COLLEGE JEUNES FILLES DE SINGA DE YOPOUGON
DEVOIR DE NIVEAU
Année Scolaire : 2021-2022
Durée : 2h30
Classe : Tle D

CORRECTION DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

N°	REPONSES	EXPLICATIONS
1	VRAI	Lorsque E(x) > 0, le jeu est **avantageux pour le joueur.** Lorsque E(x) < 0, le jeu est **désavantageux pour le joueur.** Lorsque E(x) = 0, le jeu est **équitable.**
2	FAUX	$f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$ si f est dérivable en x_0.
3	FAUX	La probabilité c'est plutôt $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
4	VRAI	(Voir le cours)

EXERCICE 2

N°	REPONSES	EXPLICATIONS
1	A	a, b et l désignent soit un nombre réel , soit $\pm\infty$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to a} go\,f(x) = l$
2	A	$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{4}} = a^{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)} = a^{\frac{7}{12}}$
3	C	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) avec\ A\ et\ B\ indépendants \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ $P(A \cap B) = 0{,}25 \times 0{,}8 = 0{,}2 \Rightarrow P(A \cup B) = 0{,}25 + 0{,}8 - 0{,}2 = 0{,}85$
4	B	Si F(x) $primitive\ de\ f, alors\ F'(x) = f(x). F'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 2x + 2}\right)'$ $F'(x) = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} = f(x)$
5	B	$Soit\ g(x) = \sin x \Rightarrow f(x) = gog(x)\ et\ (gog)' = g' \times (g'og)$ $f'(x) \Rightarrow \cos x \times \cos(\sin x)$

EXERCICE 3

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,1	0,5	0,4

1) Représentation graphique de la fonction de répartition F(*X*) :

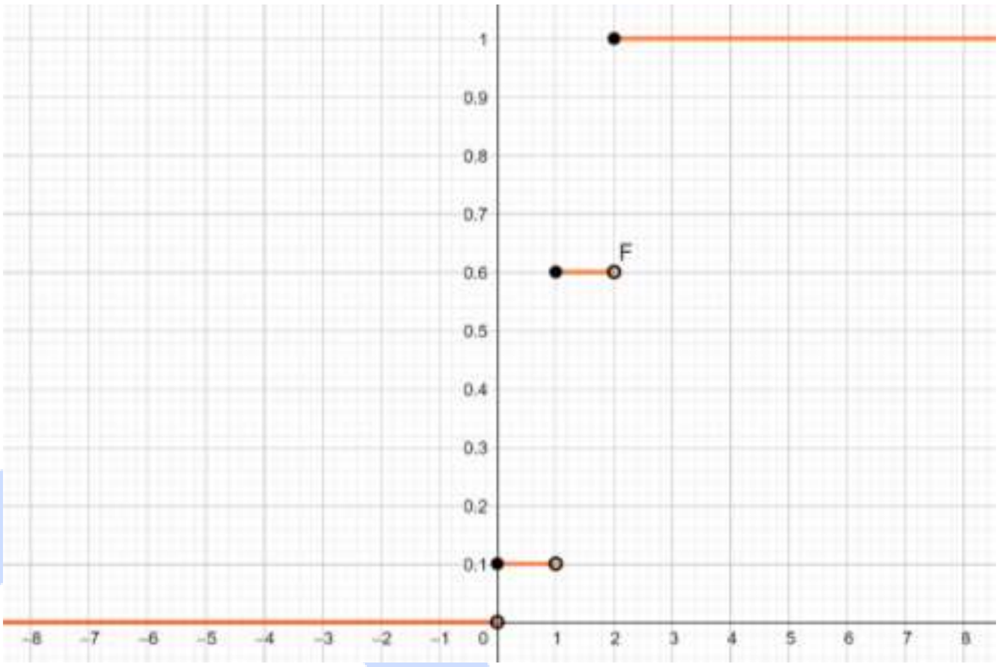
$F(X)$est définie sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$\forall\, x \in \,]-\infty; 0[, F(X) = 0$

