+\infty$ puis interprète graphiquement.
   c- Etudie la dérivabilité de g en 0. Interprète graphiquement le résultat.
2- Étudie les variations de g puis dresse son tableau de variation.
3- Démontre l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$
4- Déduis en le signe de $g(x)$ sur $]0;\alpha[$ et sur $]\alpha;+\infty[$.

PARTIE B : Étude de la fonction f définie et dérivable sur son domaine de définition par $f(x) = \frac{1+x}{1+lnx}$

1- Détermine l'ensemble de définition D_f.
2- Calcule les limites de f en 0, en $+\infty$, à gauche en e^{-1} et à droite en e^{-1}.
3- Démontre que $\forall\, x \in D_f, f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+lnx)^2}$
4- Justifie que : $f(\alpha) = \alpha$.
5- Etablis le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.
6- Détermine l'équation des tangentes (T) et (T ') à (C_f) respectivement en $x = 1$ et en $x = \alpha$.
7- Justifie que f réalise une bijection de [1 ;+∞[sur un intervalle K à préciser.

EXERCICE 6 : 5 points

A la veille des congés de Pâques, tu va aider l'un de tes amis qui est commerçant-réparateur de téléphone portable dans la commune de Yopougon. Il est spécialisé dans l'installation et la mise à jour de deux options : le GPS et le WIFI.

Il a reçu un stock de 100 téléphones pour lesquels il y en a 40 qui possède l'option GPS. Et parmi les téléphones qui possèdent le GPS, 60 % possède le WIFI. Mais il y a en tout 70% de téléphone qui possèdent l'option WIFI.

Le coût d'installation de l'option GPS sur un téléphone est de 8400 FCFA et de 4200 FCFA pour l'option WIFI.

Il veut connaitre d'une part les proportions des téléphones qui ont le WIFI et pas le GPS, qui ont le WIFI sachant qu'ils n'ont pas le GPS, et ceux qui ont le GPS sachant qu'ils n'ont pas le WIFI.

D'autre part, voulant remplir sa fiche de comptabilité simplifiée, il veut connaitre le coût moyen d'installation (GPS et WIFI confondus) sur la base du stock reçu la veille.

Ne sachant comment s'y prendre, il te sollicite.

Réponds à chacune des préoccupations de ton ami en utilisant tes connaissances mathématiques dans une démarche rigoureuse.