$\forall\, x \in [0; 1[, F(X) = 0{,}1$

$\forall\, x \in [1; 2[, F(X) = 0{,}1 + 0{,}5 = 0{,}6$

$\forall\, x \in [2; +\infty[, F(X) = 0{,}6 + 0{,}4 = 1$



2) a- Calcule de l'espérance mathématique de *X*

$E(X) = 0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}5 + 2 \times 0{,}4 = 1{,}3$

b- Calcule de la variance et de l'écart type :

$\boldsymbol{V(x)} = 0^2 \times 0{,}1 + 1^2 \times 0{,}5 + 2^2 \times 0{,}4 - 1{,}3^2 = \mathbf{0{,}41};\ \boldsymbol{\sigma(X)} = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0{,}41} = \mathbf{0{,}64}$

EXERCICE 4

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$

1) Calcule des limites de g en $+\infty$ et $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$

2) a- Calcule de la dérivée $g'(x)$ de $g(x)$:

$g'(x) = (2x^3 + 3x^2 + 1)' = 3 \times 2x^2 + 2 \times 3x = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$

b- Variations et tableau de variation de g :

$g'(x) = 6x(x+1) \Rightarrow g'(x)$ a 2 racines : 0 et -1. $\Rightarrow g'(x) \leq 0$ *pour* $x \in [-1\,; 0]$ *et* g décroissante ;

$g'(x) \geq 0$ *pour* $x \in \,]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$ *et* g croissante.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

3) **a-** g est srtictement monotone sur $]-\infty;-1[$; aussi, $g(]-\infty;-1[) =]-\infty;2[$ et $0 \in]-\infty;2[$

$\Rightarrow$ **l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]-\infty;-1[$**

b- Justifions que $-2 < \alpha < -1$ et donnons un encadrement de α d'amplitude 0,1

$g(-2) = 2 \times (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 + 1 = -3$

et

$g(-1) = 2 \times (-1)^3 + 3 \times (-1)^2 + 1 = 2.$

On a $g(-2) \times g(-1) < 0 \Rightarrow -2 < \alpha < -1$

Encadrement par la méthode de balayage : $g(-1{,}9) < 0; g(-1{,}8) < 0; g(-1{,}7) < 0; g(-1{,}6) > 0$

$\Rightarrow g(-1{,}7) \times g(-1{,}6) < 0 \Rightarrow -1{,}7 < \alpha < -1{,}6.$

Amplitude 0,1 car -1,6 – (-1,7) = 0,1.

c- On a $\alpha \in]-\infty;-1[$ avec g strictement monotone sur $]-\infty;-1[$;

$g(]-\infty;\alpha[) =]-\infty;0[\Rightarrow$ **$g(x) < 0$ sur $]-\infty;\alpha[$** et $g(]\alpha;+\infty[) =]0;2[\Rightarrow$ **$g(x) > 0$ sur $]\alpha;+\infty[$**

<u>PARTIE B</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-x-1}{x^3-1}$ et (Cf) sa courbe représentative.

1) Calcule des limites en $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-1}{x^3-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x^2} = 0 = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

2) Démontrons que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à (Cf)

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\<}} \frac{-x-1}{x^3-1} = \lim_{\substack{x\to1\\<}} \frac{-2}{x^3-1} = +\infty \ et \ \lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\>}} \frac{-2}{x^3-1} = -\infty$$

$\Rightarrow (Cf)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

3) **a- Calcule de la dérivée f' de f :**

$$f'(x) = \left(\frac{-x-1}{x^3-1}\right)' = \frac{(-x-1)' \times (x^3-1) - (-x-1) \times (x^3-1)'}{(x^3-1)^2} = \frac{-(x^3-1) - 3x^2(-x-1)}{(x^3-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-x^3+1+3x^3+3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{2x^3+3x^2+1}{(x^3-1)^2} = \frac{g(x)}{(x^3-1)^2}$$

b- $(x^3-1)^2 > 0 \ \forall x \in Df \Rightarrow$ le signe de f' dépend su signe de $g(x)$.

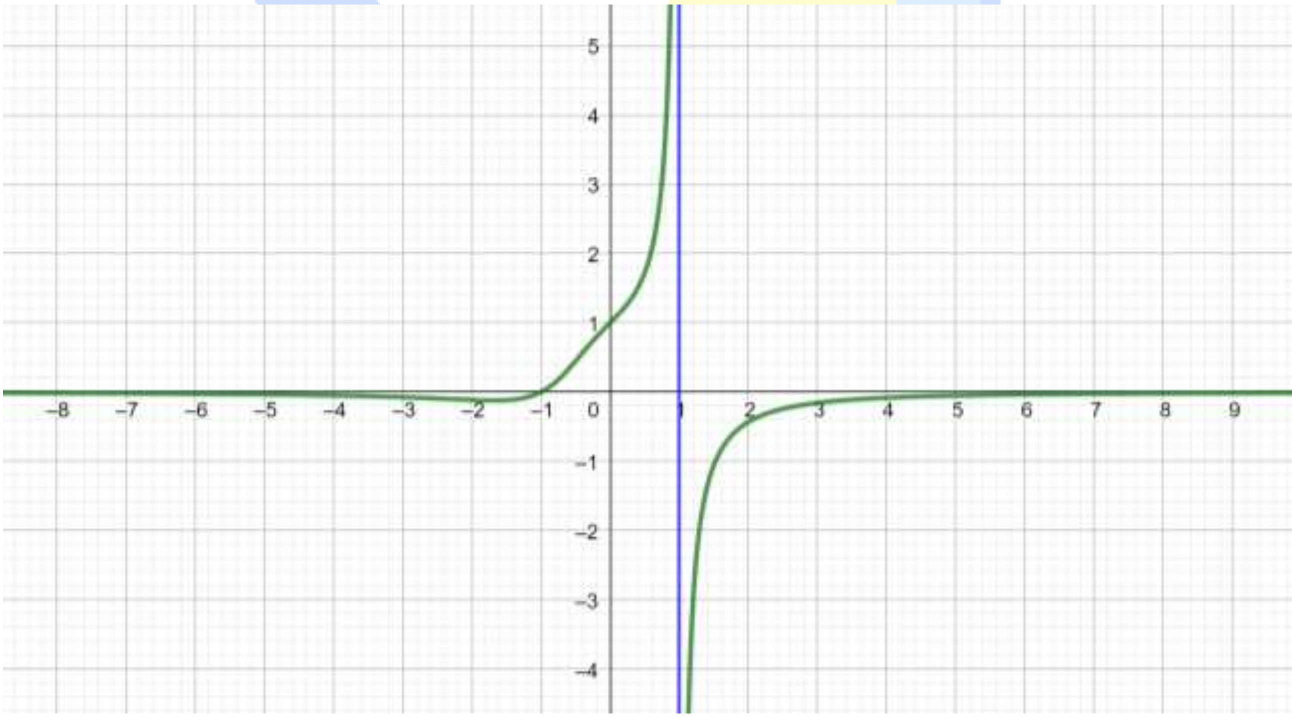
D'après la question 3-c) partie A, $\boldsymbol{f'(x) \leq 0 \ \forall \ x \in \left]-\infty; \alpha\right] \ et \ f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in [\alpha; 1[\cup]1; +\infty[}$.

c- Variations et tableau de variation de f:

$f'(x) \leq 0 \ \forall \ x \in]-\infty; \alpha] \Rightarrow f$ est décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in [\alpha; 1[\cup]1; +\infty[\Rightarrow f$ est croissante sur $[\alpha; 1[\cup]1; +\infty[$.

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-0,11$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

4) **Construction de (Cf) :**



$(\boldsymbol{Cf})$ **en vert et l'asymptote d'équation $\boldsymbol{x = 1}$ en bleu.**

EXERCICE 5

Dans ce texte, il est question d'enquêtes réalisées en vue de vérifier l'apport de la formation de la population sur les gestes qui peuvent sauver quelqu'un qui subit un AVC dans la réduction du taux de mortalité de ceux-ci. En effet, le Ministre de la santé, auteur de ces enquêtes, veut déterminer le nombre de vies supplémentaires qui seraient sauvées si 71% de la population étaient formés aux gestes qui sauvent.

La leçon qui va permettre de répondre à la préoccupation du ministre de la santé est **PROBABILITE CONDITIONNELLE ET VARIABLES ALEATOIRES.**

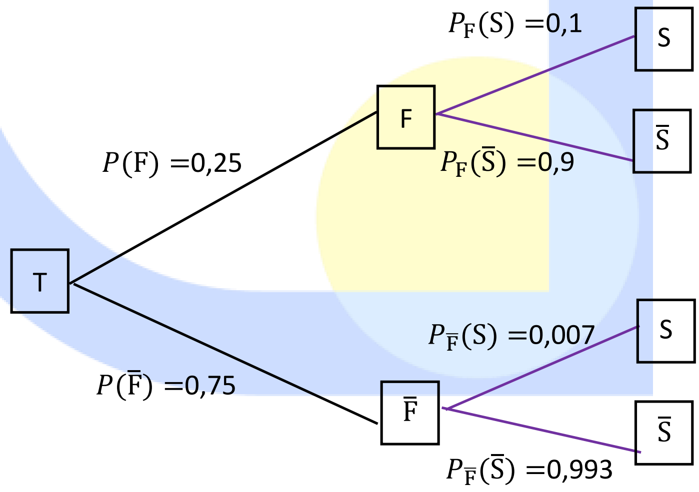
Nous allons d'abord dresser un arbre pondéré à l'aide des données (probabilités) que fournissent le texte, puis calculer la probabilité que les malades survivent avec ces données, et après calculer à nouveau cette même probabilité mais cette fois-ci avec les nouvelles données fournies en considérant la formation des 71% de la population, et enfin conclure en déterminant la différence entre ces probabilités, qui correspondra au nombre de vies supplémentaires sauvées à l'unité près.

Soit T l'évènement « l'accident survient devant un témoin ».

Soit F l'évènement « le témoin est formé ».

Soit S l'évènement « le malade survit ».

Arbre pondérée : (voir figure ci-contre)



Probabilité qu'un malade survive ($1^{ère}$ données) :

$P(\mathrm{S}) = P(\mathrm{F}) \times P_{\mathrm{F}}(\mathrm{S}) + P(\overline{\mathrm{F}}) \times P_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{S})$

$P(\mathrm{S}) = 0{,}25 \times 0{,}1 + 0{,}75 \times 0{,}007 = \mathbf{0,03025}$

Probabilité qu'un malade survive (avec les 71%) :

$P(\mathrm{F}) = 0{,}5 \Rightarrow P(\overline{\mathrm{F}}) = 0{,}5;\ P_{\mathrm{F}}(\mathrm{S}) = 0{,}25\ et\ P_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{S}) = 0{,}046$

$P(\mathrm{S}) = P(\mathrm{F}) \times P_{\mathrm{F}}(\mathrm{S}) + P(\overline{\mathrm{F}}) \times P_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{S}) = 0{,}5 \times 0{,}25 + 0{,}5 \times 0{,}046 = \mathbf{0,148}$

Le **nombre de vies supplémentaires** à l'unité près est égale à $\mathbf{0,148 - 0,03025 \approx 0,12}$ **(environ 12% de vies supplémentaires).**